

幾何学的計算の統計解析:

II. エッジ、消失点、出現点

浦沢 康二 金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

本論文では、コンピュータビジョンの基礎となる画像データの幾何学的計算の誤差の統計的挙動に関する前論文の一般論に基づいて、エッジ当てはめ、および消失点と出現点の計算の信頼性を具体的に解析する。そして、それらの計算に含まれる「統計的偏差」の挙動を解析的に記述する。また、前論文で導いた「不偏推定法」を用いて乱数シミュレーションを行い、理論を確認する。最後に、画像の精度が未知の場合に、これを推定しながら適応的に解の精度を上げる「くりこみ法」を提案し、数値実験によりその効果を観察する。

Statistical Analysis of Geometric Computation:

Part2. Edges, Vanishing Points, and Focuses of Expansion

Kouji Urasawa and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Using the general theory of statistical behaviors of errors involved in fundamental geometric computations presented in our previous paper, we analyze the reliability of edge fitting and computation of vanishing points and focuses of expansion. We also study "statistical biases" involved in such computations. Using the "unbiased estimation" scheme presented in our previous paper, we conduct random number simulations to confirm our analysis. Finally, we propose a new method called "renormalization" to adaptively improve the accuracy of the solution when the statistical behaviors of image noise are unknown, and observe its effectiveness by random number simulations.

謝辞 本研究に関する有益な討論を頂いた英国オックスフォード大学の M. Brady 教授、A. Blake 博士、A. Zisserman 博士、および英国 GEC の S. Maybank 博士に感謝します。

1 はじめに

前論文 [11] では画像データの「N ベクトル」の共分散行列によって画像のノイズを統計的にモデル化し、直線の交点や2点を通る直線の N ベクトルの共分散行列を計算した。そして、交点推定や直線当てはめのための最小二乗法の「最適重み」を導出し、最適推定値の共分散行列を計算した。本論文では、これらの結果をエッジ当てはめ、および消失点と出現点の計算に適用して、計算の信頼性を具体的に解析する。そして、前論文 [11] で指摘した最適化の計算に含まれる「統計的偏差」の挙動を解析的に記述する。また、前論文 [11] に示した「不偏推定法」を用いて乱数シミュレーションを行ない、理論を確認する。最後に、画像の精度が未知の場合に、これを推定しながら適応的に解の精度を上げる「くりこみ法」を提案し、数値実験によりその効果を観察する。

消失点の統計的推定は Weiss [12], Collins and Weiss [2], 金谷ら [6, 7] によって議論されている。しかし、その基礎となる統計的モデルは発見的であり、数学的な基礎に欠けていた。Brillault-O'Mahony [1] は直線セグメントの統計的モデルに基づく消失点推定の詳細な解析を提案している。出現点と並進運動の誤差は Snyder [10] が詳しく解析している。本論文の解析は Brillault-O'Mahony [1] の解析に似ているが、より一般的であり、カメラキャリブレーションなどの多くの問題に通用できる [8, 9]。

以下、本論文では前論文 [11] の N ベクトルによる定式化およびそこで導入した記号をそのまま用いる。

2 エッジ当てはめの誤差

共線な点の密な列を「エッジセグメント」と呼び、各々の点を「エッジ点」と呼ぶ。 $\{m_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ をこの順に各エッジ点の N ベクトルとする。符号はそれらが画像面に向かうように選ぶ。 m_1, m_N のなす角度 Ω をエッジセグメントの「視差」と呼ぶ。ベクトル u, m_G を次のように定義する。

$$u = \pm N[m_1 - m_N], \quad m_G = \pm N[m_1 + m_N] \quad (1)$$

u をそのエッジセグメントの「方向ベクトル」と呼び、N ベクトルが m_G である点 G をエッジセグメントの「中心点」と呼ぶ (図 1)。各隣りあうエッジ点がすべて同じ視差を持つなら、次のように書ける。

$$m_\alpha = u \sin \phi_\alpha + m_G \cos \phi_\alpha, \quad \phi_\alpha = \frac{\Omega}{N}(\alpha - \frac{N}{2}) \quad (2)$$

前論文 [11] で示したように、このエッジ点に最適に当てはめた直線の N ベクトル n は「モーメント行列」

$$M = \sum_{\alpha=0}^N W_\alpha m_\alpha m_\alpha^T \quad (3)$$

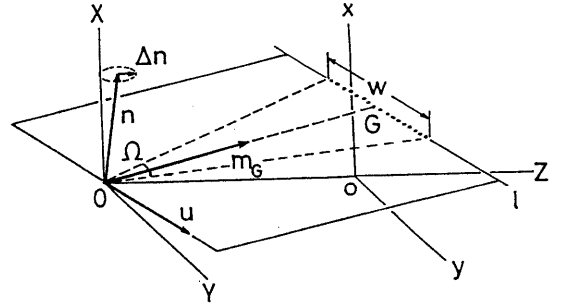


図 1: エッジセグメントへの直線当てはめ

の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。そして重み W_α は

$$W_\alpha = \frac{1}{(n, V[m_\alpha]n)} \quad (4)$$

とするのが最尤推定の意味で最適である。ただし $V[m_\alpha]$ は N ベクトル m_α の「共分散行列」である [9]。

各エッジ点の誤差挙動は独立であると仮定する。エッジセグメントが短く、画像面の中心付近にあれば、前論文 [11] で導入した「小画像近似」 $V[m_\alpha] = \bar{\epsilon}^2(I - m_\alpha m_\alpha^T)/2$ を適用することができる。ただし $\bar{\epsilon} = \epsilon/f$ であり、 ϵ (単位は画素) は画像上の各エッジ点検出の誤差の標準偏差 (「画像精度」) である。このとき、式 (4) の最適な重みは次のようになる。

$$W_\alpha = \frac{2}{\bar{\epsilon}^2(1 - (n, m_\alpha))} = \frac{2}{\bar{\epsilon}^2} \quad (5)$$

したがって、式 (3) の最適なモーメント行列は次のように書ける。

$$M = \frac{2}{\bar{\epsilon}^2} \left(\sum_{\alpha=0}^N \sin^2 \phi_\alpha u u^T + \sum_{\alpha=0}^N \cos \phi_\alpha \sin \phi_\alpha (u m_G^T + m_G u^T) + \sum_{\alpha=0}^N \cos^2 \phi_\alpha m_G m_G^T \right) \quad (6)$$

エッジ点が密であれば、総和は次のように積分で近似できる。

$$\sum_{\alpha=0}^N \sin^2 \phi_\alpha \approx \frac{N}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \sin^2 \phi d\phi = \frac{N}{2} (1 - \text{sinc} \Omega) \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha=0}^N \sin \phi_\alpha \cos \phi_\alpha \approx \frac{N}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{\alpha=0}^N \cos^2 \phi_\alpha \approx \frac{N}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{N}{2} (1 + \text{sinc} \Omega) \quad (9)$$

ただし $\text{sinc} x = (\sin x)/x$ である。これらを式 (6) に代入すれば

$$M = \frac{N}{\bar{\epsilon}^2} ((1 - \text{sinc} \Omega) u u^T + (1 + \text{sinc} \Omega) m_G m_G^T) \quad (10)$$

となる。これは $\{u, m_G, n\}$ がモーメント行列 M の固有ベクトルの正規直交系であり、対応する固有値が $N(1 - \text{sinc}\Omega)/\epsilon^2$, $N(1 + \text{sinc}\Omega)/\epsilon^2$, 0 であることを示している（「スペクトル分解」[3]）。したがって、前論文[11]の定理1より、最適に当てはめた直線の共分散行列 $V[n]$ が次のように与えられる。

$$V[n] = \frac{\epsilon^2}{N} \left(\frac{uu^T}{1 - \text{sinc}\Omega} + \frac{m_G m_G^T}{1 + \text{sinc}\Omega} \right) \quad (11)$$

エッジセグメントの長さを w (単位は画素) とすると、視差は $\Omega \approx w/f$ である。 γ を「エッジ密度」（単位画素長さあたりのエッジ点の個数）とすると、長さ w のエッジセグメントに含まれるエッジ点の個数は $N = \gamma w$ である。 w が f に比べて小さければ、視差 Ω も小さい。このとき $\text{sinc}\Omega \approx 1 - \Omega^2/6 + \dots$ であるから、次の近似が得られる。

$$1 - \text{sinc}\Omega \approx \frac{\Omega^2}{6} \approx \frac{w^2}{6f^2}, \quad 1 + \text{sinc}\Omega \approx 2 - \frac{\Omega^2}{6} \approx 2 \quad (12)$$

したがって、式(11)の共分散行列 $V[n]$ は次のように近似できる。

$$V[n] \approx \frac{6\kappa}{w^3} uu^T + \frac{\kappa}{2f^2 w} m_G m_G^T, \quad \kappa = \frac{\epsilon^2}{\gamma} \quad (13)$$

エッジ点が密で、各エッジ点の精度が高ければ、定数 κ は小さい。これを「解像度定数」と呼ぶ。これは画像の内容とは無関係な画像定数である¹。

エッジセグメントの長さ w が焦点距離 f に比べて非常に小さければ、式(13)の右辺は第1項が支配的であり、式(13)はさらに次の式で近似できる。

$$V[n] \approx \frac{6\kappa}{w^3} uu^T \quad (14)$$

これから次のことがわかる。

- 最適に当てはめた直線の N ベクトル n の誤差は、当てはめた直線方向ベクトル u の方向に最も生じやすい。
- 最適に当てはめた直線の誤差は、解像度定数 κ については $\kappa^{1/2}$ にほぼ比例する（したがって画素精度 ϵ に比例し、エッジ密度 γ については $\gamma^{-1/2}$ に比例する）。
- 最適に当てはめた直線の誤差は、エッジセグメントの長さ w については $w^{-3/2}$ にほぼ比例する。

前論文[11]で指摘したように、最適に当てはめた直線は、統計的に「不偏」である。

¹厳密には密度はエッジセグメントの方向により異なる。画素が正方形格子配列であれば、水平なエッジセグメントは 45° 方向のエッジセグメントと比べて $\sqrt{2}$ 倍だけ密である。しかし、以下ではこの差を無視する。

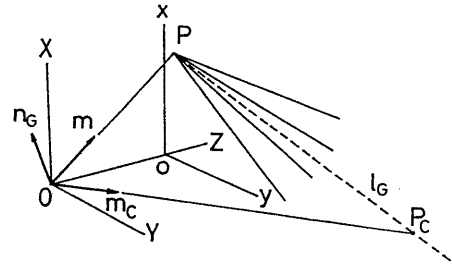


図2: 消失点 P の推定と仮想的中心線 l_G

3 消失点の誤差

よく知られているように、直線 $\{l_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ が空間中の平行な直線の投影像であれば、それらは画面上では共点である。それらの共通の交点に対応する直線の「消失点」であり、その N ベクトル m は空間中の直線の3次元方向を示している[3, 4, 5]。その N 本の直線の N ベクトルを $\{n_\alpha\}$ とすると、前論文[11]で示したように、消失点の N ベクトル m は「モーメント行列」

$$N = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha n_\alpha n_\alpha^T \quad (15)$$

の最小固有値に対する単位固有ベクトルとして与えられる。重み W_α は次のように定めるのが最尤推定の意味で最適である[9]。

$$W_\alpha = \frac{1}{(m, V[n_\alpha] m)} \quad (16)$$

ただし $V[n_\alpha]$ は N ベクトル n_α の共分散行列である。

モーメント行列 N の最大固有値に対する単位固有ベクトルを n_G とする。ベクトル n_G は、 N 本の直線の仮想的な中心線 l_G の N ベクトルと見なせる(図2)。3本の固有ベクトルは正規直交系をつくるので、中間固有値に対する単位固有ベクトル m_C は $\pm m \times n_G$ である。ベクトル m_C は n_G と m に直交している。したがって、 m_C を N ベクトルとする点 P_C は消失点 P と「共役」である[3, 5]。

n_G に対する N の固有値は、次の式で与えられる。

$$(n_G, N n_G) = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (n_G, n_\alpha)^2 \quad (17)$$

m_C に対する固有値は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} (m_C, N m_C) &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m \times n_G, n_\alpha)^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha |m, n_G, n_\alpha|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし $|a, b, c| (= (a \times b, c) = (b \times c, a) = (c \times a, b))$ はベクトル a, b, c のスカラー三重積である。前論文[11]

の定理1より、消失点のNベクトル m の共分散行列 $V[m]$ は次式で与えられる。

$$V[m] = \frac{m_C m_C^T}{\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} |m, n_G, n_{\alpha}|^2} + \frac{n_G n_G^T}{\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (n_G, n_{\alpha})^2} \quad (19)$$

直線間の間隔が狭ければ、右辺は第1項が支配的である。 n_G と n_{α} のなす角度を ϕ_{α} とすれば、 m と $n_G \times n_{\alpha}$ は平行であるから、次式を得る。

$$|m, n_G, n_{\alpha}|^2 = (m, n_G \times n_{\alpha})^2 = \sin^2 \phi_{\alpha} \quad (20)$$

ϕ_{α} を (仮想的な中心線 l_G からの) 「偏角」と呼ぶ。各直線の共分散行列 $V[n_{\alpha}]$ が式(14)の形式で近似されれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} V[n_{\alpha}] &\approx \frac{6\kappa}{w_{\alpha}^3} u_{\alpha} u_{\alpha}^T \\ &= \frac{6\kappa}{w_{\alpha}^3} (m_{G\alpha} \times n_{\alpha})(m_{G\alpha} \times n_{\alpha})^T \quad (21) \end{aligned}$$

ただし u_{α} は α 番目のエッジセグメントの方向であり、 $m_{G\alpha}$ はその中心点 G_{α} のNベクトルである。したがって、式(16)の最適な重み W_{α} は次の式で近似できる。

$$W_{\alpha} \approx \frac{w_{\alpha}^3}{6\kappa |m, m_{G\alpha}, n_{\alpha}|^2} \quad (22)$$

$m_{G\alpha}$ と m のなす角度を θ_{α} とすれば、 n_{α} と $m \times m_{G\alpha}$ は平行であるから、次式を得る。

$$|m, m_{G\alpha}, n_{\alpha}|^2 = (m \times m_{G\alpha}, n_{\alpha})^2 = \sin^2 \theta_{\alpha} \quad (23)$$

角度 θ_{α} は消失点と α 番目のエッジセグメントの中心点 G_{α} との視差を示している。

これらを式(19)に代入すると、次の近似を得る。

$$V[m] \approx \frac{6\kappa m_C m_C^T}{\sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha}^3 \sin^2 \phi_{\alpha} / \sin^2 \theta_{\alpha}} \quad (24)$$

これから次のことがわかる。

- 消失点の誤差は中心直線に沿って最も生じやすい。
- 消失点の誤差は、解像度定数 κ については $\kappa^{1/2}$ にほぼ比例する。
- 消失点の誤差は、各エッジセグメントの長さ w_{α} については $w_{\alpha}^{-3/2}$ にほぼ比例する。
- 消失点の誤差は、各エッジセグメントと中心線との偏角 ϕ_{α} については $1/\sin \phi_{\alpha}$ にほぼ比例する。
- 消失点の誤差は、消失点と各エッジセグメントの中心点との視差 θ_{α} については $\sin \theta_{\alpha}$ にほぼ比例する。

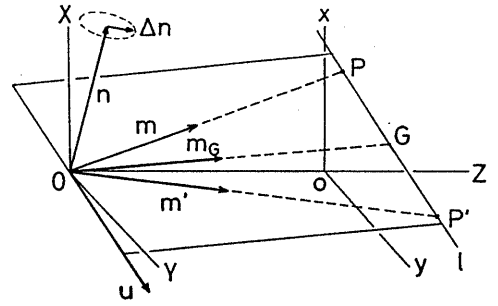


図3: 軌跡の方向ベクトル u と中心点 G

式(21)より $\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} V[n_{\alpha}] \approx c u_G u_G^T$ である。ただし c はある正定数であり、 u_G は中心線 l_G の方向ベクトルである。式(24)と前論文[11]の定理3より、消失点の統計的偏差は

$$\Delta m \approx c c' (m_C, u_G)(u_G, m) m_C \quad (25)$$

となる。ただし c' はある正定数である。 m と m_C の符号を両方の点が画像面に向かうように選ぶと、 u_G の向きにかかわらず $(m_C, u_G)(u_G, m) < 0$ となる(図2)。したがって、次のことがわかる。

- 消失点は、画像の中心から離れる方向に中心線に沿って最も偏りやすい。
- 消失点が画像の原点付近か無限遠方にあるとき、偏差は最小となる。

4 出現点の誤差

空間中を並進する物体を撮影した、あるいは静止物体に対してカメラを並行移動させながら撮影した2画像を考える。2画像の対応する点を結ぶ直線を「軌跡」と呼ぶ。エッジセグメントの場合と同様に、ベクトル u, m_G を次のように定義する。

$$u = \pm N[m_2 - m_1], \quad m_G = \pm N[m_1 + m_2] \quad (26)$$

ベクトル u を軌跡の「方向ベクトル」と呼び、ベクトル m_G を対応する2点の「中心点」 G のNベクトルと見なす(図3)。

Nベクトルが m_1, m_2 の2つの点を通る軌跡の共分散行列 $V[n]$ は、前論文[11]で導いたように

$$V[n] = \frac{\bar{\epsilon}^2}{1 - (m_1, m_2)^2} \left(I - n n^T \frac{m_1 m_1^T + m_2 m_2^T}{2} \right) \quad (27)$$

で与えられる。ベクトル u, m_G の両方とも $V[n]$ の単位固有ベクトルであることが簡単に確かめられる。

$$V[n]u = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2(1 - (m_1, m_2))} u$$

$$V[n]m_G = \frac{\epsilon^2}{2(1+(m_1, m_2))} m_G \quad (28)$$

したがって、式(27)の共分散行列 $V[n]$ は次のように書き換えられる(「スペクトル分解」[3])。

$$V[n] = \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{uu^T}{1-(m_1, m_2)} + \frac{m_G m_G^T}{1+(m_1, m_2)} \right) \quad (29)$$

2点間の距離 w (単位は画素) が f に比べて小さいなら、右辺は第1項が支配的である。このとき

$$(m_1, m_2) \approx \cos \frac{w}{f} \approx 1 - \frac{w^2}{2f^2} \quad (30)$$

であるから、共分散行列 $V[n]$ は次のように近似できる。

$$V[n] \approx \left(\frac{\epsilon}{w}\right)^2 uu^T \quad (31)$$

よく知られているように、空間中を並進する点の(または並行移動したカメラから撮影した点の)軌跡を画像面上で延長すると1点で交わる。この点を「出現点」と呼ぶ。その N ベクトルは物体(またはカメラ)の運動の3次元方向を示す[3, 4, 5]。2画像は別々の処理を受けるので、各画像のノイズは統計的に独立であると見なす²。

対応する点の N ベクトルを $\{m_{1\alpha}\}$ と $\{m_{2\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ であるとし、 α 番目軌跡の N ベクトルを n_α とする。消失点の場合のように、出現点の N ベクトル m の共分散行列 $V[m]$ は前論文[11]の定理1より、次の式で与えられる。

$$V[m] =$$

$$\frac{m_C m_C^T}{\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha |m, n_G, n_\alpha|^2} + \frac{n_G n_G^T}{\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (n_G, n_\alpha)^2} \quad (32)$$

ただし n_G は N 本の軌跡の仮想的な中心線の N ベクトルであり、 $m_C = \pm m \times n_G$ は中心線上で出現点と共役な点の N ベクトルである[3, 5]。軌跡間の間隔が狭ければ、右辺は第1項が支配的である。ベクトル n_G, n_α のなす角度を ϕ_α とすれば、次式を得る。

$$|m, n_G, n_\alpha|^2 = \sin^2 \phi_\alpha \quad (33)$$

角度 ϕ_α は仮想的な中心線からの偏角である。各軌跡の共分散行列 $V[n_\alpha]$ を式(31)の形で近似すれば、式(16)の最適な重み W_α は次のように近似できる。

$$W_\alpha \approx \frac{w_\alpha}{\epsilon^2 (m_\alpha, u_\alpha)^2} = \frac{w_\alpha}{\epsilon^2 |m_\alpha, m_{G\alpha}, n_\alpha|^2} \quad (34)$$

ただし $m_{G\alpha}$ は α 番目の軌跡の中心点の N ベクトルである ($u_\alpha = \pm m_{G\alpha} \times n_\alpha$ に注意)。ベクトル $m_{G\alpha}, m$ のなす角度を θ_α とすれば、次式を得る。

$$|m, m_{G\alpha}, n_\alpha|^2 = \sin^2 \theta_\alpha \quad (35)$$

²厳密には、レンズの収差やラスタ走査の歪みのようなカメラ特性による誤差を考えると、これは正しくない。しかしそのような組織的な誤差は無視し、誤差は各々の画像処理においてランダムかつ独立に生じると仮定する。

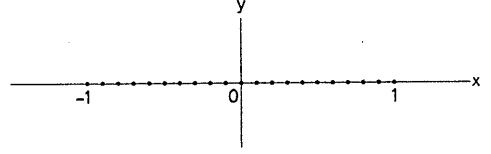


図4: 直線当てはめのためのエッジ点

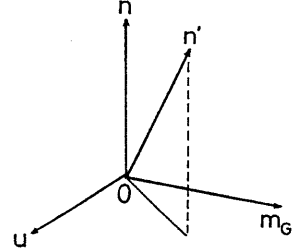


図5: 誤差のある N ベクトルの表現法

角度 θ_α は、出現点と α 番目の軌跡の中心点との視差を示している。これらを式(32)に代入すると、次の近似を得る。

$$V[m] \approx \frac{\epsilon^2 m_C m_C^T}{\sum_{\alpha=1}^N w_\alpha^2 \sin^2 \phi_\alpha / \sin^2 \theta_\alpha} \quad (36)$$

これから次のことがわかる。

- 出現点の誤差は N 本の軌跡の中心線に沿って最も生じやすい。
- 出現点の誤差は画素精度 ϵ にほぼ比例する。
- 出現点の誤差は、対応する点の間隔の逆数 $1/w_\alpha$ にほぼ比例する。
- 出現点の誤差は、個々の軌跡の中心線からの偏角 ϕ_α に対して $1/\sin \phi_\alpha$ にほぼ比例する。
- 出現点の誤差は、出現点の個々の軌跡の中心点からの視差 θ_α に対して $\sin \theta_\alpha$ にほぼ比例する。

消失点の場合と同様に、式(31)と式(36)から出現点の統計的偏差は式(25)の形に生じる。したがって、

- 出現点は、画像中心から離れる方向に中心直線に沿って最も生じやすい。
- 出現点が画像の原点付近か無限遠方にあるとき、偏差は最小になる。

5 数値実験

5.1 エッジ当てはめ

図4に示す x 軸上の区間 $-1 \leq x \leq 1$ に等間隔に21点をとる。焦点距離は $f = 20$ とする。平均0、標準偏

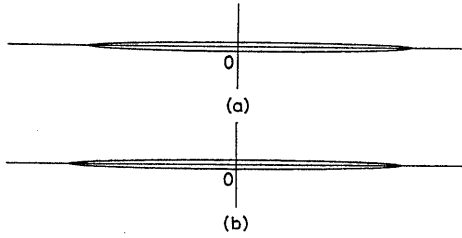


図 6: (a) サンプル分布, (b) 理論的分布

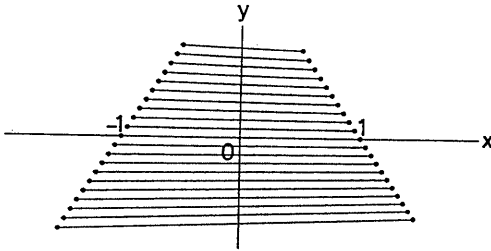


図 7: 出現点推定のための軌跡

差 0.05 の正規分布に従う乱数 Δx と Δy を発生させ、各点に独立に加える。そして 2 節で述べた最適最小二乗法によって直線を当てはめる。毎回異なる乱数を用いて、これを 1000 回繰り返す。当てはめた直線の N ベクトルを、式 (1) で定義した u と m_G が張る平面に正射影する (図 5)。こうして得られた 1000 点のサンプル平均とサンプル共分散行列を計算する。真の平均を中心として、各方向の標準偏差を表す楕円を図 6(a) に示す。横軸は

エッジの方向ベクトル u に対応している。式 (13) から計算した対応する理論的楕円を図 6(b) に示す。これから、式 (13) は非常によい近似であることがわかる。また、 m_G 方向の変動は、 u 方向の変動に比べて非常に小さいので無視することができる。したがって、式 (14) も非常によい近似であり、2 節の結果が確かめられる。

5.2 出現点の推定

消失点の推定と出現点の推定は (誤差の原因は異なるが) 同じ幾何学的構造を持っているので、出現点の推定について実験する。図 7 に示す軌跡を考える。この軌跡の出現点は画像原点から視差 $\theta = 45^\circ$ のところにある。最も外側の軌跡と中心線との偏角は $\phi = 3^\circ$ である。焦点距離を $f = 20$ とする。平均 0、標準偏差 0.005 の正規分布に従う乱数 Δx と Δy を各軌跡の端点に独立に加える。

3 節で述べた最適最小二乗法によって共通の交点を計算する。毎回異なる乱数を用いて、これを 1000 回繰り返す。推定した出現点の N ベクトルを、4 節で定義した m_C と n_G の張る平面に正射影する (図 8)。こうして得られた 1000 点のサンプル平均とサンプル共分散行列を計算する。真の平均を中心として、各方向の標準偏差を表

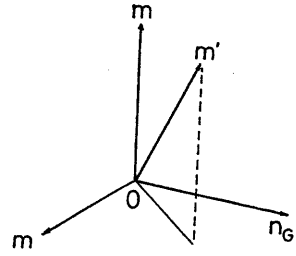


図 8: 誤差のある N ベクトルの表現法

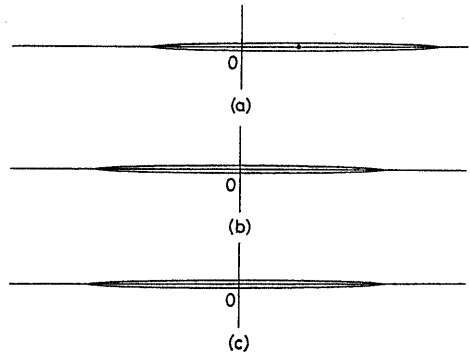


図 9: (a) サンプル分布と理論的偏差, (b) 理論的分布, (c) 不偏推定法に対するサンプル分布

す楕円を図 9(a) に示す。横軸は m_C の方向に対応する。式 (32) から計算した対応する理論的楕円を図 9(b) に示す。明らかに、4 節で予想した統計的偏差が観測される。図 9(a) の黒丸は理論的に予想される偏差を示す。図 9(c) は前論文 [11] に示した不偏推定法を適用したものである。偏差は確かに消えていることがわかる。また、 n_G 方向の変動は、 m_C 方向の変動に比べて非常に小さいので無視することができる。したがって、式 (36) はよい近似である。

いろいろな視差 θ に対する誤差の標準偏差 $\sqrt{E[\|\Delta m\|^2]}$ を図 10 に示す。実線は式 (32) による理論値である。黒丸は各々 1000 回の試行から計算した実験値を示す。確かに誤差が $\sin \theta$ にほぼ比例していることが確かめられる。いろいろな偏角 ϕ に対する誤差を図 11 に示す。各々 1000 回の試行から同様に計算する。予想通り、誤差は $1/\sin \phi$ にほぼ比例している。図 10, 11 で、白丸は一樣な重み ($W_\alpha = \text{定数}$) による最小二乗法で計算した値である。明らかに、最適重みを用いたほうがよい結果が得られている。

すべての実験において、前論文 [11] で考察した有効焦点距離の影響は無視できるほど小さい。したがって、有効焦点距離を考慮する必要はない。

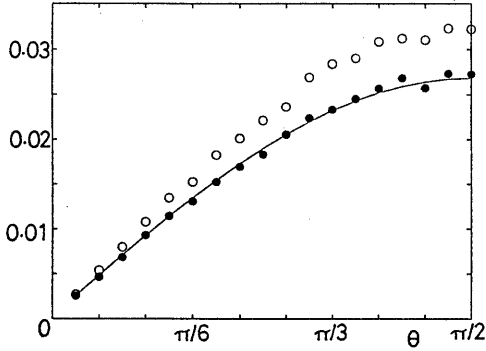


図 10: 視差 θ に対する標準偏差

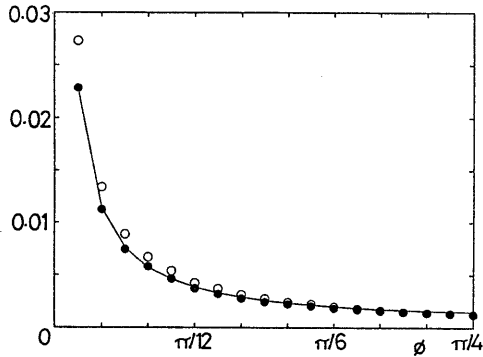


図 11: 偏角 ϕ に対する標準偏差

6 くりこみ法

前節に示したように、消失点や出現点の偏差は前論文 [11] に示した不偏推定法によって取り除くことができる。しかし、それには画像精度 ϵ や解像度定数 κ のような画像のノイズの程度や処理の精度を表す定数が既知でなければならぬ。実環境におけるシステムでは、画像のノイズをあらかじめ予測することは困難である。そこで、画像のノイズや特徴点検出、エッジ検出などの精度が未知であるときに、これを推定しながら適応的に偏差を除去する方法を考える。

第2節および第5節の解析をたどってみれば、エッジに当てはめた直線の N ベクトルの共分散行列は解像度定数 κ に比例し、軌跡の N ベクトルの共分散行列は画像精度 ϵ の二乗に比例していることがわかる。したがって、画像のノイズが未知の場合を考えるには、直線データ $\{l_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ の N ベクトルの共分散行列が

$$V[n_\alpha] = cV_0[n_\alpha] \quad (37)$$

の形である場合を考えればよい。ここで c は未知の正定数である。前論文 [11] の理論より、共通の交点の N ベクトル m の不偏推定は「不偏モーメント行列」

$$\hat{N} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (n_\alpha n_\alpha^T - cV_0[n_\alpha]) \quad (38)$$

の最小固有値に対する固有ベクトルで与えられる。ただし W_α は

$$W_\alpha = \frac{1}{(m, V_0[n_\alpha] m)} \quad (39)$$

で与えられる未知の最適重みである。重みは定数倍しても解は同じであるから分母では $V[n_\alpha]$ のかわりに $V_0[n_\alpha]$ を用いる。

もし \hat{N} が正しい不偏モーメント行列であり、 m が正しい解であれば、その最小固有値は

$$\lambda_m = (m, \hat{N} m) \quad (40)$$

であり、その期待値は 0 である。

$$E[\lambda_m] = E[(m, \hat{N} m)]$$

$$= (m, E[\hat{N}] m) = (m, N m) = 0$$

ここで、 $\lambda_m = 0$ となるように c を定めるのが合理的である。いま、与えた c の値に対して $\lambda_m \neq 0$ であったとすれば、

$$\hat{N}' = \hat{N} - \frac{\lambda_m \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V_0[n_\alpha]}{\sum_{\alpha=0}^N W_\alpha (m, V_0[n_\alpha] m)}$$

とおくと $(m, \hat{N}' m) = 0$ となる。この \hat{N}' を用いれば、よりよい推定値 m' を求めることができる。そして、 W_α は先に求めた m から推定し、これを反復する。

以上のことは、式 (37), (38) より次の形の手順にまとめられる。

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, \dots, N$ とおく。
2. 不偏モーメント行列

$$\hat{N} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (n_\alpha n_\alpha^T - cV_0[n_\alpha])$$

の最小固有値 λ_m に対応する単位固有ベクトル m を計算する。

3. c , W_α を次のように更新する。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_m}{\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m, V_0[n_\alpha] m)}$$

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(m, V_0[n_\alpha] m)}$$

4. 更新が収束していれば終了。そうでなければ 2 へ戻る。

この手順を場の量子論、統計物理学の「くりこみ理論」との形式的類似性から「くりこみ法」と呼ぶ。図 12 は 6.2 節の出現点推定のシミュレーションにおいて乱数の標準偏差を未知として上述のくりこみ法を適用したものであり、図 11(c) に対応するものである。くりこみ法はすべて 2~3 回の反復で収束した。これから、標準偏差を既知とした場合と同程度の効果が確認できる。図 13(a), (b) は出現点の方向の誤差のヒストグラムを示したものである。図 13(a) はくりこみ法を用いないもの(くりこみ法の初期状態)、図 13(b) はくりこみ法を適用したものであり、誤差が減少している様子がわかる。



図 12: くりこみ法に対するサンプル分布

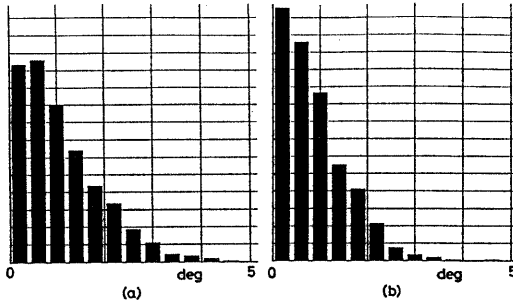


図 13: 出現点の方向の誤差のヒストグラム。(a) くりこみ法適用前、(b) くりこみ法適用後

7 まとめ

本論文では、前論文 [11] に示した幾何学的計算の誤差の統計的挙動に関する一般論をエッジ当てはめ、および消失点と出現点の計算に適用し、誤差挙動を解析的に記述した。そして、そのような計算に含まれる統計的偏差を解析し、乱数を用いた数値実験を行なって理論を確認した。最後に、画像の精度が未知の場合に、これを推定しながら適応的に解の精度を上げるくりこみ法を提案し、数値実験によりその効果を観察した。

参考文献

[1] B. Brillault-O'Mahony, New Method for vanishing point detection, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 289-300.

[2] R. T. Collins and R. S. Weiss, Vanishing point calculation as a stastical data, *Proc. 3rd Int. Conf. Comp. Vision*, Osaka, Japan, December (1990), pp.400-403.

[3] 金谷健一, 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, (1990).

[4] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, (1990).

[5] K. Kanatani, Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 333-348.

[6] K. Kanatani, Hypothesizing and testing geometric properties of image data, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991) 349-357.

[7] 金谷・川島, 画像データの幾何学的構造の仮説検定, 情報処理学会論文誌, 31-6 (1990), 879-886.

[8] K. Kanatani and Y. Onodera, Anatomy of camera calibration using vanishing points, *IEICE Trans.*, E74-10 (1991), 3369-3378.

[9] 金谷・浦沢, 消失点の推定とカメラキャリブレーションの統計的信頼性, 日本ロボット学会誌, 9-7 (1991), 813-820.

[10] M. A. Snyder, The precision of 3-D parameters in correspondence based techniques: The case of uniform translation motion in a rigid environment, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11 (1989), 523-528.

[11] 浦沢・金谷, 幾何学的計算の統計解析: I. 基礎理論, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.

[12] R. Weiss, H. Nakatani and E. M. Riseman, An error analysis for surface orientation from vanishing points, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12 (1990), 1179-1185.