

幾何学的計算の統計解析:

I. 基礎理論

浦沢 康二 金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

本論文では、コンピュータビジョンの基礎となる画像データの幾何学的計算の誤差の統計的挙動を一般的に定式化する。まず「Nベクトル」の「共分散行列」により画像のノイズを統計的にモデル化し、直線の交点や2点を通る直線のNベクトルの共分散行列を計算する。これを用いて交点の推定や直線あてはめのための最小二乗法の「最適重み」を導出し、最適推定値の共分散行列を計算する。また、これらの計算には「統計的偏差」が存在することも指摘する。最後に「不偏推定値」の計算方法を示す。

Statistical Analysis of Geometric Computation:

Part 1. Fundamental Theory

Kouji Urasawa and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

This paper studies statistical behaviors of errors involved in fundamental geometric computations for computer vision. We first present a statistical model of image noise in terms of the "covariance matrix" of the "N-vector". Using this model, we compute the covariance matrices of N-vectors of lines and their intersections. Then, we determine the "optimal weights" for the least-squares optimization for intersection estimation and line fitting, and compute the covariance matrix of the resulting optimal estimate. We also point out that "statistical biases" exist in such computations, and present schemes of computing "unbiased estimates".

謝辞 本研究に関する有益な討論を頂いた英国オックスフォード大学の M. Brady 教授、A. Blake 博士、A. Zisserman 博士、および英国 GEC の S. Maybank 博士に感謝します。

1 はじめに

コンピュータビジョンの初期の研究では物体の「識別」が主たる目標であった。これはシーンの特徴を抽出し、物体と背景を分離し、物体の3次元形状の推定、分類を行ない、最後に記号による記述を得ようとするものである。この応用としては空港や道路の自動監視などが考えられる。しかし、最近のロボット工学の急速な発展によって「環境理解」の必要性が高まった。これはロボットの作業空間中の目的物や障害物の位置を計測し、カメラの3次元運動を計算することである。この応用としてはロボットによる工業製品の製造、危険物処理、宇宙空間における作業などが考えられる。

このようなロボットへの応用では、計算の信頼性が最も重要である[1, 5, 6, 7, 8, 10, 12]。なぜなら、誤差の解析により精度改善の技法が構成できることもあるし、誤差が避けられないとしても、計算がどの程度信頼できるかという知識がシステムの性能評価のために必要となるからである。また、複数のセンサーからのデータを融合して性能を向上させようとする(「センサーフュージョン」)、信頼性の高いデータには信頼性の低いデータよりも大きな重みを付けなければならないので、データの信頼性の計算は不可欠となる。

本論文では画像データの「Nベクトル」の共分散行列によって画像のノイズを統計的にモデル化し、直線の交点および2点を通る直線のNベクトルの共分散行列を計算する。そして、交点推定や直線あてはめのための最小二乗法の「最適重み」を導出し、最適推定値の共分散行列を計算する。そして、そのような最適化の計算には「統計的偏差」が存在することを指摘し、最後に「不偏推定値」の計算方法を示す。

2 画像ノイズの統計的モデル

2.1 点と直線のNベクトル

次のようなカメラの撮像のモデルを考える[2, 3]。レンズの中心を原点 O とし、光軸方向が Z 軸となるように XYZ 座標系を定める(図1)。平面 $Z=f$ を画像面とし、画像面上に x, y 軸がそれぞれ X, Y 軸と平行になるように xy 座標系を定義する。原点 O を「視点」、定数 f を「焦点距離」と呼ぶ。

画像面上の点 (x, y) は、視点 O を始点とし、その点を通る視線の方向を表す単位ベクトル m で指定できる。また画像面上の直線 $Ax+By+C=0$ は、視点 O を通り、画像面でその直線と交わる平面の単位法線ベクトル n で指定できる(図1)。ベクトル m, n は次のように与えられる。

$$m = \pm N \begin{bmatrix} x \\ y \\ f \end{bmatrix}, \quad n = \pm N \begin{bmatrix} A \\ B \\ C/f \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す。 m, n

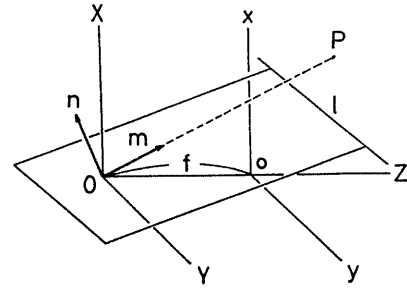


図1: 点と直線のNベクトル

を点と直線の「Nベクトル」と呼ぶ[2]。点 P と直線 l のNベクトルがそれぞれ m, n であれば、点 P が直線 l にある、あるいは直線 l が点 P を通る「隣接条件」は

$$(m, n) = 0 \quad (2)$$

である。ただし (\cdot, \cdot) はベクトルの内積を表す。

異なる2直線のNベクトルを n_1, n_2 とすると、それらの交点のNベクトル m は隣接条件 $(m, n_1) = 0, (m, n_2) = 0$ より次のように与えられる。

$$m = \pm N[n_1 \times n_2] \quad (3)$$

同様に、異なる2点のNベクトルを m_1, m_2 とすると、それらを通る直線のNベクトル n は隣接条件 $(m_1, n) = 0, (m_2, n) = 0$ より次のように与えられる。

$$n = \pm N[m_1 \times m_2] \quad (4)$$

2.2 Nベクトルの共分散行列

誤差が存在しないときの画像上の点のNベクトルを m とする。観測されるのは誤差の加わった $m' = m + \Delta m$ である。以下では Δm を確率変数とみなす。すなわち、その値は観測ごとに異なり、統計的挙動のみが知られているとする。「共分散行列」を次のように定義する。

$$V[m] = E[\Delta m \Delta m^T] \quad (5)$$

ただし T は転置、 $E[\cdot]$ は期待値を表す。誤差 Δm は m 自身に比べて十分小さいと仮定する。 m は単位ベクトルであるから、誤差 Δm は第1次近似において m と直交し、 $m' = m + \Delta m$ も第1次近似において単位ベクトルである。次のことが確かめられる。(証明省略)

- 共分散行列 $V[m]$ は、半正値対称行列である。
- 共分散行列 $V[m]$ は特異行列であり、 m 自身が固有値0に対する単位固有ベクトルである： $V[m]m = 0$ 。

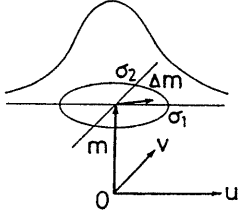


図 2: 共分散行列と誤差の分布

- $\{u, v, m\}$ が固有値 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, 0$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$) に対応する固有ベクトルの正規直交系であれば、共分散行列 $V[m]$ は次の「スペクトル分解」[2]をもつ(図2)。

$$V[m] = \sigma_1^2 uu^T + \sigma_2^2 vv^T + (0mm^T). \quad (6)$$

- 誤差 Δm の単位ベクトル l 方向への正射影の標準偏差は $l = u$ で最大となり、 $l = v$ で最小となる。その最大値と最小値は、それぞれ σ_1, σ_2 である。
- $\|\Delta m\|$ の標準偏差は $\sqrt{\text{tr}V[m]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ 。

要するに、誤差 Δm は u (= 最大固有値 σ_1^2 に対する $V[m]$ の単位固有ベクトル) 方向に最も生じやすく、 v (= 中間固有値 σ_2^2 に対する $V[m]$ の単位固有ベクトル) 方向に最も生じにくい。 $\|\Delta m\|$ の標準偏差は u 方向に σ_1 、 v 方向に σ_2 である(図2)。

2.3 画像ノイズのモデル

次のように画像のノイズをモデル化する。「誤差は画像面上の各点において標準偏差が一定、かつ等方的である。」誤差の標準偏差 ϵ (単位は画素) を「画素精度」と呼ぶ。 $k = (0, 0, 1)^T$ とおく。

【命題 1】 画像原点から距離 r の点の N ベクトルの共分散行列 $V[m]$ は、次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{\epsilon^2/f^2}{2(1+r^2/f^2)} \left(uu^T + \frac{1}{1+r^2/f^2} vv^T \right) \quad (7)$$

$$u = \pm \sqrt{1 + \frac{f^2}{r^2}} m \times k, \quad v = \pm u \times m \quad (8)$$

(証明) 点 P の N ベクトルを m とする。最大固有値に対する固有ベクトル u は m と k の張る平面に直交する(図3)。したがって $u = \pm N[m \times k] = \pm m \times k / \sin \theta$ 。ただし θ は m と k のなす角度である。中間固有値に対する固有ベクトル v は m と u の両方に直交する。したがって $v = \pm m \times u$ 。誤差は画像面上で等方的であるから、 u 方向の標準偏差 ϵ_1 はその垂直方向の標準偏差 ϵ_2 と等しい。画素精度は $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$ であるから、 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/\sqrt{2}$ である。点 P における u 方向のノイズ $\epsilon/\sqrt{2}$ は N ベクトル m に大きさ $\epsilon/\sqrt{2}|OP|$ の摂動

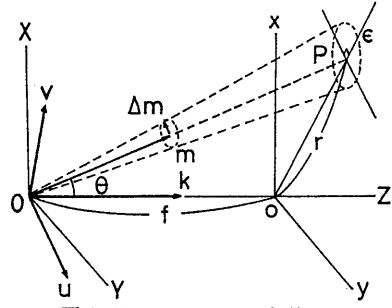


図 3: N ベクトル m の誤差の分布

を引き起こす。その垂直方向には大きさ $\epsilon \cos \theta / \sqrt{2}|OP|$ の摂動を引き起こす。したがって共分散行列 $V[m]$ が次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{\epsilon^2}{2|OP|^2} uu^T + \frac{\epsilon^2 \cos^2 \theta}{2|OP|^2} vv^T \\ = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{|OP|^2} (uu^T + \cos^2 \theta vv^T) \quad (9)$$

これに $\cos \theta = 1/\sqrt{1+r^2/f^2}$, $\sin \theta = 1/\sqrt{1+f^2/r^2}$, $|OP| = f\sqrt{1+r^2/f^2}$ を代入すると、式(7)が得られる。□

画像の大きさが焦点距離 f に比べて非常に小さければ $r \ll f$ であるから $1/(1+r^2/f^2) \approx 1$ となる。この近似を「小画像近似」と呼ぶ。このとき式(7)は $(1/2)\epsilon^2/f^2(uu^T + vv^T)$ となる。

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{E[\|\Delta m\|^2]} \quad (10)$$

とおくと、 $\tilde{\epsilon}^2 = \text{tr}V[m] = \epsilon^2/f^2$ である。 $\{u, v, m\}$ は正規直交系であるから、 $uu^T + vv^T + mm^T = I$ である[2]。したがって

【系 1】 小画像近似において、共分散行列 $V[m]$ は

$$V[m] = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}(I - mm^T) \quad (11)$$

2.4 有効焦点距離

前節のモデルでは、誤差の期待値は第1次近似において0である。しかし、これは高次の項を考えると成り立たない。 N ベクトル m に対応する画像座標 (x, y) は次のように与えられる。

$$x = f \frac{m_1}{m_3}, \quad y = f \frac{m_2}{m_3} \quad (12)$$

m に誤差 $\Delta m = (\Delta m_1, \Delta m_2, \Delta m_3)$ がランダムに加わると、上式の期待値は次のようになる(証明省略)。

$$E\left[f \frac{m_1 + \Delta m_1}{m_3 + \Delta m_3}\right] = x \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}^2/2}{1+r^2/f^2} + O(\Delta m)^3\right)$$

$$E\left[f \frac{m_2 + \Delta m_2}{m_3 + \Delta m_3}\right] = y \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}^2/2}{1+r^2/f^2} + O(\Delta m)^3\right) \quad (13)$$

以下 $O(\dots)^n$ は \dots に関する n 次項を表す。統計的偏差を取り除くには、 N ベクトル m を式(1)の第1式ではなく、次の式で定義すればよい。

$$m = N \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix}, \quad f = f \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}^2/2}{1+r^2/f^2}\right) \quad (14)$$

上式の f を「有効焦点距離」と呼ぶ。このとき次式が成り立つ(証明省略)。

$$E\left[f \frac{m_1 + \Delta m_1}{m_3 + \Delta m_3}\right] = x + O(\Delta m)^3$$

$$E\left[f \frac{m_2 + \Delta m_2}{m_3 + \Delta m_3}\right] = y + O(\Delta m)^3 \quad (15)$$

したがって、「データ点」 (x, y) の N ベクトルを定義するには式(14)を用い、 N ベクトル m を画像座標に変換するには式(12)を用いればよい。小画像近似では、有効焦点距離は次のように近似できる。

$$\tilde{f} = f \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}\right) \quad (16)$$

以上は直観的には次のように理解すればよい。 m を式(1)の第1式で定義し、命題1の誤差モデルを用いると、誤差の分布は u, v に関して対称である。これを画像面に投影すると、ノイズは画像原点から遠ざかるほうに生じやすいことになる。有効焦点距離を用いることはこの偏差を打ち消すように画像原点のほうにデータ点を微小に移動させることに相当する。しかし、この偏差は2次の効果であり、極めて小さいので通常は考える必要はない。 $f = 1000$ (画素)として $\epsilon \approx 1 \sim 10$ (画素)であるとすれば、 $\tilde{\epsilon}^2 \approx 10^{-6} \sim 10^{-4}$ であり1と比較すれば無視することができる。

3 直線と交点の共分散行列

ベクトル u, v 、行列 A に対して、 u と A の各列のベクトル積により作られる行列を $u \times A$ と書き、 A の各行と v のベクトル積により作られる行列を $A \times v$ と書く。ベクトル $u = (u_i)$ 、 $v = (v_i)$ と行列 $A = (A_{ij})$ に対して $u \times A$ 、 $A \times v$ の要素はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u_2 A_{31} - u_3 A_{21} & u_2 A_{32} - u_3 A_{22} & u_2 A_{33} - u_3 A_{23} \\ u_3 A_{11} - u_1 A_{31} & u_3 A_{12} - u_1 A_{22} & u_3 A_{13} - u_1 A_{23} \\ u_1 A_{21} - u_2 A_{11} & u_1 A_{22} - u_2 A_{12} & u_1 A_{23} - u_2 A_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{12} v_3 - A_{13} v_2 & A_{13} v_1 - A_{11} v_3 & A_{11} v_2 - A_{12} v_1 \\ A_{22} v_3 - A_{23} v_2 & A_{23} v_1 - A_{21} v_3 & A_{21} v_2 - A_{22} v_1 \\ A_{32} v_3 - A_{33} v_2 & A_{33} v_1 - A_{31} v_3 & A_{31} v_2 - A_{32} v_1 \end{pmatrix}$$

次の式が簡単に確かめられる。

$$(u \times A) \times v = u \times (A \times v) \quad (17)$$

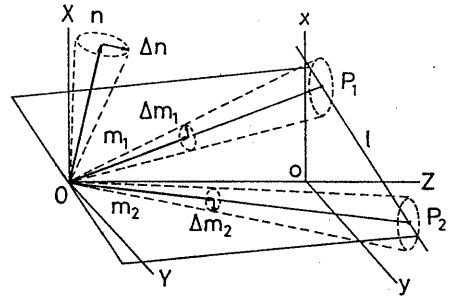


図4: 2点を結ぶ直線の誤差

これを単に $u \times A \times v$ と書く。画像面上の2つの点の N ベクトルを m_1, m_2 とすると、それらを通る直線の N ベクトル n は式(4)で与えられる。 m_1, m_2 にノイズが加わって、計算される N ベクトルが Δn だけ摂動するとき(図4)、 n の共分散行列 $V[n] = E[\Delta n \Delta n^T]$ は次のように与えられる。ただし $P_n = I - nn^T$ は n に垂直な平面への射影行列である[9]。

【命題2】 N ベクトルが m_1, m_2 の2点が独立¹であり、それぞれの共分散行列が $V[m_1], V[m_2]$ であれば、それらを通る直線の N ベクトル n の共分散行列 $V[n]$ は次のように与えられる。

$$V[n] = \frac{P_n(m_2 \times V[m_1] \times m_2 + m_1 \times V[m_2] \times m_1)P_n}{1 - (m_1, m_2)^2} \quad (18)$$

(証明) $a = m_1 \times m_2$ とおく。摂動 $m_1 \rightarrow m_1 + \Delta m_1$ 、 $m_2 \rightarrow m_2 + \Delta m_2$ によって、摂動 $a \rightarrow a + \Delta a$ が生じるとする。第1次近似において

$$\Delta a = \Delta m_1 \times m_2 + m_1 \times \Delta m_2 \quad (19)$$

と書ける。明らかに $E[a] = 0$ である。

$$\Delta a_1 = \Delta m_1 \times m_2, \quad \Delta a_2 = m_1 \times \Delta m_2 \quad (20)$$

とおく。 $\Delta a_1, \Delta a_2$ は互いに独立であるから

$$E[\Delta a \Delta a^T] = E[\Delta a_1 \Delta a_1^T] + E[\Delta a_2 \Delta a_2^T] \quad (21)$$

となる。右辺第1項は

$$E[\Delta a_1 \Delta a_1^T] = -E[(m_2 \times \Delta m_1)(\Delta m_1 \times m_2)^T]$$

$$= -m_2 \times E[\Delta m_1 \Delta m_1^T] \times m_2$$

$$= -m_2 \times V[m_1] \times m_2 \quad (22)$$

¹厳密に言うと、「2点の画像ノイズの分布は、互いに統計的に独立である」と言うべきであるが、簡単のためにこのように省略する。

となる。同様に $E[\Delta a_2 \Delta a_2^T] = -m_1 \times V[m_2] \times m_1$ である。したがって

$$V[a] = -m_2 \times V[m_1] \times m_2 - m_1 \times V[m_2] \times m_1 \quad (23)$$

摂動 $a \rightarrow a + \Delta a$ によって生じる $n = N[a]$ の摂動は第1次近似において、次の式で与えられる。

$$\Delta n = \frac{P_n \Delta a}{\|a\|} \quad (24)$$

したがって

$$\begin{aligned} V[n] &= E[\Delta n \Delta n^T] \\ &= \frac{P_n E[\Delta a \Delta a^T] P_n^T}{\|a\|^2} = \frac{P_n V[a] P_n^T}{\|a\|^2} \end{aligned} \quad (25)$$

式(23)を代入し、 $P_n = P_n^T$ および $\|a\|^2 = \|m_1 \times m_2\|^2 = 1 - (m_1, m_2)^2$ を用いれば式(18)が得られる。□

【系2】小画像近似において、 N ベクトルが m_1, m_2 の2点が独立であれば、それらを通る直線の N ベクトル n の共分散行列 $V[n]$ は次のように与えられる。

$$V[n] = \frac{\bar{\epsilon}^2}{1 - (m_1, m_2)^2} \left(I - n n^T - \frac{m_1 m_1^T + m_2 m_2^T}{2} \right) \quad (26)$$

(証明) 小画像近似では系1より

$$\begin{aligned} V[m_1] &= \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (I - m_1 m_1^T) \\ V[m_2] &= \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (I - m_2 m_2^T) \end{aligned} \quad (27)$$

である。単位ベクトル u に関する恒等式 $u \times I \times u = u u^T - I$ と関係 $n = \pm N[m_1 \times m_2] = \pm m_1 \times m_2 / \|m_1 \times m_2\|$ とから、次のことが分かる。

$$\begin{aligned} m_2 \times V[m_1] \times m_2 \\ = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (m_2 m_2^T - I + \|m_1 \times m_2\|^2 n n^T) \end{aligned} \quad (28)$$

同様に

$$\begin{aligned} m_1 \times V[m_2] \times m_1 \\ = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (m_1 m_1^T - I + \|m_1 \times m_2\|^2 n n^T) \end{aligned} \quad (29)$$

$\|m_1 \times m_2\| = 1 - (m_1, m_2)^2$ であるから、次式が得られる。

$$\begin{aligned} m_2 \times V[m_1] \times m_2 + m_1 \times V[m_2] \times m_1 \\ = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (m_1 m_1^T + m_2 m_2^T - 2I + 2(1 - (m_1, m_2)^2) n n^T) \end{aligned} \quad (30)$$

P_n の定義より $P_n^2 = P_n$, $P_n n = 0$, $P_n m_1 = m_1$, $P_n m_2 = m_2$ であり、命題2から式(26)が得ら

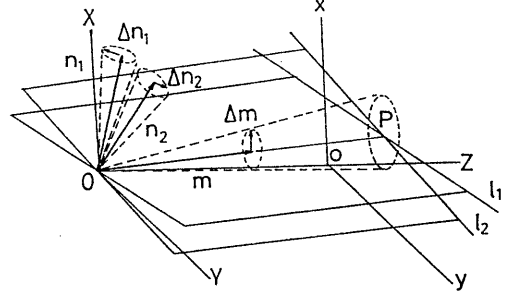


図5: 2直線の交点の誤差

れる。 □

次に2直線の交点について考える(図5)。2直線の N ベクトルが n_1, n_2 であるなら、交点の N ベクトルは式(3)で与えられる。 n_1, n_2 にノイズが加われば、計算される m もランダムに摂動する。公式は2点を通る直線の場合とまったく双対であるので、共分散行列 $V[m]$ は次のように計算される。

【命題3】 N ベクトルが n_1, n_2 の2直線が独立であり、それぞれの共分散行列が $V[n_1], V[n_2]$ であれば、それらの交点の N ベクトル m の共分散行列 $V[m]$ は次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{P_n (n_2 \times V[n_1] \times n_2 + n_1 \times V[n_2] \times n_1) P_n}{1 - (n_1, n_2)^2} \quad (31)$$

4 最適な最小二乗法

4.1 最適重みと最適推定

共通の直線上にある点を「共線」と言い、共通の交点で交わる直線を「共点」という。共点な直線の N ベクトルが $\{n_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ であり、それらの共通の交点の N ベクトルが m であれば、隣接条件 $(m, n_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \dots, N$ が成り立つ。データに誤差があるときは、次の最小二乗法でロバストに m を計算できる(図6)。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m, n_\alpha)^2 \rightarrow \min \quad (32)$$

ただし W_α は非負の重みである。重みは信頼性の高いデータには大きく、信頼性の低いデータには小さく与えなければならない。式(32)の左辺は次のように書ける。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m, n_\alpha)^2 = (m, \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha n_\alpha n_\alpha^T \right) m) \quad (33)$$

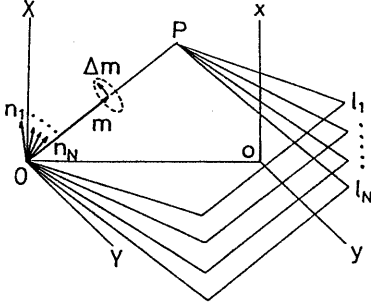


図 6: 直線の共通の交点の推定

この2次形式を最小にする単位ベクトル m は次の「モーメント行列」の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。

$$N = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} n_{\alpha} n_{\alpha}^T \quad (34)$$

内積 (m, n_{α}) は、誤差がなければすべて 0 である。 n_{α} が $n_{\alpha}' = n_{\alpha} + \Delta n_{\alpha}$ に摂動すれば、 $\epsilon_{\alpha} = (m, n_{\alpha}') = (m, \Delta n_{\alpha})$ は平均 0 の確率変数である。その分散は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^2 &= E[\epsilon_{\alpha}^2] = E[(m, \Delta n_{\alpha})^2] \\ &= m^T E[\Delta n_{\alpha} \Delta n_{\alpha}^T] m = (m, V[n_{\alpha}] m) \end{aligned} \quad (35)$$

各々のデータが独立で、その分布がガウス分布で近似できれば、 $\{\epsilon_{\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ の同時確率密度は次のように書ける。

$$\prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\alpha}} e^{-\epsilon_{\alpha}^2/2\sigma_{\alpha}^2} = \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\alpha}} e^{-\sum_{\beta=1}^N \epsilon_{\beta}^2/2\sigma_{\beta}^2} \quad (36)$$

この密度を最大にする m を推定することを考える（「最尤推定」）。これは次の最小化と同値である。

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon_{\alpha}^2}{\sigma_{\alpha}^2} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(m, \Delta n_{\alpha})^2}{(m, V[n_{\alpha}] m)} \rightarrow \min \quad (37)$$

式(32)と比較すると、重みを次のように選べばよいことがわかる。

$$W_{\alpha} = \frac{1}{(m, V[n_{\alpha}] m)} \quad (38)$$

これを「最適重み」と呼び、最適重みを用いた式(34)を「最適モーメント行列」と呼ぶ。信頼性の高いデータは小さい共分散行列をもち、したがって大きい重みが割り当てられ、信頼性の低いデータは大きい共分散行列をもち、したがって小さい重みが割り当てられることになる。

公式の双対性により、上の結果は共線な点に対する直線の当てはめに対してもそのまま成り立つ。すなわち、 N ベクトルが $\{m_{\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ の複数の点に当ては

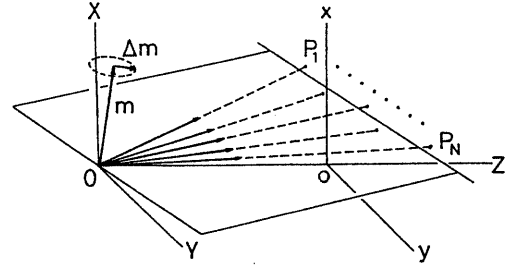


図 7: 点列への直線の当てはめ

めた直線の N ベクトル n は、次の最小二乗法によりロバストに計算できる(図7)。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (n, m_{\alpha})^2 \rightarrow \min \quad (39)$$

その解は次のモーメント行列の最小固有値に対する単位固有ベクトルによって与えられる。

$$M = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} m_{\alpha} m_{\alpha}^T \quad (40)$$

最尤推定の意味での最適重みは次のように与えられる。

$$W_{\alpha} = \frac{1}{(n, V[m_{\alpha}] n)} \quad (41)$$

式(38), (41)の最適重みはこれから計算したい N ベクトル m と n を含んでいる。これを避けるには式(38), (41)を $W_{\alpha} = 1/\text{tr}V[n_{\alpha}]$ および $W_{\alpha} = 1/\text{tr}V[m_{\alpha}]$ によって近似すればよい。このときも信頼性に応じた重みが与えられる。あるいは n と m の推定値、例えば定数重みを用いて計算した解を用いて最適重みを計算してもよい。必要ならばこれを反復してもよい。 n (または m) の推定値の誤差が $\|\Delta n\| \approx \nu$ (または $\|\Delta m\| \approx \mu$) であれば近似的な最適重みを用いて計算した解は $O(\nu^2)$ (または $O(\mu^2)$) の誤差を持つことを示すことができる(証明省略)。

4.2 最適推定の共分散行列

共点な直線の共通の交点の計算を考える。各々の直線の N ベクトルが摂動すれば、計算される N ベクトル m も摂動する。その共分散行列 $V[m]$ は、次のように与えられる。

【定理 1】 $\{m, u, v\}$ を、それぞれ固有値 0, λ_u, λ_v に対する最適モーメント行列 N の固有ベクトルの正規直交系とする。各々の直線が独立で $\lambda_u \neq 0, \lambda_v \neq 0$ なら、最適に推定した共通の交点の N ベクトルの共分散行列 $V[m]$ は次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{uu^T}{\lambda_u} + \frac{vv^T}{\lambda_v} \quad (42)$$

(証明) 各々の N ベクトルの振動 $n_\alpha \rightarrow n_\alpha + \Delta n_\alpha$ によって、式 (34) の最適モーメント行列 N には第 1 次近似において次の形の振動 ΔN が生じる。

$$\Delta N = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (\Delta n_\alpha n_\alpha^T + n_\alpha \Delta n_\alpha^T) \quad (43)$$

固有値問題の振動定理 [2] により、固有値 0 に対する N の単位固有ベクトル m は、次のように振動する。

$$\Delta m = \frac{(u, \Delta N m)}{0 - \lambda_u} u + \frac{(v, \Delta N m)}{0 - \lambda_v} v \quad (44)$$

式 (43) から隣接条件 $(n_\alpha, m) = 0$ に注意すれば、次の式を得る。

$$(u, \Delta N m) = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m, \Delta n_\alpha) (u, n_\alpha) \quad (45)$$

同様に $(v, \Delta N m) = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m, \Delta n_\alpha) (v, n_\alpha)$ である。したがって、

$$s_\alpha = \frac{(u, n_\alpha)}{\lambda_u} u + \frac{(v, n_\alpha)}{\lambda_v} v \quad (46)$$

と定義すると、式 (44) は次のように書ける。

$$\Delta m = - \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m, \Delta n_\alpha) s_\alpha \quad (47)$$

これから、共分散行列 $V[m]$ は

$$\begin{aligned} V[m] &= E[\Delta m \Delta m^T] \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^N W_\alpha W_\beta E[(m, \Delta n_\alpha) (m, \Delta n_\beta)] s_\alpha s_\beta^T \quad (48) \end{aligned}$$

となる。各 Δn_α は独立であるから、次式を得る。

$$\begin{aligned} E[(m, \Delta n_\alpha) (m, \Delta n_\beta)] &= m^T E[\Delta n_\alpha \Delta n_\beta^T] m \\ &= \delta_{\alpha\beta} (m, V[n_\alpha] m) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{W_\alpha} \quad (49) \end{aligned}$$

ここで式 (38) を用いた。 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタである。これを式 (48) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} V[m] &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha s_\alpha s_\alpha^T = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \left(\frac{u^T n_\alpha n_\alpha^T u}{\lambda_u^2} u u^T \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^T n_\alpha n_\alpha^T v}{\lambda_u \lambda_v} (u v^T + v u^T) + \frac{v^T n_\alpha n_\alpha^T v}{\lambda_v^2} v v^T \right) \\ &= \frac{(u, N u)}{\lambda_u^2} u u^T + \frac{(u, N v)}{\lambda_u \lambda_v} (u v^T + v u^T) \\ &\quad + \frac{(v, N v)}{\lambda_v^2} v v^T \quad (50) \end{aligned}$$

u と v は、それぞれ固有値 λ_u, λ_v に対する N の固有ベクトルであるから、 $N u = \lambda_u u$, $N v = \lambda_v v$ であり、 $(u, v) = 0$ に注意すると、式 (42) を得る。 \square

公式の双対性により、最適な直線当てはめに対しても同様の結果が成り立つ。

【定理 2】 $\{n, u, v\}$ をそれぞれ固有値 0, λ_u, λ_v に対する最適モーメント行列 M の固有ベクトルの正規直交系とする。各々の点が独立で $\lambda_u \neq 0, \lambda_v \neq 0$ なら、最適に当てはめた直線の N ベクトルの共分散行列 $V[n]$ は次のように与えられる。

$$V[n] = \frac{u u^T}{\lambda_u} + \frac{v v^T}{\lambda_v} \quad (51)$$

厳密に言うと、これらの結果は、誤差のないモーメント行列について成り立つ。しかし、 N 個の振動した N ベクトルから推定された共分散行列 $\hat{V}[m]$ (または $\hat{V}[n]$) は、真の共分散行列 $V[m]$ (または $V[n]$) とは、 $\|\Delta n_\alpha\| \approx \nu$ (または $\|\Delta m_\alpha\| \approx \mu$) に対して $O(\nu^3/N\sqrt{N})$ (または $O(\mu^3/N\sqrt{N})$) だけしか異なっていないことが導かれる (証明省略)。

4.3 最適推定の統計的偏り

誤差の期待値が 0 である推定値は、「統計的に不偏」であるといい、そうでなければ「統計的に偏っている」という。式 (44) の期待値は、 $E[\Delta m] = 0$ である。したがって最適推定は統計的に不偏であるように見える。しかし、これは式 (43) で 2 次の項を無視したためである。2 次の項を無視しなければ、モーメント行列 N の振動は

$$\Delta N = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (\Delta n_\alpha n_\alpha^T + n_\alpha \Delta n_\alpha^T + \Delta n_\alpha \Delta n_\alpha^T) \quad (52)$$

であり、その期待値は 0 ではない。

$$E[\Delta N] = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha E[\Delta n_\alpha \Delta n_\alpha^T] = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V[n_\alpha] \quad (53)$$

したがって、式 (44) の期待値は次のようになる。

$$E[\Delta m] = - \left(\frac{u u^T}{\lambda_u} + \frac{v v^T}{\lambda_v} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V[n_\alpha] \right) m \quad (54)$$

これと定理 1 を合わせると、次の結果を得る。

【定理 3】 各々の直線の共分散行列が $V[n_\alpha]$ であれば、最適に推定した交点の N ベクトル m は、次の統計的に偏差をもつ。

$$\Delta m = -V[m] \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V[n_\alpha] \right) m \quad (55)$$

【定理 4】 各々の点の共分散行列が $V[m_\alpha]$ であれば、最適に当てはめた直線の N ベクトル n は、次の統計的に偏差をもつ。

$$\Delta n = -V[n] \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V[m_\alpha] \right) n \quad (56)$$

この統計的偏差は2次の効果である。すなわち、 $\Delta n_\alpha \approx \nu$ のとき、誤差が $\sqrt{E[|\Delta m|^2]} = O(\nu)$ であるのに対して、偏差は $E[\Delta m] = O(\nu^2)$ である。同様に、 $\Delta m_\alpha \approx \mu$ のとき、誤差が $\sqrt{E[|\Delta n|^2]} = O(\mu)$ であるのに対して、偏差は $E[\Delta n] = O(\mu^2)$ である。したがって、この偏差は画像のノイズが著しく大きくない限り、極めて微小である。

式(53)より、次の「不偏推定法」を構成することができる。

【命題4】 共分散行列 $V[n_\alpha]$ をもつ N ベクトル $\{n_\alpha\}$ の直線の共通の交点の N ベクトル m の不偏推定値は、次の行列の最小固有値に対する単位固有ベクトルによって与えられる。

$$\hat{N} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (n_\alpha n_\alpha^T - V[n_\alpha]) \quad (57)$$

【命題5】 共分散行列 $V[m_\alpha]$ をもつ N ベクトル $\{m_\alpha\}$ の点に当てはめた直線の N ベクトル n の不偏推定値は、次の行列の最小固有値に対する単位固有ベクトルによって与えられる。

$$\hat{M} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha m_\alpha^T - V[m_\alpha]) \quad (58)$$

式(57), (58)の行列を「不偏モーメント行列」と呼ぶ。定義より、 N ベクトルの誤差が等方的なら、推定値は常に不偏であることがわかる。

【系3】 各 N ベクトルの誤差が等方的なら、最適に推定した交点と最適に当てはめた直線は統計的に不偏である。

(証明) Δn_α が n_α の周りに等方的に分布すれば、その共分散行列は次の形に書ける。

$$V[n_\alpha] = \frac{\sigma^2}{2} (I - n_\alpha n_\alpha^T), \quad \sigma^2 = E[|\Delta n_\alpha|^2] \quad (59)$$

したがって、不偏モーメント行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \left(n_\alpha n_\alpha^T - \frac{\sigma^2}{2} (I - n_\alpha n_\alpha^T) \right) \\ &= \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha n_\alpha n_\alpha^T \right) - \frac{\sigma^2}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \right) I \quad (60) \end{aligned}$$

これは $N = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha n_\alpha n_\alpha^T$ と同じ固有ベクトルをもつ。同様に \hat{M} と M は同じ固有ベクトルを持つ。□

特に、小画像近似を用いた最適な直線当てはめは統計的に不偏である。

5 まとめ

本論文では、コンピュータビジョンの基本となる幾何学的計算に含まれる誤差の統計的挙動の一般的な構造を調べた。まず画素データの N ベクトルの共分散行列を用いて画像のノイズを統計的にモデル化した。このモデルを用いて、直線の交点や2点を通る直線の N ベクトルの共分散行列を計算した。次に、交点推定や直線当てはめのための最小二乗法の最適重みを導出し、最適推定値の共分散行列を計算した。また、このような計算には統計的偏差が存在することも指摘し、不偏推定値の計算法を示した。具体的な応用および実験例については続編で述べる [11]。

参考文献

- [1] B. Brillault-O'Mahony, New Method for vanishing point detection, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 289-300.
- [2] 金谷健一, 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, (1990).
- [3] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin (1990).
- [4] K. Kanatani, Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 333-348.
- [5] K. Kanatani, Hypothesizing and testing geometric properties of image data, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 349-357.
- [6] 金谷・川島, 画像データの幾何学的構造の仮説検定, *情報処理学会論文誌*, 31-6 (1990), 879-886.
- [7] K. Kanatani and Y. Onodera, Anatomy of camera calibration using vanishing points, *IEICE Trans.*, E74-10 (1991), 3369-3378.
- [8] 金谷・浦沢, 消失点の推定とカメラキャリブレーションの統計的信頼性, *日本ロボット学会誌*, 9-7 (1991), 813-820.
- [9] 劉・金谷, コニックの3次元解釈とその応用, *情報処理学会研究報告*, 92-CV-76, 1992-01.
- [10] M. A. Snyder, The precision of 3-D parameters in correspondence based techniques: The case of uniform translation motion in a rigid environment, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11 (1989), 523-528.
- [11] 浦沢・金谷, 幾何学的計算の統計解析: II. エッジ、消失点、出現点, *情報処理学会研究報告*, 92-CV-78, 1992-05.
- [12] R. Weiss, H. Nakatani and E. M. Riseman, An error analysis for surface orientation from vanishing points, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12 (1990), 1179-1185.