

## コニックの計算論と直交性の3次元解釈

金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

コニックに関する基本的な計算手法を射影幾何学の立場から定式化し、「極点」、「極線」、「共役点对」などのコニックに関連する射影幾何学的概念を「計算過程」の観点から記述する。そして、空間中で互いに直交する3直線の3次元的配置をその投影画像から解釈する問題がコニックによる計算によって簡単に解けることを示す。これによって、従来の複雑な理論は不要となる。

## Computational Theory of Conics and 3-D Interpretation of Orthogonality

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science  
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Computational techniques involving conics are formulated in the framework of projective geometry, and conic-related notions of projective geometry such as “poles”, “polars”, and “conjugate pairs” are reformulated as “computational procedures”. It is shown that the 3-D geometry of three orthogonal lines in the scene can be interpreted from their projections by computing conics. As a result, all existing theories, which are very complicated, become unnecessary.

## 1 序論

「コニック」（「円錐曲線」）は直線に次ぐ重要な画像特徴である。ひとつには、これが最低次数の代数曲線であるため取扱いが簡単で、多くの曲線をコニックで近似することができるためでもあるが、より重要なのは、多くの工業製品には円形や球状の部分があり、円や球は画像上に楕円として投影されるという事実である。「透視変換」は「射影変換」の特別な場合であるが、コニックは射影変換に関して「不変」である（すなわちコニックは必ずコニックに写像される）。また、コニックの投影像からその3次元的配置を解析的に計算することもできる [14]。これを利用して、コニックの射影不変性に着目したビジョンシステムも試みられている [3]。そのような応用で必要となる、画像データへのコニックの当てはめの手法とその信頼性についても詳しく調べられている [2, 4, 15, 16, 17]。

コニックは射影幾何学の中心テーマであるから、その数学的性質はどの射影幾何学の教科書にも書かれている。しかし、数学としての射影幾何学は、公理に基づく抽象的論理の一貫性を追及するものであるため、画像解析への応用との間には著しい隔りがある。逆の言い方をすれば、「計算上の問題」を無視していればこそ、純粋数学としての地位が確立されているともいえる。したがって、射影幾何学を画像解析に応用しようとするならば、射影幾何学を「計算過程」の観点から再構成する必要がある。

筆者はこれを「計算射影幾何学」と呼び [8, 9]、射影幾何学の基本概念に計算過程としての定式化を与え、画像データの幾何学的構造の仮説検定 [11, 10] やカメラキャリブレーション [12, 13] に適用している。本論文はこれをさらにコニックに拡張し、「極点」、「極線」、「共役点対」などのコニックに関連する射影幾何学的概念を計算過程の観点から記述する。そして、応用として空間中で互いに直交する3直線の3次元的配置をその投影画像から解釈する問題を考える。

建造物や工業製品は互いに直交する辺を多数もっている。このため、画像による3次元直交性の解釈はコンピュータビジョンの重要な問題であり、多くの研究者によってさまざまな解法が提案された [1, 5, 6, 7, 18, 19, 20]。しかし、それらは反復や探索を要したり、あるいは解析解の場合も三角関数や逆三角関数による画像データの代数的変換を含んだ複雑なものであった。本論文ではこれがコニックによる単純な計算によって驚くほど簡単に解けることを示

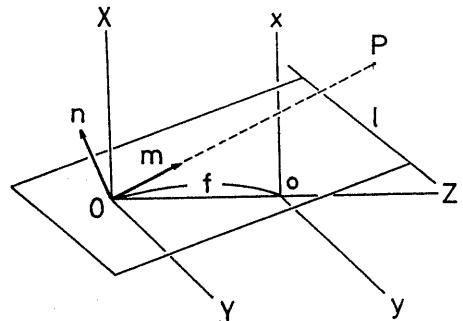


図1: カメラモデルとNベクトル

す。これによって、従来の複雑な理論はまったく不要となる。この射影幾何学的推論の威力は注目すべき事実である。

## 2 透視変換とNベクトル

次のようなカメラモデルを考える。レンズの中心を原点  $O$  とし、光軸を  $Z$  軸とする  $XYZ$  座標系をとり、平面  $Z = f$  を画像面とする (図1)。座標原点  $O$  を「視点」と呼ぶ。定数  $f$  はカメラの撮像面とレンズの中心との距離であり、「焦点距離」と呼ぶ。画像面上に光軸に対応する点を原点  $o$  とし、 $X, Y$  軸に平行な  $x, y$  画像座標軸をとる。

画像面上の点  $(x, y)$  は、視点  $O$  とその点を通る視線の方向を表す単位ベクトル  $m$  で指定できる。画像面上の直線  $Ax + By + C = 0$  は、視点  $O$  とその直線を通る平面の単位法線ベクトル  $n$  で指定できる (図1)。そのような単位ベクトル  $m, n$  を「Nベクトル」と呼ぶ [8, 9]。成分で表せば

$$m = \pm N \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \right], \quad n = \pm N \left[ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C/f \end{pmatrix} \right] \quad (1)$$

となる。ただし  $N[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表す。

形式的に  $X, Y$  成分が0の単位ベクトルは「無限遠点」、 $\pm(0, 0, 1)^T$  は「無限遠直線」を表すNベクトルとみなすと、Nベクトルは画像面を「射影空間」とみなしたときの「同次座標」を単位ベクトルに正規化したものにほかならない。Nベクトルの符号は任意である。

点  $P$  のNベクトルを  $m$ 、直線  $l$  のNベクトルを  $n$  とすると、図1からわかるように、点  $P$  が直線  $l$  の上にある、あるいは直線  $l$  が点  $P$  を通る条件

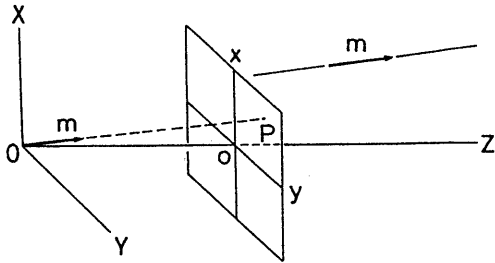


図 2: 直線の消失点

(「隣接条件」)は

$$(m, n) = 0 \quad (2)$$

である。ただし  $(\cdot, \cdot)$  はベクトルの内積を表す。このことから、Nベクトルが  $n_1, n_2$  の2直線  $l_1, l_2$  の交点のNベクトル  $m$  は隣接条件  $(m, n_1) = 0, (m, n_2) = 0$  より

$$m = \pm N[n_1 \times n_2] \quad (3)$$

で与えられる。また、Nベクトルが  $n_1, n_2$  の2点  $P_1, P_2$  を通る直線  $l$  のNベクトル  $n$  は隣接条件  $(m_1, n) = 0, (m_2, n) = 0$  より

$$n = \pm N[m_1 \times m_2] \quad (4)$$

で与えられる。式(3), (4)が同じ形をしているのは、射影幾何学における点と直線の相対性を反映したものである。

よく知られているように、空間中で平行な直線は画像上に投影すると「消失点」と呼ばれる一点で交わる。図2から次のことがわかる。

**【定理 1】** 単位ベクトル  $m$  の方向をもつ直線を画像上に投影すると、Nベクトル  $\pm m$  の消失点をもつ。

また、空間中の平行な平面は画像上に投影すると、「消失線」と呼ばれる一直線を共有する。図3から次のことが直ちにわかる。

**【定理 2】** 単位法線ベクトル  $n$  をもつ平面を画像上に投影すると、Nベクトル  $\pm n$  の消失線をもつ。

すなわち、消失点と消失線のNベクトルがそのまま対応する空間中の直線の3次元方向および単位法線ベクトルになっている。

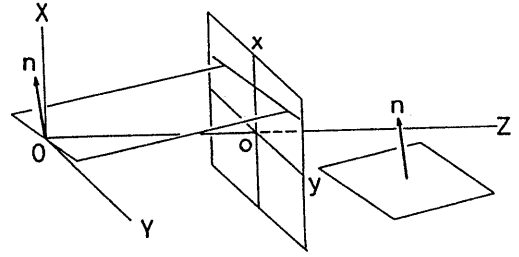


図 3: 平面の消失線

### 3 コニックの基本的性質

「コニック」(「円錐曲線」)とは次の形の2次曲線のことである。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (5)$$

これは式(1)のNベクトル  $m$  を用いると、次のように書き直せる。

$$(m, Qm) = 0 \quad (6)$$

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & F/f^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

逆に任意の対称行列  $Q$  に対して式(6)はコニックを表す。以下、対称行列  $Q$  が式(6)の形に表すコニックを単に「コニック  $Q$ 」と呼ぶ。定義より  $Q$  を定数倍しても同じコニックを表す。

コニックについては、次のことが知られている(証明省略)。コニックはそれが(実または虚の)2直線または縮退した1直線を表すとき「特異」であるといい、そうでないとき「正則」であるという。コニック  $Q$  が正則である必要十分条件は  $Q$  が正則行列であること、すなわち  $\det Q \neq 0$  である。正則なコニックが「実コニック」(楕円、放物線、双曲線)を表す必要十分条件は  $Q$  が符号(2,1)または(1,2)(すなわち1個の固有値が他の固有値と反対符号)をもつことである。 $\det Q < 0$  となるように  $Q$  の符号を選べば、式(7)のコニックは  $AC - B^2 = 0$  のとき放物線、 $AC - B^2 < 0$  のとき双曲線、 $AC - B^2 > 0$  のとき  $A + C > 0$  なら楕円、 $A + C < 0$  なら空集合を表す。

### 4 コニックの極変換

正則実コニック  $Q$  を考える。点  $P$  のNベクトルが  $m$  であるとき、Nベクトルが  $n = \pm N[Qm]$  の直線をコニック  $Q$  に関する点  $P$  の「極線」とい

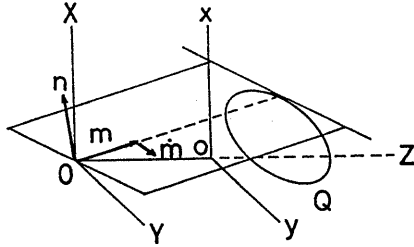


図4: コニック  $Q$  への接線のNベクトル  $n$

い、直線  $l$  のNベクトルが  $n$  であるとき、Nベクトルが  $m = \pm N[Q^{-1}n]$  の点をコニック  $Q$  に関する直線  $l$  の「極点」という。以下、考えているコニック  $Q$  が明らかなき、「コニック  $Q$  に関する」というただし書きを省略する。

コニックの極点と極線に対して次のことが知られている。ここではNベクトルによる証明をつける。

【命題1】コニック  $Q$  上の点  $P$  の極線は  $Q$  の  $P$  における接線である。

(証明) コニック  $Q$  を  $s$  でパラメータ化して、その上の点を  $P(s)$ 、そのNベクトルを  $m(s)$  とする。定義式  $(m, Qm) = 0$  を  $s$  で微分すると  $(\dot{m}, Qm) + (m, Q\dot{m}) = 0$  となる。ただし、ドットは  $s$  に関する微分を表す。 $Q$  は対称行列であるから  $(m, Q\dot{m}) = (Qm, \dot{m})$  であり、したがって  $2(\dot{m}, Qm) = 0$  である。点  $P$  の極線のNベクトルは  $n = \pm N[Qm]$  であるから

$$(\dot{m}, n) = 0 \quad (8)$$

である。点  $P$  はコニック  $Q$  上にあるから  $(m, Qm) = 0$  であり、

$$(m, n) = 0 \quad (9)$$

である。ゆえに  $n$  は  $\dot{m}$  と  $m$  の両方に直交する。これは  $n$  が、視点と  $P$  における  $Q$  の接線とを通る平面の単位法線ベクトルであることを意味している(図4)。すなわち、 $n$  は  $Q$  の  $P$  における接線のNベクトルである。□

【系1】直線  $l$  がコニック  $Q$  に接する必要十分条件は、その極点がコニック  $Q$  の上にあることである。

楕円の内部の点の極線は楕円の外部にあり、楕円と(実の)交点をもたない。一方、楕円の外部の点の極線は楕円と2点で交わる。これを一般のコニック  $Q$  に拡張して、点  $P$  はその極線が  $Q$  と(実の)

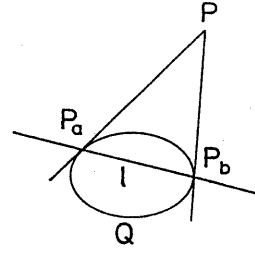


図5: 点の極線はその点からのコニックへの接線の接点を通る

交点をもたないとき「外部」にあるといい、その極線が  $Q$  と2点で交わる時「内部」にあるという。

【命題2】点  $P$  がコニック  $Q$  の外部にあるとき、点  $P$  からコニック  $Q$  へ引いた接線の接点を  $P_1, P_2$  とすれば、点  $P$  の極線は2点  $P_1, P_2$  を通る。

(証明) 接点  $P_1, P_2$  のNベクトルをそれぞれ  $m_1, m_2$  とする。直線  $P_1P$  および  $P_2P$  はそれぞれ点  $P_1$  および  $P_2$  の極線であるから(命題1)、それらのNベクトルはそれぞれ  $\pm N[Qm_1]$  および  $\pm N[Qm_2]$  である。点  $P$  はそれらの交点であるから、そのNベクトル  $m$  は式(3)より

$$m = \pm N[Qm_1 \times Qm_2] \quad (10)$$

である。したがって、点  $P$  の極線  $l$  のNベクトルは

$$\begin{aligned} n &= \pm N[Qm] = \pm N[Q(Qm_1 \times Qm_2)] \\ &= \pm \gamma Q(Qm_1 \times Qm_2) \end{aligned} \quad (11)$$

である。ただし  $\gamma = 1/\|Q(Qm_1 \times Qm_2)\|$  である。これから、次のことがわかる。

$$\begin{aligned} (m_1, n) &= \pm \gamma (m_1, Q(Qm_1 \times Qm_2)) \\ &= \pm \gamma (Qm_1, Qm_1 \times Qm_2) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

これは点  $P_1$  が  $l$  上にあるという隣接条件である(式(2)参照)。同様に点  $P_2$  も  $l$  上にある。ゆえに、点  $P$  の極線  $l$  は直線  $P_1P_2$  と一致する(図5)。□

点  $P_u$  が点  $P_v$  の極線の上であり、点  $P_v$  が点  $P_u$  の極線にあるとき、2点  $P_u, P_v$  は互いに「共役」であるという。点  $P_u, P_v$  のNベクトルがそれぞれ  $u, v$  であれば、極線の定義と隣接条件(2)より、2点  $P_u, P_v$  が互いに共役である必要十分条件は

$$(u, Qv) = 0 \quad (13)$$

である。これと双対に、直線  $l_s$  が直線  $l_t$  の極点を通り、直線  $l_t$  が直線  $l_s$  の極点を通るとき、2直線  $l_s, l_t$  は互いに「共役」である。直線  $l_s, l_t$  の  $N$ ベクトルがそれぞれ  $s, t$  であれば、極点の定義と隣接条件 (2) より、2直線  $l_u, l_v$  が互いに共役である必要十分条件は

$$(s, Q^{-1}t) = 0 \quad (14)$$

である。

【命題 3】  $N$ ベクトルが  $n$  の直線  $l$  の上の点  $P_u$  の  $N$ ベクトルが  $u$  であるとき、直線  $l$  上のこれと共役な点  $P_v$  の  $N$ ベクトルは

$$v = \pm N[n \times Qu] \quad (15)$$

である。

(証明) 直線  $l$  上の点  $P_u$  の共役点  $P_v$  は点  $P_u$  の極線と直線  $l$  との交点である。点  $P_u$  の極線の  $N$ ベクトルは  $\pm N[Qu]$  であるから、式 (3) より、交点  $P_v$  の  $N$ ベクトルは式 (15) で与えられる。□

【命題 4】  $N$ ベクトルが  $m$  の点  $P$  を通る直線  $l_s$  の  $N$ ベクトルが  $s$  であるとき、点  $P$  を通るこれと共役な直線  $l_t$  の  $N$ ベクトルは

$$t = \pm N[m \times Q^{-1}s] \quad (16)$$

である。

(証明) 点  $P$  を通る直線  $l_s$  の共役直線  $l_t$  は直線  $l_s$  の極点と点  $P$  とを通る直線である。直線  $l_s$  の極点の  $N$ ベクトルは  $\pm N[Q^{-1}s]$  であるから、式 (4) より、直線  $l_t$  の  $N$ ベクトルは式 (16) で与えられる。□

## 5 コニックと直線との交点

前節に述べた共役点対の性質を用いると、直線とコニックとの交点の計算が次のように簡単化される。

【命題 5】 点  $P_u, P_v$  を直線  $l$  上の共役点対とする。点  $P_u, P_v$  の  $N$ ベクトルがそれぞれ  $u, v$  であるとき、直線  $l$  とコニック  $Q$  が 2点で交われば、その交点の  $N$ ベクトル  $m_1, m_2$  は次のように与えられる。

$$m_{1,2} = \pm N[\sqrt{|(v, Qv)|}u \pm \sqrt{|(u, Qu)|}v] \quad (17)$$

ただし、二つの複号は独立である。

(証明) 点  $P_u, P_v$  は直線  $l$  上にあるから、直線  $l$  上の任意の点の  $N$ ベクトルは適当な実数  $a, b$  により

$$m = au + bv \quad (18)$$

と表される。この点がコニック  $Q$  の上にある必要十分条件は  $(m, Qm) = 0$ 。点  $P_u, P_v$  は互いに共役であり、したがって式 (13) より  $(u, Qv) = 0$ 。ゆえに

$$(m, Qm) = a^2(u, Qu) + b^2(v, Qv) = 0 \quad (19)$$

したがって

$$\frac{a}{b} = \pm \sqrt{-\frac{(v, Qv)}{(u, Qu)}}, \quad (20)$$

であり、 $m$  は単位ベクトルであるから式 (17) が得られる。□

【系 2】 点  $P_u, P_v$  を直線  $l$  上の共役点対とする。点  $P_u, P_v$  の  $N$ ベクトルがそれぞれ  $u, v$  であるとき、直線  $l$  とコニック  $Q$  が (実の) 交点をもつ必要十分条件は

$$(u, Qu)(v, Qv) \leq 0. \quad (21)$$

【系 3】 点  $P_u, P_v$  が直線  $l$  上の共役点対であり、直線  $l$  がコニック  $Q$  と (実の) 2交点をもつとき、 $P_u, P_v$  の一方は  $Q$  の内部にあり、他方は  $Q$  の外部にある。

(証明) コニック  $Q$  の方程式は  $(m, Qm) = 0$  である。点  $P_u, P_v$  の  $N$ ベクトルをそれぞれ  $u, v$  とすると、系 2 より  $(u, Qu), (v, Qv)$  は異なる符号をもつから、互いに  $Q$  の反対側にある。□

直線  $l$  が与えられたとき、その上の共役点対  $\{P_u, P_v\}$  の選び方は任意である。しかし、実際の計算で最も便利なのは、 $P_u$  を「無限遠点」に選ぶことである。直線  $l$  の  $N$ ベクトルを  $n$  とすると、 $l$  の無限遠点は  $l$  と「無限遠直線」との交点であり、無限遠直線の  $N$ ベクトルは  $k = (0, 0, 1)^T$  であるから、無限遠点の  $N$ ベクトルは  $\pm N[n \times k]$  である。

このことから、コニック  $Q$  と直線  $l$  の  $N$ ベクトル  $n$  が与えられたとき、 $Q$  と  $l$  の交点の  $N$ ベクトルを計算する手順が次のように与えられる。ただし  $k = (0, 0, 1)^T$  である。

procedure *intersection*( $Q, n$ )

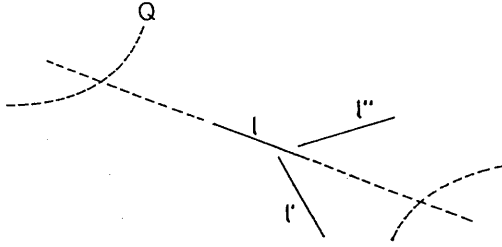


図 6: 直交性の 3 次元解釈

1. ベクトル  $u = N[n \times k]$  を計算する。
2. ベクトル  $v = N[n \times Qu]$  を計算する。
3. もし  $(u, Qu)(v, Qv) > 0$  であれば、(実の) 交点は存在しない。そうでなければ
4.  $m_{1,2} = N[\sqrt{|(v, Qv)|}u \pm \sqrt{|(u, Qu)|}v]$  を返す。

## 6 直交性の 3 次元解釈

以上で準備が整ったので、いよいよ直交性の 3 次元解釈の問題を論じ、従来の複雑な理論がすべて不要になることを示す。

空間中で互いに直交する 3 直線を考える。これらは 1 点で交わっている必要はなく、位置は任意でよい (図 6)。これらの「3 次元解釈」とは、画像上にそれらの投影像  $l, l', l''$  が与えられたとき、おのおのの 3 次元方向を計算する問題をいう。空間中の直線の 3 次元方向はその画像上での消失点の N ベクトルに等しいから (定理 1)、これは 3 直線の消失点を計算することに帰着する。

【定理 3】 空間中で直交する 3 直線の投影像  $l, l', l''$  の N ベクトルをそれぞれ  $n, n', n''$  とすると、 $l$  の消失点は  $l$  とコニック

$$Q = (n', n'')I - \frac{1}{2}(n'n''^T + n''n'^T) \quad (22)$$

との交点である。

(証明) 直線  $l, l', l''$  のそれぞれの消失点の N ベクトルを  $n, n', n''$  とする。消失点はそれぞれの直線 (またはその延長) 上にあるから、それぞれの隣接条件 (式 (2) 参照)

$$(m, n) = 0, \quad (m', n') = 0, \quad (m'', n'') = 0 \quad (23)$$

が成立する。 $m, m', m''$  は各直線の 3 次元方向でもあり (定理 1)、それらは互いに直交するから

$$(m, m') = 0, \quad (m, m'') = 0, \quad (m', m'') = 0 \quad (24)$$

が成立する。ゆえに  $m'$  は  $n', m$  の両方に直交する単位ベクトルであり、 $m''$  は  $n'', m$  の両方に直交する単位ベクトルである。したがって

$$m' = \pm N[n' \times m] = \pm \gamma' n' \times m \quad (25)$$

$$m'' = \pm N[n'' \times m] = \pm \gamma'' n'' \times m \quad (26)$$

ただし  $\gamma' = 1/\|n' \times m\|$ ,  $\gamma'' = 1/\|n'' \times m\|$ 。  $m', m''$  は互いに直交するから

$$\begin{aligned} (m', m'') &= \pm \gamma' \gamma'' (n' \times m, n'' \times m) \\ &= \pm \gamma' \gamma'' ((n', n'')(m, m) - (n', m)(m, n'')) \\ &= \pm \gamma' \gamma'' (m, ((n', n'')I - \frac{1}{2}(n'n''^T + n''n'^T))m) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

が成り立つ。これは  $Q$  を式 (22) で定義すれば  $(m, Qm) = 0$  であることを意味する。 □

この定理より、3 直線  $l, l', l''$  の N ベクトル  $m, m', m''$  からそれぞれの 3 次元方向  $n, n', n''$  を計算する手続きが次のように得られる。

### procedure orthogonal( $n, n', n''$ )

1. 前節の  $intersection(Q, n)$  により、N ベクトル  $n$  の直線  $l$  がコニック  $Q = (n', n'')I - (n'n''^T + n''n'^T)/2$  と (実の) 交点をもつか判定する。
2. もし (実の) 交点が存在しなければ、 $l, l', l''$  は直交する 3 直線ではありえない。存在すれば同じく  $intersection(Q, n)$  によって、一つ交点の N ベクトル  $m$  を計算する。
3.  $m' = N[n' \times m]$ ,  $m'' = N[n'' \times m]$  を計算する。
4.  $\{m, m', m''\}$  を返す。

直線  $l$  とコニック  $Q$  は高々 2 個の (実の) 交点をもつので、この手続きにより、従来から知られているように [1, 5, 6, 7, 18, 19, 20]、高々 2 個の 3 次元解釈が得られる。これは 3 直線のどれについても、どちらの端のほうが見点に近づく、あるいは遠ざかるように延びているかわからないためである。どれかの直線でこれが与えられれば、解は一意的である。

## 7 まとめ

本論文ではコニックに関する性質を「計算過程」の観点から再構成し、筆者が「計算射影幾何学」と呼ぶNベクトルによる定式化を与えた。そして、これを直交性の3次元解釈に適用し、解が容易に求まることを示した。

画像座標に基づく従来の解析[1, 5, 6, 7, 18, 19, 20]では、直線の交点や2点を通る直線を計算するには連立1次方程式を解く必要があり、直線とコニックの交点を計算するには2次方程式を解く必要があり、直交性の3次元解釈の計算には三角関数、逆三角関数を含んだ非線形方程式を解く必要があった。それが計算射影幾何学によれば、Nベクトルによるごく単純な代数演算のみで解ける。

もちろん本質的には等価な計算を行なっているのであるが、従来の複雑な計算部分が「極点」、「極線」、「共役点対」、「無限遠点」、「無限遠直線」などの射影幾何学的諸概念の定義およびそれらの諸性質の中に吸収されて、表面に出ないのである。比喩的にいえば、従来の理論が「アセンブリ言語」的に書かれていたのに対して、本論文では計算射影幾何学という「高級言語」を定義したために、それを用いれば簡潔に記述できるのである。このような抽象化こそが数理的、理論的研究のめざすべき方向であると思われる。

## 参考文献

- [1] S. T. Barnard, Choosing a basis for perceptual space, *Comput. Vision Gr. Image Process.*, **29** (1985), 1233-1251.
- [2] F. L. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Gr. Image Process.*, **9** (1979), 56-71.
- [3] D. Forsyth, J. L. Mundy, A. Zisserman, C. Coelho, A. Heller and C. Rothwell Invariant descriptors for 3-D object recognition and pose, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **13** (1991), 971-991.
- [4] 岩崎利夫, 金谷健一, コニックあてはめの統計的偏差と不偏推定法, 情報処理学会研究報告 92-CV-77, 1992-03.
- [5] T. Kanade, Recovery of three-dimensional shape of an object from a single view, *Artif. Intell.*, **17** (1981), 409-461.
- [6] K. Kanatani, Constraints on length and angle, *Comput. Vision Gr. Image Process.*, **41** (1988), 28-42.
- [7] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990.
- [8] 金谷健一, 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [9] K. Kanatani, Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding*, **54** (1991), 333-348.
- [10] K. Kanatani, Hypothesizing and testing geometric properties of image data, *CVGIP: Image Understanding*, **54** (1991), 349-357.
- [11] 金谷健一, 川島 孝夫, 画像データの幾何学的構造の仮説検定, 情報処理学会論文誌, **31-6** (1990), 879-886.
- [12] K. Kanatani and Y. Onodera, Anatomy of camera calibration using vanishing points, *IEICE Trans.*, **74-10** (1991), 3369-3378.
- [13] 金谷健一, 浦沢康二, 消失点の推定と点距離のキャリブレーションの統計的信頼性, 日本ロボット学会誌, **9-7** (1991), 813-820.
- [14] 劉武, 金谷健一, コニックの3次元解釈とその応用, 情報処理学会研究報告 92-CV-76, 1992-01.
- [15] J. Porrill, Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter, *Image Vision Comput.*, **8** (1990), 37-41.
- [16] R. Safaei-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib and K. C. Smith, Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images, *CVGIP: Image Understanding*, **54** (1991), 259-274.
- [17] P. D. Sampson, Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Comput. Gr. Image Process.*, **18** (1982), 97-108.
- [18] 尺長健, 金子博, 透視角度変換 — 角度情報からの形状情報復元 —, 電子情報通信学会論文誌 D, **J70D-10** (1987), 1931-1940.

[19] 尺長健, 金子 博, 単眼視画像による 3 面頂点の配置推定 — 代数解と法線像仮説検定法 —, 電子情報通信学会論文誌 D, J71D-9 (1988), 1669–1681.

[20] T. Shakunaga and H. Kaneko, Perspective angle transform: Principle of shape from angle, *Int. J. Comput. Vision*, **3** (1989), 239–254.