

3次元運動の不偏推定法と統計的誤差解析

森尻智昭 金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

2画像間の点の対応から3次元剛体運動を推定する問題を、データに誤差があっても解がロバストに求まるように「エビ極線方程式」に基づいた最小二乗法として定式化する。まず実際の画像のノイズのモデルを定義し、これを用いて解の誤差の統計的な挙動を解析する。画像のノイズの統計的な挙動は、特徴点の「Nベクトル」の「共分散行列」によって表現する。次に、エビ極線方程式に基づいた最適解には「統計的な偏差」が存在することを示す。さらにその偏差を理論的に評価し、その幾何学的意味を明らかにする。最後に「不偏推定法」を構成し、乱数を用いたシミュレーションによりその効果を確かめる。

Unbiased Estimation and Statistical Error Analysis of 3-D Rigid Motion from Two Views

Tomoaki Morijiri and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University
Kiryu, Gunma 376, Japan

The problem of estimating 3-D rigid motion from point correspondences over two views is formulated as nonlinear least-squares optimization, and the statistical behaviors of the errors in the solution are analyzed by introducing a realistic model of image noise. Image noise is characterized by the "covariance matrices" of "N-vectors" representing feature points. It is shown that the optimally estimated solution based on the "epipolar equation" is "statistically biased". The geometry of this bias is described in both quantitative and qualitative terms. Finally, a scheme of computing an "unbiased" estimate is constructed, and random number simulations are conducted to demonstrate its effectiveness.

1. まえがき

運動している物体、または静止している物体を移動しているカメラから撮影した2枚の画像間の点の対応が与えられたとき、その画像間の物体またはカメラの3次元運動を推定する問題を考える。数学的には特徴点は5個あればよく、また8個の特徴点から解を解析的に求めることもできる(「8点アルゴリズム」[3, 6, 8])。

しかし、この8点アルゴリズムはデータに誤差がないという前提で成立するものであり、誤差があると矛盾を生じてしまう。多数の特徴点を用い、誤差があってもロバストに計算できる方法はWengら[11]によって導かれているが、これは8点アルゴリズムの各ステップを最小二乗法に置き換えたものであり、結果として得られる解が真の解に近いとは限らない。

本論文では解析の根幹をなす「エビ極線方程式」に対する直接的な最小二乗法による最適化を考える[1, 7]。この方法に対しては、最適解に統計的偏差が存在することが指摘されている[2]。本論文では画像上の特徴点を表す「Nベクトル」の「共分散行列」[10]を用いて、この統計的偏差を厳密に評価し、その幾何学的意味を記述する。そしてその結果を用いて、「不偏推定法」を構成し、乱数を用いたシミュレーション実験によってその効果を確かめる。

2. 3次元剛体運動推定

$\{P_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ を互いに識別できる空間中の特徴点とする。 $\{m_\alpha\}$ を「視点」 O (カメラのレンズの中心) から特徴点 P_α へ向かう単位ベクトルとし、これを特徴点 P_α の「Nベクトル」と呼ぶ[3, 5]。物体の3次元運動は、静止した物体に対するカメラの相対的な移動と等価であるから、本論文では静止した物体に対してカメラが回転 R 、並進 h を行うものとする。 $\{R, h\}$ を「運動パラメータ」と呼ぶ。

カメラが移動すると特徴点は画像上の別の位置に移動する。 $\{m'_\alpha\}$ を移動後のカメラに対する特徴点のNベクトルとする。図1からわかるように、 r_α, r'_α をそれぞれ特徴点 P_α の運動前後の視点 O からの距離とすれば、問題は次のように書ける。

【問題1】 単位ベクトルの組 $\{m_\alpha\}$, $\{m'_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ が与えられているとき、次式を満たす回転行列 R 、並進ベクトル h 、および距離 r_α, r'_α を求めよ。

$$r_\alpha m_\alpha = h + r'_\alpha R m'_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

このことから、直ちに次のことがわかる：

- 並進と距離には定数倍の自由度が残る。すなわち、 $\{R, h\}$, r_α, r'_α が解なら、零でない任意の k に対して $\{R, kh\}$, kr_α, kr'_α も解である。すなわち、視点から遠い大きな運動は、視点から近い小さな運動と区別できない。この定数倍の自由度を除くために、 $h \neq 0$ であれば $\|h\| = 1$ と正規化する。

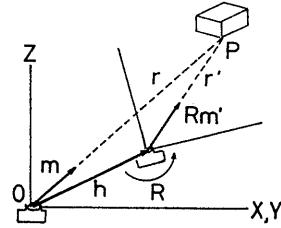


図1: カメラの移動と運動パラメータ $\{R, h\}$ 。

- $h \neq 0$ かどうかは容易に調べることができる。 $h = 0$ であれば、運動は視点の周りの3次元回転であり、

$$m_\alpha = R m'_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

であるから、回転行列 R は次式の最小二乗法によって計算できる。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \|m_\alpha - R m'_\alpha\|^2 \rightarrow \min \quad (2.3)$$

ただし W_α は非負の重みである。この解は「特異値分解」、「極分解」、または「四元数表示」を用いた方法で求まる[3, 9]。そして(2.3)式の残差を調べて、これを $h = 0$ かどうか判定する。以下 $h \neq 0$ がすでに確認されているとして、 $\|h\| = 1$ とする。

- なお符号の不定性が残る。すなわち $\{R, h\}$, r_α, r'_α が解なら $\{R, -h\}$, $-r_\alpha, -r'_\alpha$ も解である。そこで $r_\alpha > 0$, $r'_\alpha > 0$, $\alpha = 1, \dots, N$ となるように符号を選ぶ。
- 未知数は R (回転行列) に3個、 h (単位ベクトル) に2個、 r_α と r'_α に $2N$ 個の計 $2N+5$ 個ある。(2.1)式は N 個のベクトル式であり、 $3N$ 個の方程式からなる。したがって $2N+5 \leq 3N$, すなわち $N \geq 5$ でなければならない。

3. エビ極線方程式

本論文では、 (\cdot, \cdot) でベクトルの内積を、 $|a, b, c| (= (a \times b, c) = (b \times c, a) = (c \times a, b))$ でベクトル a, b, c のスカラー3重積を表す。

【定理1】 単位ベクトルの組 $\{m_\alpha\}$, $\{m'_\alpha\}$ が運動パラメータ $\{R, h\}$ のカメラ運動により引き起こされる必要十分条件は次式で与えられる。

$$|h, m_\alpha, R m'_\alpha| = 0. \quad (3.1)$$

(証明) (2.1)式は次のように書ける。

$$h = r'_\alpha R m'_\alpha - r_\alpha m_\alpha \quad (3.2)$$

すなわち, h が Rm'_α と m_α の線形結合で表される。そのような定数 r_α と r'_α が存在する必要十分条件は, ベクトル h, m_α, Rm'_α が各 $\alpha = 1, \dots, N$ に対して同一平面上にあることである (図 1)。 □

この証明からすぐわかるように, 距離 r_α, r'_α が (h の符号を指定したとき) 唯一に定まる必要十分条件は m_α と Rm'_α が平行でないこと, すなわち $(m_\alpha, Rm'_\alpha)^2 \neq 1$ である。(3.1) 式を「エビ極線方程式」と呼ぶ。エビ極線方程式は 5 つの未知数 (h に 2 個, R に 3 個) に対して N 個の方程式を与える。したがって $N \geq 5$ でなければならぬ。

運動パラメータ $\{R, h\}$ が得られれば, 距離 r_α, r'_α は (3.2) 式の 3 成分のうち任意の 2 つから計算できる。しかし, 誤差があることを考慮すると, 3 成分をすべて用いて平均的に最適解を計算するのが望ましい。3 成分すべてを用いるロバストな方法として考えられるのは次の最小二乗法である。

$$\sum_{\alpha=1}^N \|h - r'_\alpha Rm'_\alpha + r_\alpha m_\alpha\|^2 \rightarrow \min \quad (3.3)$$

左辺を r_α, r'_α について微分して, それを 0 とおいたものを解けば

$$r_\alpha = \frac{(h, m_\alpha) - (m_\alpha, Rm'_\alpha)(h, Rm'_\alpha)}{1 - (m_\alpha, Rm'_\alpha)^2}$$

$$r'_\alpha = \frac{(m_\alpha, Rm'_\alpha)(h, m_\alpha) - (h, Rm'_\alpha)}{1 - (m_\alpha, Rm'_\alpha)^2} \quad (3.4)$$

となる。この式から並進 h の符号を r_α, r'_α が正になるように定めればよい。データに誤差がある場合, すべての r_α, r'_α を正にできないかもしれない。これを防ぐには多数決 $\sum_{\alpha=1}^N (r_\alpha + r'_\alpha) > 0$ を用いればよい。ただし, $(m_\alpha, Rm'_\alpha)^2 = 1$ となる特徴点に対しては, 距離 r_α は定められない。

4. 最小二乗法による最適化

誤差のあるデータに対してロバストな解を求めるために (2.1) 式のエビ極線方程式に基づいた最適化問題を考える。

【問題 2】 単位ベクトルの組 $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$ に対して, 次のような回転行列 R と単位ベクトル h を求めよ。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha |h, m_\alpha, Rm'_\alpha|^2 \rightarrow \min \quad (4.1)$$

これはさらに次の問題に書き換えられる。

【問題 3】 単位ベクトルの組 $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$ に対して, 次の行列 $A(R)$ の最小固有値を最小にする回転行列 R を求め, 対応する単位固有ベクトルを h とせよ。

$$A(R) = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha \times Rm'_\alpha)(m_\alpha \times Rm'_\alpha)^T \quad (4.2)$$

行列 $A(R)$ をこのように定義すれば (4.1) 式の左辺が $(h, A(R)h)$ と書ける。これは h の 2 次形式であるから, h が $A(R)$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルのとき最小となり, その固有値が最小値を与える。

これは非線形最適化問題であるから, 数値的探索が必要となる。そのためには評価関数の勾配が必要となる。3 次元回転行列の「4 元数表示」[3, 4] を用いれば, 任意の回転行列 R は 4 つの実数 $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ($q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$) を用いて次のように表せる。

$$R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

したがって $A(R)$ は 4 次元単位ベクトル $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ の関数とみなせる。また $A(R)$ の最小固有値 λ_m も q の関数とみなせる。

固有値問題の摂動定理 [3] を用いれば, λ_m の q に関する勾配は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial q_\kappa} = (h, T_\kappa h), \quad \kappa = 0, 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

ただし, h は $A(R)$ の最小固有値 λ_m に対する単位固有ベクトルである。そして

$$T_\kappa = \sum_{\alpha=1}^N [(m_\alpha \times D_\kappa m'_\alpha)(m_\alpha \times Rm'_\alpha)^T + (m_\alpha \times Rm'_\alpha)(m_\alpha \times D_\kappa m'_\alpha)^T] \quad (4.5)$$

であり, $D_\kappa = \partial R / \partial q_\kappa$ である。その要素は (4.3) 式より次のように与えられる。

$$D_0 = 2 \begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 2 \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = 2 \begin{pmatrix} -q_2 & q_1 & q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = 2 \begin{pmatrix} -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

また, 探索を開始するには適切な初期値を与える必要がある。これには Weng ら [11] の解析的な方法を用いる [3]。

5. 最適解の統計的偏差

ノイズがないときの N ベクトルを m とする。これがノイズのために $m' = m + \Delta m$ となると、「共分散行列」を

$$V[m] = E[\Delta m \Delta m^T] \quad (5.1)$$

と定義する。ただし $E[\cdot]$ は期待値を示す。画像の大きさが「焦点距離」 f (画像面と視点との距離) に比べて小さいとき、 $V[m]$ は次のように与えられることが導ける [10]。

$$V[m] = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (I - m m^T) \quad (5.2)$$

ただし $\tilde{\epsilon} = \epsilon/f$ であり、 ϵ は各特徴点検出の精度 (「画像精度」と呼ぶ。単位は画素) である。

ここで次の表記を導入する。ベクトル u, v 、行列 A に対して、 A の各列と u のベクトル積がつくる行列を $u \times A$ と書き、 A の各行と v のベクトル積がつくる行列を $A \times v$ と書く。ベクトル $u = (u_i), v = (v_i)$ 、行列 $A = (A_{ij})$ に対して $u \times A$ 、 $A \times v$ の要素はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u_2 A_{31} - u_3 A_{21} & u_2 A_{32} - u_3 A_{22} & u_2 A_{33} - u_3 A_{23} \\ u_3 A_{11} - u_1 A_{31} & u_3 A_{12} - u_1 A_{32} & u_3 A_{13} - u_1 A_{33} \\ u_1 A_{21} - u_2 A_{11} & u_1 A_{22} - u_2 A_{12} & u_1 A_{23} - u_2 A_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{12} u_3 - A_{13} u_2 & A_{13} u_1 - A_{11} u_3 & A_{11} u_2 - A_{12} u_1 \\ A_{22} u_3 - A_{23} u_2 & A_{23} u_1 - A_{21} u_3 & A_{21} u_2 - A_{22} u_1 \\ A_{32} u_3 - A_{33} u_2 & A_{33} u_1 - A_{31} u_3 & A_{31} u_2 - A_{32} u_1 \end{pmatrix}$$

次の式が簡単に確かめられる。

$$(u \times A) \times v = u \times (A \times v) \quad (5.3)$$

これを単に $u \times A \times v$ と書く。

(4.1) 式において重み W_α の定数倍は解に影響を与えないので $\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = 1$ のように選ぶ。 $\{m_\alpha\}$ と $\{m'_\alpha\}$ の「モーメント行列」を

$$M = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_\alpha m_\alpha^T \quad (5.4)$$

$$M' = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m'_\alpha m_\alpha^T \quad (5.5)$$

と定義する。

問題3を考える。データに誤差があるとき、行列 $A(R)$ が $\tilde{A}(R)$ に振動するとする。各データの誤差は統計的に独立であるとする。

【補題1】

$$E[\tilde{A}(R)] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2 A(R) - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (M + R M' R^T) + \tilde{\epsilon}^2 I \quad (5.6)$$

(証明) m_α と m'_α がそれぞれ Δm_α と $\Delta m'_\alpha$ だけ振動するとき、 $E[\Delta m_\alpha] = E[\Delta m'_\alpha] = 0$ であり、独立性の仮定から

$$E[\Delta m_\alpha \Delta m_\beta] = \delta_{\alpha\beta} V[m_\alpha]$$

$$E[\Delta m'_\alpha \Delta m'_\beta] = \delta_{\alpha\beta} V[m'_\alpha]$$

$$E[\Delta m_\alpha \Delta m'_\beta] = E[\Delta m'_\alpha \Delta m_\beta] = 0 \quad (5.7)$$

である。ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタ ($i = j$ のとき 1, それ以外では 0) である。 $A(R)$ の期待値は次のように書ける。

$$\begin{aligned} E[\tilde{A}(R)] &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha ((m_\alpha \times R m'_\alpha)(m_\alpha \times R m'_\alpha)^T \\ &\quad + E[(\Delta m_\alpha \times R m'_\alpha)(\Delta m_\alpha \times R m'_\alpha)^T] \\ &\quad + E[(m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)(m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)^T] \\ &\quad + E[(\Delta m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)(\Delta m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)^T]) \quad (5.8) \end{aligned}$$

恒等式 $u \times (a b^T) \times v = (u \times a)(b \times v)^T$ と $u \times I \times u = u u^T - I$ を用いると右辺第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned} &E[(\Delta m_\alpha \times R m'_\alpha)(\Delta m_\alpha \times R m'_\alpha)^T] \\ &= -R m'_\alpha \times E[\Delta m_\alpha \Delta m_\alpha^T] \times R m'_\alpha \\ &= -R m'_\alpha \times V[m_\alpha] \times R m'_\alpha \\ &= -\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} R m'_\alpha \times (I - m_\alpha m_\alpha^T) \times R m'_\alpha \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (I - (R m_\alpha)(R m_\alpha)^T \\ &\quad - (m_\alpha \times R m'_\alpha)(m_\alpha \times R m'_\alpha)^T) \quad (5.9) \end{aligned}$$

同様に、右辺第3項は次のようになる。

$$\begin{aligned} &E[(m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)(m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)^T] \\ &= -m_\alpha \times R E[\Delta m'_\alpha \Delta m'_\alpha^T] R^T \times m'_\alpha \\ &= -m_\alpha \times R V[m'_\alpha] R^T \times m'_\alpha \\ &= -\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} m_\alpha \times R (I - m'_\alpha m_\alpha^T) R^T \times m'_\alpha \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (I - m_\alpha m_\alpha^T - (m_\alpha \times R m'_\alpha)(m_\alpha \times R m'_\alpha)^T) \quad (5.10) \end{aligned}$$

一方、右辺第4項は次のようになる。

$$\begin{aligned} &E[(\Delta m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)(\Delta m_\alpha \times R \Delta m'_\alpha)^T] \\ &= -E[R \Delta m'_\alpha \times (\Delta m_\alpha \Delta m_\alpha^T) \times R \Delta m'_\alpha] \\ &= -E[R \Delta m'_\alpha \times E[\Delta m_\alpha \Delta m_\alpha^T] \times R \Delta m'_\alpha] \\ &= -\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} E[R \Delta m'_\alpha \times (I - m_\alpha m_\alpha^T) \times R \Delta m'_\alpha] \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (E[\|\Delta m'_\alpha\|^2] I - R E[\Delta m'_\alpha \Delta m_\alpha^T] R^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E[(m_\alpha \times R\Delta m'_\alpha)(m_\alpha \times R\Delta m'_\alpha)^T] \\
& = \frac{\tilde{\epsilon}^4}{4} (2I - R(I - m'_\alpha m_\alpha^T)R^T \\
& - (I - m_\alpha m_\alpha^T - (m_\alpha \times Rm'_\alpha)(m_\alpha \times Rm'_\alpha)^T)) \\
& = \frac{\tilde{\epsilon}^4}{4} (m_\alpha m_\alpha^T + (Rm_\alpha)(Rm_\alpha)^T \\
& + (m_\alpha \times Rm'_\alpha)(m_\alpha \times Rm'_\alpha)^T) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

そして(5.9), (5.10), (5.11)式を(5.8)式に代入すれば

$$\begin{aligned}
E[\tilde{A}(R)] & = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2 \times \\
& \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha \times Rm'_\alpha)(m_\alpha \times Rm'_\alpha)^T \\
& - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha m_\alpha + (Rm'_\alpha)(Rm'_\alpha)^T) + \tilde{\epsilon}^2 I \\
& = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2 A(R) - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_\alpha m_\alpha^T) \\
& + R (\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m'_\alpha m_\alpha'^T) R^T + \tilde{\epsilon}^2 I \quad (5.12)
\end{aligned}$$

が得られ, これから(5.6)式が得られる。 □

【定理 2】 回転 R には軸

$$\tilde{l} \approx -N[h \times RM'R^T h] \quad (5.13)$$

の周りに正の回転角の統計的偏差が存在する。

(証明) 1次近似を考えると, 回転 R の偏差と並進 h の偏差は独立に重ね合わせてよい。並進 h の真の値を \bar{h} とする。固有値問題の摂動定理[3]によれば, $\tilde{A}(R)$ の最小固有値は1次近似において $\tilde{\lambda}_m(R) = (\bar{h}, \tilde{A}(R)\bar{h})$ となる。補題1から, その期待値は

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\lambda}_m(R)] & = (\bar{h}, E[\tilde{A}(R)]\bar{h}) = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2 (\bar{h}, A(R)\bar{h}) \\
& - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\bar{h}, (M + RM'R^T)\bar{h}) + \tilde{\epsilon}^2 I \quad (5.14)
\end{aligned}$$

と展開できる。 $A(R)$ の最小固有値を最小にする回転を \bar{R} とし, $R = \bar{R} + \Delta R$ とする。 \bar{R} と \bar{h} は真の解であるから $(\bar{h}, A(\bar{R} + \Delta R)\bar{h}) = O(\Delta R)^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\lambda}_m(\bar{R} + \Delta R)] & = \tilde{\epsilon}^2 I - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\bar{h}, (M + RM'R^T)\bar{h}) \\
& - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\bar{h}, (\Delta RM'R^T + \bar{R}M'\Delta R^T)\bar{h}) + O(\Delta R)^2 \quad (5.15)
\end{aligned}$$

となる。 $\bar{R} + \Delta R$ が一次近似において回転行列となるための条件は $\Delta R = \Delta l \times \bar{R}$ となるベクトル Δl が存在することである。したがって

$$\begin{aligned}
(\bar{h}, (\Delta RM'R^T + \bar{R}M'\Delta R^T)\bar{h}) & = 2(\bar{h}, \Delta RM'R^T\bar{h}) \\
& = 2(\bar{h}, \Delta l \times \bar{R}M'\bar{R}^T\bar{h}) \\
& = -2(\Delta l, \bar{h} \times \bar{R}M'\bar{R}^T\bar{h}) \quad (5.16)
\end{aligned}$$

このことから

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\lambda}_m(\bar{R} + \Delta R)] & = \tilde{\epsilon}^2 I - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\bar{h}, (M + RM'R^T)\bar{h}) \\
& + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\Delta l, \bar{h} \times \bar{R}M'\bar{R}^T\bar{h}) + O(\Delta R)^2 \quad (5.17)
\end{aligned}$$

となる。この式は

$$\Delta l = -\kappa(\bar{h} \times \bar{R}M'\bar{R}^T\bar{h}) \quad (5.18)$$

と選ぶことによって最も急速に降下する。ただし κ は正の定数である。したがって, $\tilde{\lambda}_m(R)$ を最小化する回転 R は, 軸 $N[\Delta l] = -N[\bar{h} \times \bar{R}M'\bar{R}^T\bar{h}]$ の周りの正の角度の偏差をもつ。 □

【定理 3】 並進 h には

$$\begin{aligned}
\Delta h & \approx C \left((M + RM'R^T)h \right. \\
& \left. - (h, (M + RM'R^T)h)h \right) \quad (5.19)
\end{aligned}$$

の統計的偏差が存在する。ただし C は正の定数である。

(証明) 定理2の証明と同様に, 回転 R の真の値を \bar{R} , 真の並進を \bar{h} とする。 $A(\bar{R})$ が $\tilde{A}(\bar{R})$ に摂動したとき, $h + \Delta h$ がその最小固有値に対する固有ベクトルであるとする。対応する最小固有値は固有値の摂動定理[3]より

$$\tilde{\lambda}_m(\bar{R}) = (\bar{h} + \Delta h, \tilde{A}(\bar{R})(\bar{h} + \Delta h)) \quad (5.20)$$

となる。補題1と $(\bar{h}, A(\bar{R})\bar{h}) = 0$ より, その期待値は

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\lambda}_m(\bar{R})] & = -\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\bar{h}, (M + \bar{R}M'\bar{R}^T)\bar{h}) + \tilde{\epsilon}^2 I \\
& - \tilde{\epsilon}^2 (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (\Delta h, (M + \bar{R}M'\bar{R}^T)\bar{h}) + O(\Delta h)^2 \quad (5.21)
\end{aligned}$$

となる。これは Δh が $(M + \bar{R}M'\bar{R}^T)\bar{h}$ の方向のとき最も急速に降下する。しかし, $\bar{h} + \Delta h$ は1次近似において単位ベクトルでなければならないので, 最急降下方向は $(M + \bar{R}M'\bar{R}^T)\bar{h}$ を \bar{h} に直交する平面に射影した方向になる。 □

6. 小物体近似

対象物体が小さく、距離が $r \gg \|h\| (= 1)$ のある小さな範囲内にすべての特徴点が集中していれば、 $m_\alpha \approx \bar{m}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$ と近似できる。(2.1)式より $m'_\alpha = R^T N[r_\alpha m_\alpha - h]$ であるから、 $m'_\alpha \approx R^T N[\bar{r}\bar{m} - h]$ と近似できる。したがって

$$M \approx \bar{m}\bar{m}^T \quad (6.1)$$

$$RM'R^T \approx N[\bar{r}\bar{m} - h]N[\bar{r}\bar{m} - h]^T \quad (6.2)$$

これを「小物体近似」と呼ぶ。

【命題1】 小物体近似では、回転 R の統計的偏差の軸 l は次のように近似できる。

$$l \approx \text{sgn}((\bar{m}, h))N[\bar{m} \times h] \quad (6.3)$$

(証明) $\|\bar{r}\bar{m} - h\|^2 = \bar{r}^2 - 2\bar{r}(\bar{m}, h) + 1$, $r \gg 1$ であるから、(6.2)式から、

$$\begin{aligned} RM'R^T h &\approx \frac{(\bar{r}\bar{m} - h)(\bar{r}\bar{m} - h)^T}{\bar{r}^2 - 2\bar{r}(\bar{m}, h) + 1} h \\ &= \frac{\bar{r}(\bar{m}, h) - 1}{\bar{r}^2 - 2\bar{r}(\bar{m}, h) + 1} (\bar{r}\bar{m} - h) \\ &\approx \frac{(\bar{m}, h)}{\bar{r}} (\bar{r}\bar{m} - h) \end{aligned} \quad (6.4)$$

と書ける。したがって

$$h \times RM'R^T h \approx (\bar{m}, h)h \times \bar{m} \quad (6.5)$$

となる。これと定理2とから(6.3)式を得る。□

【命題2】 小物体近似では、並進 h の統計的偏差 Δh は次のように近似できる。

$$\Delta h \approx C(\bar{m}, h)(\bar{m} - (\bar{m}, h)h) \quad (6.6)$$

ただし C は正の定数である。

(証明) (6.1), (6.4)式より

$$(M + RM'R^T)h \approx (\bar{m}, h)\bar{m} + (\bar{m}, h)(m - \frac{h}{\bar{r}}) \quad (6.7)$$

となる。これを(5.19)式に代入し、 $2C$ を C に書き直すと、(6.6)式が得られる。□

命題1, 2より次のことがわかる。

- 回転 R の偏差は、並進ベクトル h と物体方向 \bar{m} の両方に近似的に直交した軸の周りに現れる。
- 回転 R の偏差は、カメラが物体に近づくときは物体方向 \bar{m} を h に近づけるように、遠ざかるとき h から引き離すように現れる。
- 並進 h の偏差は、物体方向 \bar{m} に向かうように現れる。
- カメラが物体方向 \bar{m} かそれと直交する方向に動くとき、回転 R と並進 h の偏差は最小になる。

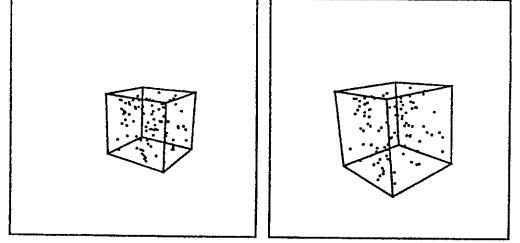


図2: シミュレーション画像. 各々100個の特徴点をとる。

7. 運動の不偏推定法

補題1より、次のように運動の不偏推定を行うことができる。

【定理4】 小画像近似において、回転 R の不偏推定値は、次の行列の最小固有値を最小にする回転によって与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{A}(R) &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha \times R m'_\alpha)(m_\alpha \times R m'_\alpha)^T \\ &\quad + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}(M + RM'R^T) - \bar{\epsilon}^2 I \end{aligned} \quad (7.1)$$

並進 h の不偏推定値は、その最小固有値に対応する単位固有ベクトルで与えられる。

(証明) ノイズがなければ $\bar{\epsilon} = 0$ であり、行列 $\hat{A}(R)$ は(4.2)式の行列 $A(R)$ に帰着する。ノイズがあるとき $\hat{A}(R)$ は次のように摂動する。

$$\tilde{A}(R) + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}(\tilde{M} + R\tilde{M}'R^T) - \bar{\epsilon}^2 I \quad (7.2)$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{A}(R) &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha ((m_\alpha + \Delta m_\alpha) \times R(m'_\alpha \\ &\quad + \Delta m'_\alpha))((m_\alpha + \Delta m_\alpha) \times R(m'_\alpha + \Delta m'_\alpha))^T \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha + \Delta m_\alpha)(m_\alpha + \Delta m_\alpha)^T \\ \tilde{M}' &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m'_\alpha + \Delta m'_\alpha)(m'_\alpha + \Delta m'_\alpha)^T \end{aligned} \quad (7.4)$$

である。 \tilde{M} の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[\tilde{M}] &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha m_\alpha^T + E[\Delta m_\alpha \Delta m_\alpha^T]) \\ &= M + \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V[m_\alpha] \end{aligned}$$

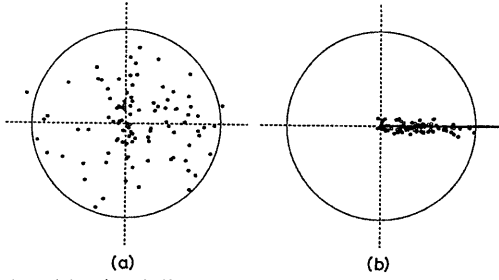


図 3: (a) 回転の誤差の投影図. (b) 並進の誤差の投影図. 実線は理論から予測される偏差の方向を示す.

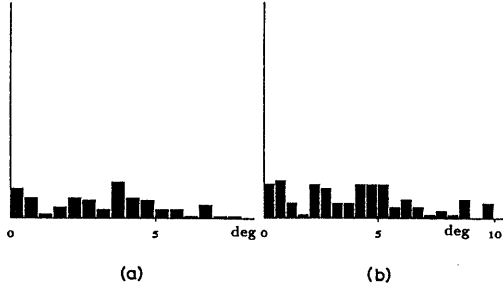


図 4: (a) 回転の誤差のヒストグラム. (b) 並進の誤差のヒストグラム.

$$\begin{aligned}
 &= M + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (I - m_{\alpha} m_{\alpha}^T) \\
 &= (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) M + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} I
 \end{aligned} \quad (7.5)$$

同様に, \tilde{M}' の期待値は次のようになる.

$$E[\tilde{M}'] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) M' + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} I \quad (7.6)$$

補題 1 と (7.5), (7.6) 式から, (7.2) 式の期待値は

$$\begin{aligned}
 &(1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2 A(R) - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (M + R M' R^T) + \tilde{\epsilon}^2 I \\
 &+ \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) (M + R M' R^T) + \frac{\tilde{\epsilon}^4}{4} I - \tilde{\epsilon}^2 I \\
 &= (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2 A(R) + \frac{\tilde{\epsilon}^4}{4} I
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

となる. この行列は $A(R)$ と同じ固有ベクトルを持つ. そして固有値は $\tilde{\lambda}_m = (1 - \tilde{\epsilon}^2/2)^2 \lambda_m + \tilde{\epsilon}^4/4$ であり, λ_m は $A(R)$ の最小固有値である. したがって, $\tilde{\lambda}_m$ を最小化することは λ_m を最小化することに等しい. \square

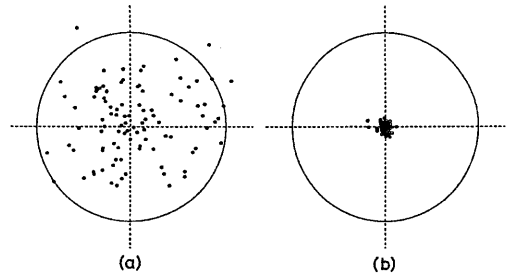


図 5: (a) 回転の不偏推定値の誤差の投影図. (b) 並進の不偏推定値の誤差の投影図

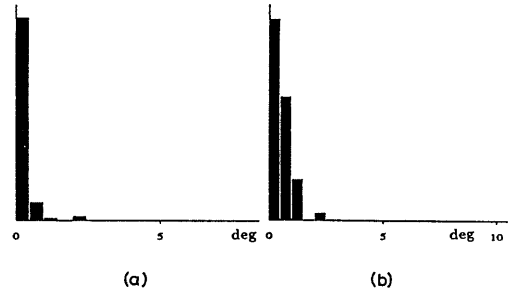


図 6: (a) 回転の不偏推定値の誤差のヒストグラム. (b) 並進の不偏推定値の誤差のヒストグラム

8. シミュレーション実験

図 2(a) と図 2(b) は 512×512 画素のカメラの移動前後のシミュレーション画像である. 立方体の中にランダムにとった 100 個の点を特徴点とする. 焦点距離は $f = 500$ (画素) とする. ノイズとして標準偏差が $\epsilon = 1.0$ (画素) の正規乱数を発生させ両方の画像上の各点に独立に加える.

真の回転 \tilde{R} に対する計算値を R とする. 誤差はベクトル $\Delta l = \Delta \Omega l'$ で測る. ただし $\Delta \Omega, \tilde{l}$ はそれぞれ相対回転行列 $R \tilde{R}^T$ の回転角および回転軸である (したがって $R = \tilde{R} + \Delta l \times R + O(\Delta l)^2$). 図 3(a) は定理 2 に示した \tilde{l} に垂直な平面上へ Δl を直交射影した点を, 100 回の試行に対して図示したものである. ベクトル \tilde{l} は紙面に対して上向きにとる. 白点は上向きのベクトルを示し, 黒点は下向きのベクトルを示す. 図中の円は大きさ 0.5° の範囲を示している. 回転の誤差は明らかに軸 \tilde{l} の周りに偏っている. 図 3(b) は, 真の並進ベクトル \tilde{h} に垂直な平面上へ計算値 h を直交射影した点である. 明らかに定理 3 で示した方向 (図中の実線) に並進の誤差が偏っている. 図 4(a) は $\Delta \Omega$ のヒストグラムであり, 図 4(b) は $\Delta \theta = \cos^{-1}(\tilde{h}, h)$ のヒストグラムである. $\Delta \Omega, \Delta \theta$ の平方二乗平均はそれぞれ $3.73^\circ, 4.83^\circ$ である.

図 5(a), (b) は定理 4 を用いて不偏推定値を計算した結果である. 図 5(a) からは Δl があらゆる方向に分布してい

ることがわかる。図5(b)からも偏差が除去され、誤差が小さくなっていることがわかる。図6(a)は $\Delta\Omega$ のヒストグラムであり、図6(b)は $\Delta\theta = \cos^{-1}(h, h)$ のヒストグラムである。これをもても、回転と並進の誤差が共に減少していることがわかる。 $\Delta\Omega$, $\Delta\theta$ の平方二乗平均はそれぞれ 0.47° , 0.68° である。

9. まとめ

本論文では2画像からの3次元剛体運動の推定問題をエビ極線方程式に基づく最小二乗法として定式化し、解の誤差の統計的挙動を解析した。そして、エビ極線方程式に基づいた最適解には統計的偏差が存在することを示した。さらにその偏差を解析的に表示し、その幾何学的意味を記述した。最後に不偏推定法を構成し、乱数を用いたシミュレーション実験によりその効果を確かめた。

この不偏推定法を用いるためには、画像のノイズの統計的挙動(具体的には、各点の誤差の標準偏差)が既知でなければならない。これを知るには、例えばまず従来の方法で解を求めて、その解によって第1画像の特徴点を第2画像に写像し、その食い違いから推定することが考えられる。これを反復してもよい。あるいは、最適化の評価関数の残差から推定することもできる。これらについては今後個別に報告する。本論文では、ノイズが正しく推定できれば精度が飛躍的に向上することを示し、そのような解析に適した数学的手段を提供した。

参考文献

- [1] J. Aisbett: An iterated estimation of the motion parameters of a rigid body from noisy displacement vectors, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **12** (1990), 1092-1098.
- [2] 金谷 健一: 3次元剛体運動推定の統計的偏り, 情報処理学会研究報告 90-CV-68, 1990-9.
- [3] 金谷 健一: 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [4] K. Kanatani: *Group-Theoretical Methods in Image Understanding.*, Springer, Berlin, 1990.
- [5] K. Knatani: Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding.*, **54** (1991), 333-448.
- [6] H. C. Longuet-Higgins: A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections, *Nature.*, **293-10** (1981), 133-135.
- [7] M. Spetsakis and J. (Y.) Aloimonos: A multi-frame approach to visual motion perception, *Int. J. Comput. Vision.*, **6** (1991), 245-255.
- [8] R. Y. Tsai and T. S. Huang: Uniqueness and estimation of three-dimensional motion parameters of rigid objects with curved surfaces, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **6** (1984), 13-27.
- [9] 辻弘行, 金谷健一: 3次元回転行列の最良推定とその応用, 情報処理学会研究報告, 92-CV-76, 1992-01.
- [10] 浦沢康二, 金谷健一: 幾何学的計算の統計解析: I. 基礎理論, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.
- [11] J. Weng, T. S. Tsai and N. Ahuja: Motion and structure from two perspective views: Algorithms, error analysis, and error estimation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **11** (1989), 451-467.