

コニックあてはめの統計的偏差と不偏推定法

岩崎 利夫 金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

コニックあてはめ問題に対する画像の誤差の統計的挙動を解析する数学的方法を提案する。まず、画像上の点の位置を表す「Nベクトル」の「共分散行列」を導入して画像の誤差の統計的モデルを記述する。このモデルを使うことにより、最適最小二乗法の解には統計的偏差が存在することを指摘する。さらに、誤差の統計的挙動を解析することによって不偏推定法を構成し、乱数を用いたシミュレーションを行なって理論を検証する。

Statistical Bias of Conic Fitting and Unbiased Estimation

Toshio Iwasaki and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

The conic fitting problem is given a mathematical framework that facilitates the study of statistical behaviors of image noise. We first present a statistical model of image noise in terms of the "covariance matrix" of the "N-vector". Using this model, we point out that the optimal least-squares fit is "statistically biased". We then construct a fitting scheme of computing an "unbiased" estimate by analyzing statistical behaviors of noise. Some random number simulations are conducted to confirm our analysis.

謝辞 本研究に関して有益な議論を頂いた英国オックスフォード大学の M. Brady 教授, A. Blake 博士, A. Zisserman 博士, 英国シェフィールド大学の J. Porrill 博士, 英国リーズ大学の K. Mardia 教授, 英国 GEC ハースト研究所の B. Buxton 博士および S. J. Maybank 博士に感謝します。

1. 序論

多くの物体には円形部分があり、それらは画像面上では楕円、一般には「コニック」に投影されるので、コニックは直線の次に重要な画像特徴である。コニックは2次の代数曲線であり、多くの曲線はコニックで近似できる。このため、画像上にコニックを検出することは画像解析の最初のステップであり、検出されたコニックは物体の認識や分類のための手がかりを与える。また、対応するコニックの空間中の位置や向きを計算することもできる[2, 5].

このような解析を行なうためには、まずコニックに曲線を当てはめなければならない。しかし、従来から提案されている手法のほとんどは「幾何学的関係」のみを考えたもので、画像処理に伴う誤差の確率的挙動まで考慮に入れた「統計的解析」はなされていなかった[1, 6, 7, 8].

本論文ではまず画像の誤差の統計的挙動を解析する数学的方法を提案し、次に画像の統計的モデル[9, 10]を用いて、最適最小二乗法の解には「統計的偏差」が存在することを指摘する。最後に、誤差の挙動を解析してコニックの「不偏推定法」を構成する。

2. コニックの数学的表現

「コニック」とは次の式で表される xy 平面上の曲線のことである。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (1)$$

次のようなカメラモデルを考える[3, 4]. 画像面の座標原点 o を通り画像面に垂直に Z 軸をとる。 Z 軸上で画像原点 o から距離 f だけ離れた点を O とする。 O を原点とし、画像上の x, y 軸に平行に X, Y 軸をとる。原点 O を「視点」、定数 f を「焦点距離」とよぶ。このモデルは仮想的なものであるが、以下では焦点距離 f として通常の装置に対応する値を持つと仮定する(例えば 512×512 画素の画像に対して $f \approx 1000$ 画素)。

このモデルでは、画像上の点 (x, y) は視点 O からその点に向かう単位ベクトル m によって次のように一意的に指定される(図1)。

$$m = N \begin{bmatrix} x \\ y \\ f \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す。ベクトル m を点 (x, y) の「 N ベクトル」とよぶ[3].

行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & F/f^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

と定義すると、式(1)は N ベクトル(2)を用いて

$$(m, Qm) = 0 \quad (4)$$

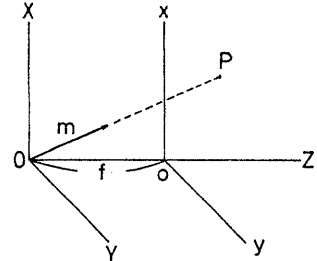


図1: 画像上の点の N ベクトル

と表せる。ただし (\cdot, \cdot) はベクトルの内積を表す。以下では簡単のために行列 Q の表すコニックを単に「コニック Q 」とよぶ。行列 Q を定数倍しても同じコニックを表すから、以下では

$$\|Q\| = 1 \quad (5)$$

と正規化する。ただし $\|\cdot\|$ はユークリッド行列ノルム ($\|Q\|^2 = \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij}^2$) を表す。

3. 最小二乗法による当てはめ

データ点を $\{P_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ とする。それぞれの N ベクトルを m_α とすると、式(4)より $(m_\alpha, Qm_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \dots, N$ となるコニック Q を求めればよい。そこで次の最小二乗法を考える。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha, Qm_\alpha)^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

ただし W_α は α 番目のデータの重みである。左辺を要素で表すと、

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m_{\alpha(l)} \right) Q_{ij} Q_{kl} \quad (7)$$

となる。ただし $m_{\alpha(i)}$ はベクトル m_α の第 i 成分である。そこで「モーメントテンソル」 $M = (M_{ijkl})$ を

$$M_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m_{\alpha(l)} \quad (8)$$

で定義する。これは行列から行列への線形変換を定義する。すなわち、 MQ は (ij) 要素が $\sum_{k,l=1}^3 M_{ijkl} Q_{kl}$ となる行列である。行列の内積を $(A, B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$ で定義すれば、条件(5)での最小化(6)は

$$(Q, MQ) \rightarrow \min, \quad \|Q\| = 1 \quad (9)$$

と書ける。ここで Q を6次元ベクトル

$$(Q_{11}, \sqrt{2}Q_{12}, Q_{22}, \sqrt{2}Q_{13}, \sqrt{2}Q_{23}, Q_{33})^T \quad (10)$$

とみなし、 M を6次元行列

$$\begin{pmatrix} M_{1111} & \sqrt{2}M_{1112} & M_{1122} \\ \sqrt{2}M_{1211} & 2M_{1212} & \sqrt{2}M_{1222} \\ M_{2211} & \sqrt{2}M_{2212} & M_{2222} \\ \sqrt{2}M_{1311} & 2M_{1312} & \sqrt{2}M_{1322} \\ \sqrt{2}M_{2311} & 2M_{2312} & \sqrt{2}M_{2322} \\ M_{3311} & \sqrt{2}M_{3312} & M_{3322} \\ \sqrt{2}M_{1113} & \sqrt{2}M_{1123} & M_{1133} \\ 2M_{1213} & 2M_{1223} & \sqrt{2}M_{1233} \\ \sqrt{2}M_{2213} & \sqrt{2}M_{2223} & M_{2233} \\ 2M_{1313} & 2M_{1323} & \sqrt{2}M_{1333} \\ 2M_{2313} & 2M_{2323} & \sqrt{2}M_{2333} \\ \sqrt{2}M_{3313} & \sqrt{2}M_{3323} & M_{3333} \end{pmatrix} \quad (11)$$

とみなせば、 $\|Q\|$ は Q の行列としてのノルムと考えるともよいし、ベクトルとみなしたノルムと考えるともよい。同様に、 (Q, MQ) は Q と MQ の行列としての内積と考えるともよいし、ベクトル同士の内積と考えるともよい。このときは MQ を行列 M とベクトル Q の積とみなす。

Q と M をそれぞれベクトルおよび行列とみなせば、式 (9) はベクトル Q の 2 次形式であり、その最小値は行列 M の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。あるいは $MQ = \lambda Q$ のようなノルム 1 の行列 Q をテンソル M の固有値 λ に対する「単位固有行列」とよぶことにすれば、解はテンソル M の最小固有値に対する単位固有行列 Q で与えられるともいえる。

式 (6) における重み W_α は信頼度の高いデータに対しては大きく、信頼度の低いデータに対しては小さく選ばなければならない。しかし、同じ信頼度の点でもデータ点の位置によって寄与のしかたが異なる。以下では画像の誤差の統計モデル [9, 10] を導入して、この問題を研究する。

4. 画像誤差の統計的モデル

ノイズが存在しないときの画像上の点の N ベクトルを m とする。観測されるのは振動された $m' = m + \Delta m$ である。以下では Δm を確率変数とみなし、 N ベクトル m の「共分散行列」を次のように定義する。

$$V[m] = E[\Delta m \Delta m^T] \quad (12)$$

ただし $E[\cdot]$ は期待値を表す。誤差 Δm は m 自体に比べて十分小さいとき、 m が単位ベクトルであるから、 Δm は第 1 近似で m に直交し、 $m' = m + \Delta m$ も第 1 近似で単位ベクトルである。

直観的には、誤差 Δm は u 方向 ($V[m]$ の最大固有値 σ_1^2 に対する固有ベクトル) に最も生じやすく、 v 方向 ($V[m]$ の中間固有値 σ_2^2 に対する固有ベクトル) に最も生じにくい、といえる。そして $\|\Delta m\|$ の標準偏差は u 方向に σ_1 であり、 v 方向に σ_2 である。以下では「誤差は画像の各点で独立に生じ、標準偏差 ϵ で各点の周りに等方的に起こる」というモデルを採用する。 ϵ を「画像精

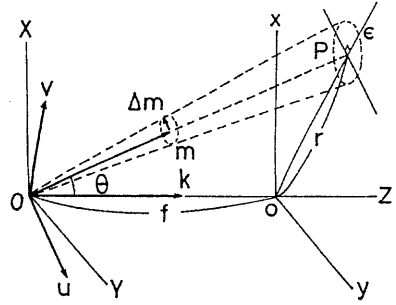


図 2: 画像の誤差モデル

度」とよぶ。 $k = (0, 0, 1)^T$ とおく。

【命題 1】 画像原点から距離 r にある点の N ベクトルの共分散行列 $V[m]$ は次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{\epsilon^2/f^2}{2(1+r^2/f^2)} \left(uu^T + \frac{1}{1+r^2/f^2} vv^T \right) \quad (13)$$

$$u = \pm \sqrt{1 + \frac{f^2}{r^2}} m \times k, \quad v = \pm u \times m \quad (14)$$

(証明) 点 P の N ベクトルを m とする。図 2 より明らかに、共分散行列 $V[m]$ の最大固有値に対する固有ベクトル u は m, k で定義された平面に直交する。これから $u = \pm N[m \times k] = \pm m \times k / \sin \theta$ 。ただし θ は m と k のなす角である。中間固有値に対する固有ベクトル v は m と u に直交するから、 $v = \pm m \times u$ である。誤差は画像上で等方的であると仮定したから、方向 u の標準偏差 ϵ_1 はその垂直方向の標準偏差 ϵ_2 に等しい。画像精度は $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$ であるから $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/\sqrt{2}$ となる。点 P での方向 u の誤差 $\epsilon/\sqrt{2}$ は N ベクトルに $\epsilon/(\sqrt{2}|OP|)$ だけの誤差を生じ、その垂直方向には $\epsilon \cos \theta/(\sqrt{2}|OP|)$ だけの誤差を生ずる。したがって共分散行列 $V[m]$ が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V[m] &= \frac{\epsilon^2}{2|OP|^2} uu^T + \frac{\epsilon^2 \cos^2 \theta}{2|OP|^2} vv^T \\ &= \frac{1}{2|OP|^2} (uu^T + \cos^2 \theta vv^T) \end{aligned} \quad (15)$$

これに $\cos \theta = 1/\sqrt{1+r^2/f^2}$ 、 $\sin \theta = 1/\sqrt{1+f^2/r^2}$ 、 $|OP| = f\sqrt{1+r^2/f^2}$ を代入すれば、式 (13) が得られる。□

画像の大きさが焦点距離 f に比べて小さければ、 $r \ll f$ 、 $1/(1+r^2/f^2) \approx 1$ である。この近似を「小画像近似」とよぶことにする。この近似によれば式 (13) は $(1/2)(\epsilon/f)^2(uu^T + vv^T)$ になる。そこで $\tilde{\epsilon} = \sqrt{E[\|\Delta m\|^2]}$ とおけば $\tilde{\epsilon}^2 = \text{tr} V[m] = (\epsilon/f)^2$ である。 $\{u, v, m\}$ は正規直交系であるから $uu^T + vv^T + mm^T = I$ となり [3]、これから次の結果を得る。

【系 1】小画像近似では、共分散行列 $V[m]$ は次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}(I - mm^T) \quad (16)$$

5. コニック当てはめの最適重み

最小二乗法 (6) の重み W_α の選び方を考える。各データが独立だとすれば、最適な重みは次のように与えられる。

$$W_\alpha = \frac{1}{(m_\alpha, QV[m_\alpha]Qm_\alpha)} \quad (17)$$

このように選べば、信頼性のあるデータは小さな共分散行列を持つからそのようなデータには大きな重みが与えられ、信頼性のないデータは大きな共分散行列を持つからそのようなデータには小さな重みが与えられることがわかる。

(導出) 正確に式 (4) を満足する m_α が $m'_\alpha = m_\alpha + \Delta m_\alpha$ に摂動すれば $\epsilon_\alpha = (m'_\alpha, Qm'_\alpha)$ はもはや 0 ではない。第 1 近似において

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= (m_\alpha + \Delta m_\alpha, Q(m_\alpha + \Delta m_\alpha)) \\ &= 2(\Delta m_\alpha, Qm_\alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

であり、これは期待値 $E[\epsilon_\alpha] = 0$ 、分散

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= E[\epsilon_\alpha^2] = 4m_\alpha^T Q^T E[\Delta m_\alpha \Delta m_\alpha^T] Qm_\alpha \\ &= 4(m_\alpha, QV[m_\alpha]Qm_\alpha) \end{aligned} \quad (19)$$

の確率変数である。各誤差 Δm_α が互いに独立ならば、 $\{\epsilon_\alpha\}$ の分布密度は正規分布

$$\prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha} e^{-\epsilon_\alpha^2/2\sigma_\alpha^2} = \prod_{\beta=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\beta} e^{-\sum_{\alpha=1}^N \epsilon_\alpha^2/2\sigma_\alpha^2} \quad (20)$$

で近似できる。これを最大にする推定(「最尤推定」)は次の最小化と同値である。

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(m'_\alpha, Qm'_\alpha)^2}{(m_\alpha, QV[m_\alpha]Qm_\alpha)} \rightarrow \min \quad (21)$$

これを (6) と比較すると、最適重み W_α が式 (17) によって与えられることがわかる。□

式 (16) の小画像近似を用いれば、

$$QV[m_\alpha]Q = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}(Q^2 - (Qm_\alpha)(Qm_\alpha)^T) \quad (22)$$

であるから

$$W_\alpha = \frac{2/\tilde{\epsilon}^2}{\|Qm_\alpha\|^2 - (m_\alpha, Qm_\alpha)^2} \quad (23)$$

となる。 $(m_\alpha, Qm_\alpha) = 0$ であり、重みは定数倍しても解

に影響しないから、

$$W_\alpha = \frac{\text{const}}{\|Qm_\alpha\|^2} \quad (24)$$

を得る。定数は $\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = 1$ となるように選ぶことにする。最適重み (17), (24) は誤差のない N ベクトル m_α を含んでいるので、これをデータ $m'_\alpha = m_\alpha + \Delta m_\alpha$ で近似しなければならない。また、計算しようとしているコニック Q も含んでいる。これは例えば一様な重みで当てはめた Q で近似すればよい。必要なら、それによって求めた Q を再び代入して、収束するまで反復すればよい。

6. コニック当てはめの統計的偏差

コニック \bar{Q} が $(m_\alpha, \bar{Q}m_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \dots, N$ を正確に満足するとすれば、これはノイズのないデータ $\{m_\alpha\}$ に対して、

$$J(Q) = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha, Qm_\alpha)^2 = (Q, \mathcal{M}Q) \quad (25)$$

を最小にする。しかし、実際に最小化するのには摂動された

$$\begin{aligned} \tilde{J}(Q) &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha + \Delta m_\alpha, Q(m_\alpha + \Delta m_\alpha))^2 \\ &= (Q, \mathcal{M}'Q) \end{aligned} \quad (26)$$

である。ただし $\mathcal{M}' = (M'_{ijkl})$ は

$$M'_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m'_{\alpha(i)} m'_{\alpha(j)} m'_{\alpha(k)} m'_{\alpha(l)} \quad (27)$$

であり、 $m'_{\alpha(i)}$ は $m'_\alpha = m_\alpha + \Delta m_\alpha$ の第 i 成分である。このとき、 \bar{Q} は $\tilde{J}(Q)$ を必ずしも最小化しない。 $\tilde{J}(Q)$ が $\bar{Q} + \Delta Q$ によって最小化されるとする。

$\mathcal{M}' = \mathcal{M} + \Delta \mathcal{M}$ とし、誤差のないモーメントテンソル \mathcal{M} の固有値 λ_κ ($\lambda_0 = 0$, $\lambda_\kappa > 0$, $\kappa = 1, \dots, 5$) に対する固有行列を $\{U^{(\kappa)}\}$, $\kappa = 0, \dots, 5$ とする。これらは正規直交系をつくる。

【補題 1】 第 1 近似において

$$E[\Delta Q] = - \sum_{\kappa=1}^5 \frac{K(U^{(\kappa)}, \bar{Q})}{\lambda_\kappa} U^{(\kappa)} \quad (28)$$

ただし $K(\cdot, \cdot)$ は

$$K(X, Y) = (X, E[\Delta \mathcal{M}]Y) \quad (29)$$

で定義される、対称行列上の対称双 1 次形式である。

(証明) 条件 $\|Q\| = 1$ のもとで $(Q, \mathcal{M}Q)$ を最小にする行列 \bar{Q} はテンソル \mathcal{M} の固有値 0 の単位固有行列で与えられる。 \mathcal{M} が $\mathcal{M}' = \mathcal{M} + \Delta \mathcal{M}$ に摂動されると、対応する固有行列は \bar{Q} から $\bar{Q} + \Delta Q$ に摂動される。よく知られ

た固有値問題の「摂動定理」[3]によると、 ΔQ は次のように与えられる。

$$\Delta Q = \sum_{\kappa=1}^5 \frac{(U^{(\kappa)}, \Delta M \bar{Q})}{0 - \lambda_{\kappa}} U^{(\kappa)} + O(\Delta M)^2 \quad (30)$$

通常の摂動定理は対称行列の固有値問題に関するものがあるが、行列 Q とテンソル M はそれぞれ6次元ベクトルおよび6次元対称行列ともみなせるので、テンソル M の固有値問題にも適用できる。両辺の期待値をとれば式(28)を得る。□

「モーメント行列」 M を

$$M = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} m_{\alpha} m_{\alpha}^T \quad (31)$$

で定義する。 $\bar{\epsilon} = \sqrt{E[\|\Delta m_{\alpha}\|^2]}$ と $\bar{\mu} = \sqrt[4]{E[\|\Delta m_{\alpha}\|^4]}$ とおき、式(16)の小画像近似を用いれば次の結果を得る。

【補題 2】

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= -3(\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{8})(X, MY) \\ &+ \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{4})(\text{tr} X \text{tr}(MY) + \text{tr} Y \text{tr}(MX)) \\ &+ 4\text{tr}(XMY) + \frac{\bar{\mu}^4}{8}((\text{tr} X)(\text{tr} Y) + 2(X, Y)) \quad (32) \end{aligned}$$

(証明) $K(X, Y)$ は対称双1次形式であるから、対応する2次形式 $K(X, X)$ が求まれば、「偏極化」とよばれる手順で一意的に定まる。 $X = Y = Q$ とおくと

$$\begin{aligned} K(Q, Q) &= (Q, E[\Delta M]Q) = E[(Q, M'Q)] \\ &- (Q, MQ) = E[\bar{J}(Q)] - J(Q) \quad (33) \end{aligned}$$

となる。ただし $J(Q)$ と $\bar{J}(Q)$ はそれぞれ式(25), (26)で与えられる。式(26)を展開すると

$$\begin{aligned} \bar{J}(Q) &= \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} ((m_{\alpha}, Qm_{\alpha}) \\ &+ 2(\Delta m_{\alpha}, Qm_{\alpha}) + (\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha}))^2 \quad (34) \end{aligned}$$

となる。 Δm_{α} の分布は m_{α} の周りに対称であるから、 Δm_{α} の奇数次の項の期待値は0である。したがって

$$\begin{aligned} E[\bar{J}(Q)] &= \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} ((m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2 \\ &+ 4E[(\Delta m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2] + E[(\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha})^2] \\ &+ 2(m_{\alpha}, Qm_{\alpha})E[(\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha})]) \quad (35) \end{aligned}$$

となる。項 $E[(\Delta m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2]$ と $E[(\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha})]$ は次のように計算できる。

$$E[(\Delta m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2] = m_{\alpha}^T Q^T E[\Delta m_{\alpha} \Delta m_{\alpha}^T] Q m_{\alpha}$$

$$\begin{aligned} &= (m_{\alpha}, QV[m_{\alpha}]Qm_{\alpha}) \\ &= \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}(m_{\alpha}, Q(I - m_{\alpha} m_{\alpha}^T)Qm_{\alpha}) \\ &= \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}\|Qm_{\alpha}\|^2 - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}(m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2 \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha})] &= \text{tr}(QE[\Delta m_{\alpha} \Delta m_{\alpha}^T]) \\ &= \text{tr}(QV[m_{\alpha}]) = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}\text{tr}(Q(I - m_{\alpha} m_{\alpha}^T)) \\ &= \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}\text{tr}Q - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}(m_{\alpha}, Qm_{\alpha}) \quad (37) \end{aligned}$$

$E[(\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha})^2]$ の項を計算するには次の関係式を用いる(証明省略)。

$$\begin{aligned} \frac{E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(j)} \Delta m_{\alpha(k)} \Delta m_{\alpha(l)}]}{E[\|\Delta m_{\alpha}\|^4]} &= \\ \frac{1}{8}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{8}(\delta_{ij}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} \\ &+ \delta_{ik}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(l)} + \delta_{il}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(k)} + \delta_{jk}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(l)} \\ &+ \delta_{jl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(k)} + \delta_{ki}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}) \\ &+ \frac{3}{8}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} \quad (38) \end{aligned}$$

ただし $m_{\alpha(i)}$, $\Delta m_{\alpha(i)}$ はそれぞれ m_{α} , Δm_{α} の第 i 成分であり、 δ_{ij} はクロネッカのデルタ ($i = j$ のとき1, それ以外は0)である。 $\bar{\mu}^4 = E[\|\Delta m_{\alpha}\|^4]$ とすると

$$\begin{aligned} E[(\Delta m_{\alpha}, Q\Delta m_{\alpha})^2] &= \sum_{i,j,k,l=1}^N E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(j)} \Delta m_{\alpha(k)} \Delta m_{\alpha(l)}] Q_{ij} Q_{kl} \\ &= \frac{3\bar{\mu}^4}{8}(m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{2}\|Qm_{\alpha}\|^2 \\ &- \frac{\bar{\mu}^4}{4}\text{tr}Q(m_{\alpha}, Qm_{\alpha}) + \frac{\bar{\mu}^4}{8}(\text{tr}Q)^2 + \frac{\bar{\mu}^4}{4}\|Q\|^2 \quad (39) \end{aligned}$$

となる。 $\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} = 1$ に注意して、式(36), (37), (39)を式(35)に代入すると

$$\begin{aligned} E[\bar{J}(Q)] &= (1 - 3\bar{\epsilon}^2 + \frac{3\bar{\mu}^4}{8}) \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2 \\ &+ (\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{4}) \text{tr}Q \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (m_{\alpha}, Qm_{\alpha}) \\ &+ (2\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{2}) \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} \|Qm_{\alpha}\|^2 + \frac{\bar{\mu}^4}{8}(\text{tr}Q)^2 + \frac{\bar{\mu}^4}{4}\|Q\|^2 \quad (40) \end{aligned}$$

となる。関係式 $\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (m_{\alpha}, Qm_{\alpha})^2 = J(Q)$ と

$$\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (m_{\alpha}, Qm_{\alpha}) = \text{tr}\left(\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} m_{\alpha} m_{\alpha}^T\right) Q \quad (41)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} \|Qm_{\alpha}\|^2 = \text{tr}\left(\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} m_{\alpha} m_{\alpha}^T\right) Q^2 \quad (42)$$

とから、次の結果を得る。

$$E[\hat{J}(Q)] - J(Q) = -3(\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{8})J(Q) + (\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{4})(\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)) + \frac{\tilde{\mu}^4}{8}((\text{tr}Q)^2 + 2\|Q\|^2) \quad (43)$$

偏極化 $((Q, MQ), \text{tr}Q\text{tr}(MQ), \text{tr}(MQ^2), (\text{tr}Q)^2, \|Q\|^2)$ をそれぞれ $(X, MY), (\text{tr}X\text{tr}(MY) + \text{tr}Y\text{tr}(MX))/2, \text{tr}(XMY), \text{tr}X\text{tr}Y, (X, Y)$ で置き換える) によって、式 (32) を得る。□

【定理 1】 第 1 近似において、最適に当てはめたコニック Q には

$$E[\Delta Q] = -\sum_{\kappa=1}^5 \left(\frac{(4\tilde{\epsilon}^2 - \tilde{\mu}^4)\lambda_{\kappa} + \tilde{\mu}^4}{8\lambda_{\kappa}} \text{tr}U^{(\kappa)}\text{tr}\bar{Q} + \frac{4\tilde{\epsilon}^2 - \tilde{\mu}^4}{2\lambda_{\kappa}} \text{tr}(U^{(\kappa)}M\bar{Q}) \right) U^{(\kappa)} \quad (44)$$

の統計的偏差が存在する。

(証明) $X = U^{(\kappa)}, Y = \bar{Q}$ を式 (32) に代入すればよい。 $M, U^{(\kappa)}$ の定義から次の関係が成り立つ。

$$MU^{(\kappa)} = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}(m_{\alpha}, U^{(\kappa)}m_{\alpha})m_{\alpha}m_{\alpha}^T = \lambda_{\kappa}U^{(\kappa)} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(MU^{(\kappa)}) &= \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}(m_{\alpha}, U^{(\kappa)}m_{\alpha}) \\ &= \text{tr}(MU^{(\kappa)}) = \lambda_{\kappa}\text{tr}U^{(\kappa)} \end{aligned} \quad (46)$$

$U^{(\kappa)}$ を $\bar{Q} (= U^{(0)})$ で置き換えても同じ関係が成り立つ。それに対しては、 $\lambda_0 = 0$ である。このことから、 $M\bar{Q} = O, \text{tr}(M\bar{Q}) = \text{tr}(M\bar{Q}) = 0$ である。また、直交関係 $(U^{(\kappa)}, \bar{Q}) = 0$ から、

$$\begin{aligned} K(U^{(\kappa)}, \bar{Q}) &= \frac{\lambda_{\kappa}}{2}(\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{4})\text{tr}U^{(\kappa)}\text{tr}\bar{Q} \\ &+ 2(\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{4})\text{tr}(U^{(\kappa)}M\bar{Q}) + \frac{\tilde{\mu}^4}{8}\text{tr}U^{(\kappa)}\text{tr}\bar{Q} \\ &= \frac{(4\tilde{\epsilon}^2 - \tilde{\mu}^4)\lambda_{\kappa} + \tilde{\mu}^4}{8}\text{tr}U^{(\kappa)}\text{tr}\bar{Q} \\ &+ \frac{4\tilde{\epsilon}^2 - \tilde{\mu}^4}{2}\text{tr}(U^{(\kappa)}M\bar{Q}) \end{aligned} \quad (47)$$

となる。これを式 (28) に代入すれば式 (44) を得る。□

7. コニックの不偏推定法

【定理 2】 次のように当てはめたコニックは統計的に不偏である。

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})J(Q) - (\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{4})(\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)) \\ + \frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}^4 - \frac{(\tilde{\epsilon}^2 + 2)\tilde{\mu}^4}{8})((\text{tr}Q)^2 + 2\|Q\|^2) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (48)$$

(証明) ノイズがなければ $\tilde{\epsilon} = \tilde{\mu} = 0$ であるから、これは (6) と同じになる。ノイズがあれば左辺は、

$$\begin{aligned} \hat{J}(Q) &= (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})\hat{J}(Q) \\ &- (\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{4})(\text{tr}Q\text{tr}(\hat{M}Q) + 2\text{tr}(\hat{M}Q^2)) \\ &+ \frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}^4 - \frac{(\tilde{\epsilon}^2 + 2)\tilde{\mu}^4}{8})((\text{tr}Q)^2 + 2\|Q\|^2) \end{aligned} \quad (49)$$

となる。ただし次のようにおいた。

$$\hat{J}(Q) = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}(m_{\alpha} + \Delta m_{\alpha}, Q(m_{\alpha} + \Delta m_{\alpha}))^2 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}(m_{\alpha} + \Delta m_{\alpha})(m_{\alpha} + \Delta m_{\alpha})^T \\ &= \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}(m_{\alpha}m_{\alpha}^T) + m_{\alpha}\Delta m_{\alpha}^T \\ &\quad + \Delta m_{\alpha}m_{\alpha}^T + \Delta m_{\alpha}\Delta m_{\alpha}^T \end{aligned} \quad (51)$$

\hat{M} の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[\hat{M}] &= M + \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}V[m_{\alpha}] = M \\ &+ \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}(I - m_{\alpha}m_{\alpha}^T) = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})\hat{M} + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}I \end{aligned} \quad (52)$$

($\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} = 1$ に注意。) ゆえに

$$E[\text{tr}Q\text{tr}(\hat{M}Q)] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}(\text{tr}Q)^2 \quad (53)$$

$$E[\text{tr}(\hat{M}Q^2)] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})\text{tr}(MQ^2) + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}\|Q\|^2 \quad (54)$$

となる。式 (43), (53), (54) を式 (49) に代入すれば、 $\hat{J}(Q)$ の期待値は次のようになる。

$$E[\hat{J}(Q)] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})(1 - 3(\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{8}))J(Q) \quad (55)$$

したがって、ノイズを含んだデータ $\{m_{\alpha} + \Delta m_{\alpha}\}$ に対して $\hat{J}(Q)$ を最小にすることは、平均として、ノイズのないデータ $\{m_{\alpha}\}$ に対して $J(Q)$ を最小にすることと同値である。□

式 (48) を 2 次形式の形で

$$(Q, \hat{M}Q) \rightarrow \min, \quad (56)$$

と書くと次の結果を得る。

【系 2】 不偏なコニック Q は

$$\hat{M}_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} \left((1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} \right)$$

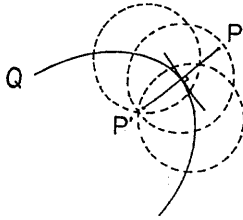


図3: 点 P' のほうが点 P より生じやすい

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{4})(\delta_{ij}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} + \delta_{ik}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(l)} \\
 & \quad + \delta_{il}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(j)} + \delta_{jk}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(l)} \\
 & \quad + \delta_{jl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(k)} + \delta_{kl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}) \\
 & + \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}^4 - \frac{(\bar{\epsilon}^2 + 2)\bar{\mu}^4}{8})(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (57)
 \end{aligned}$$

で定義されるテンソル $\hat{M} = (\hat{M}_{ijkl})$ の最小固有値に対する単位固有行列で与えられる。

直観的には、例えば x_α が平均 \bar{x}_α 、分散 σ^2 の確率変数であれば $E[x_\alpha^2] = \bar{x}_\alpha^2 + \sigma^2$ であるから、 x_α^2 などの項はその期待値が \bar{x}_α^2 などと一致するように $x_\alpha^2 - \sigma^2$ など置き換えるということである。別の見方をすれば、画像上の距離は統計的な意味において当てはめの適切な尺度ではないということである。例えば図3で点 P と点 P' は曲線から同じ距離にある。しかし曲線は点 P から離れるように伸びているので、もともと曲線上のどこかにあった点がノイズによって P に移るという確率は小さい。一方、曲線が P' を囲うように伸びているので、曲線上のどこかの点がノイズで P' に移るという確率は大きい。このように、画像上の距離だけではなく、誤差の統計的挙動を全体的に考慮しなければならない。

8. シミュレーション実験

図4(a)のように楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ の上半分に19点を取り、各点に標準偏差 σ の2次元正規分布に従うノイズを加える。焦点距離は $f = 10$ とする。図4(b)は $\sigma = 0.01, 0.02, 0.03$ に対して定理1で与えられる理論的偏差を示したものである。破線は真のコニックを示す。

図5(a)は $\sigma = 0.02$ に対して最適重みにより当てはめを行なった例である。明らかに定理1で示される統計的偏差が存在する。図5(b)に定理2の不偏推定法によって当てはめたコニックを示す。

一見すると、当てはめたコニックから図4(b)の理論的偏差を引けば偏差がとり除けそうに思える。しかし、理論的偏差は真のコニックの式を用いて計算しており、真のコニックは未知である。したがって、真のコニックの推定値によって補正せざるを得ないが、その結果として分散は必然的に増大する。

図6(a)のように同じ楕円の右上部分に10点とると、 $\sigma = 0.001, 0.002, 0.003$ に対して理論的偏差は図6(b)ようになる。図7(a)は $\sigma = 0.002$ に対する当てはめの例である。図7(b)は定理2の不偏推定法によって当てはめた例である。偏差はとり除かれているが分散は増大している。

9. まとめ

本論文では、コニック当てはめ問題に対する画像の誤差の統計的挙動を解析した。まず、画像の誤差の統計的モデルを用いて、最適最小二乗法の解には統計的偏差が存在することを指摘した。さらに、誤差の統計的挙動を解析して統計的に不偏推定法を構成した。最後に乱数を用いたシミュレーションを行なって解析結果が実際とよく合致することを確認した。

なお、本論文に示した不偏推定法を用いるには画像の誤差の2次および4次のモーメントを知る必要がある。これを推定する方法は今後別に報告する。

参考文献

- [1] F. L. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Graphics Image Process.*, 9 (1979), 56-71.
- [2] D. Forsyth, et al., Invariant descriptions for 3-D object recognition and pose, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 13 (1991), 971-991.
- [3] 金谷健一, 「画像理解」, 森北出版, 1990.
- [4] K. Kanatani, Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991).
- [5] 劉・金谷, コニックの3次元解釈とその応用, 情報処理学会研究報告, 92-CV-76, 1992-01.
- [6] J. Porrill, Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter, *Image Vision Comput.*, 8 (1990), 37-41.
- [7] R. Safaei-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib and K. C. Smith, Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 259-274.
- [8] P. D. Sampson, Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Comput. Graphics Image Process.*, 18 (1982), 97-108.
- [9] 浦沢・金谷, 幾何学的計算の統計解析: I. 基礎理論, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.
- [10] 浦沢・金谷, 幾何学的計算の統計解析: II. エッジ, 消失点, 出現点, 情報処理学会研究報告, 92-CV-78, 1992-05.

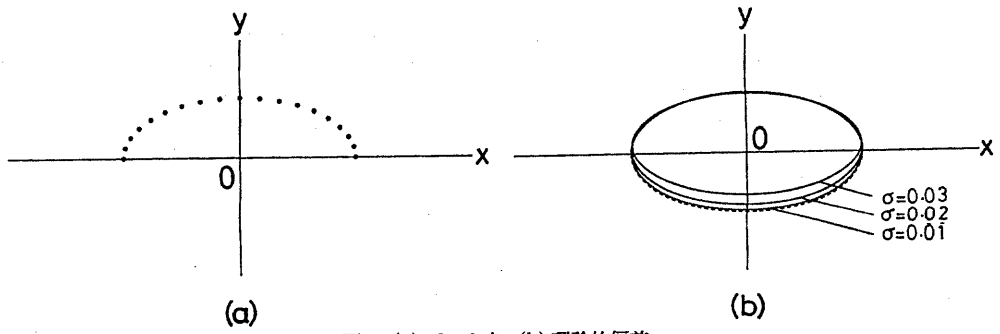


図4: (a) データ点. (b) 理論的偏差

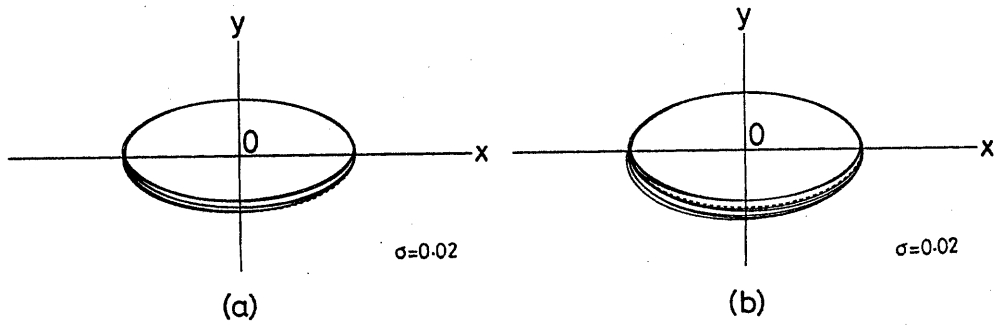


図5: (a) 当てはめの例. (b) 不偏推定法による当てはめ

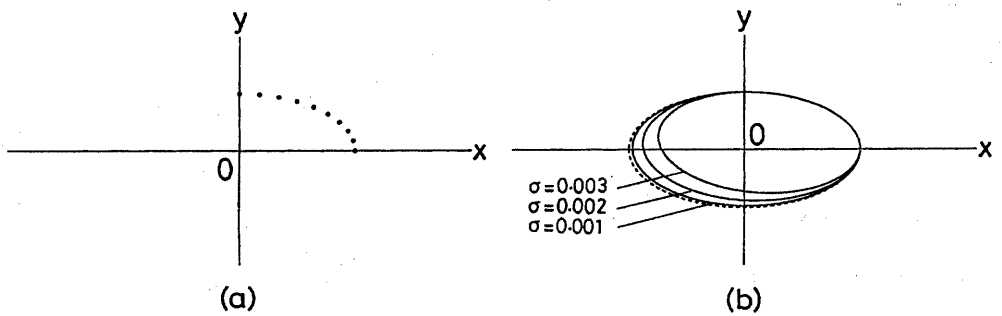


図6: (a) データ点. (b) 理論的偏差

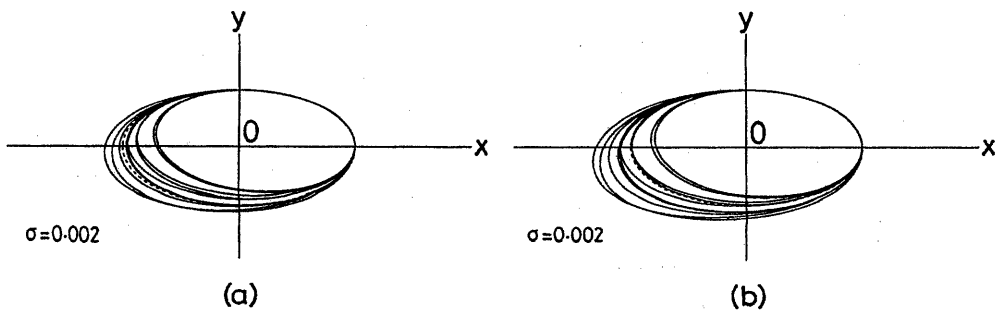


図7: (a) 当てはめの例. (b) 不偏推定法による当てはめ