

くりこみ法によるコニック当てはめ

岩崎 利夫 丸山 保 金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

コニックは直線に次いで重要な画像特徴であり、エッジ画素の列にコニックを当てはめるには最小二乗法が計算上最も便利である。しかし画像に誤差があれば、最小二乗解には統計的偏差が存在することが知られている。画像の誤差の標準偏差が既知であれば偏差を取り除くことができるが、誤差の挙動をあらかじめ予測することは困難である。そこで本論文では反復によって誤差の挙動を推定しながら統計的偏差を取り除く「くりこみ法」と呼ぶ方法を提案し、シミュレーションおよび実画像での当てはめの実験を行なってこの方法の有効性を示す。さらに、このくりこみ法が2次の収束をすることを理論的に示す。

Conic Fitting by Renormalization

Toshio Iwasaki, Tamotsu Maruyama and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Conics are the most fundamental image features next to lines. In order to fit a conic to edges, least-squares minimization is computationally the most convenient. It can be shown, however, that the least-squares solution is in general statistically biased in the presence of noise. Theoretically, the statistical bias can be removed if the mean square magnitude of the image noise is known, but the behavior of image noise is difficult to predict beforehand. To overcome this difficulty, we present a new scheme called "renormalization", which iteratively removes the statistical bias by automatically adjusting to the image noise. Its effectiveness is demonstrated by showing fitting experiments with simulated data and real images. It is shown that the convergence of renormalization is quadratic.

謝辞 本研究に関して討論頂いた米国メリーランド大学の Azriel Rosenfeld 博士, Larry Davis 博士, Yiannis Aloimonos 博士, Rama Chellappa 博士および大学院生諸氏に感謝します。

1. 序論

多くの物体には円形部分や球形部分があり、それらは画像面上では楕円、一般には“コニック”に投影されるので、コニックは直線の次に重要な画像特徴である。また、コニックは2次の代数曲線であり、多くの曲線がコニックで近似できる。このため、画像中のコニックを検出することは画像理解の最初のステップであり、検出されたコニックは物体の認識や分類のための重要な手がかりを与える。また、対応するコニックの空間中の位置や向きを計算することもできる [3, 6, 7].

このような解析を行なうには、まずコニックに曲線を当てはめなければならない。この当てはめにはいろいろな手法が提案されているが [1, 9, 10], 最小二乗法が計算上最も便利である。しかし、この最小二乗解には“統計的偏差”が存在することが知られている [4]。また、その偏差は誤差の挙動が既知なら“不偏推定法”を構成して取り除くこともできる [4].

しかし、実際の当てはめにおいて誤差の挙動をあらかじめ予測することは困難である。これに対して“カルマンフィルタ”を適用する試みもあるが [2, 8], 本論文では反復によって誤差の挙動を推定しながら統計的偏差を取り除く“くりこみ法”と呼ぶ方法を提案し、シミュレーションおよび実画像での当てはめの実験を行なってこの方法の有効性を示す。またこのくりこみ法が2次の収束をすることを理論的に示す。

2. 画像の誤差の統計的モデル

図1のようなカメラモデルを考える [5]。原点 O を視点、定数 f を焦点距離と呼ぶ。画像面上の点は視点 O からその点に向かう単位ベクトル m によって指定できる。これをその点の N ベクトルと呼ぶ [5].

ノイズが存在しないときの画像上の点の N ベクトルを m とすると、観測されるのは誤差を含んだ $m' = m + \Delta m$ である。ただし“ノイズ”とは画像処理によって検出した点や線の不正確さをいう。以下では Δm を確率変数とみなし、 N ベクトル m の共分散行列を次のように定義する [11, 12].

$$V[m] = E[\Delta m \Delta m^T] \quad (1)$$

記号 $E[\cdot]$ は期待値を表す。ノイズは画像の各画素で独立に生じ、標準偏差 ϵ で各画素の周りに等方的に生

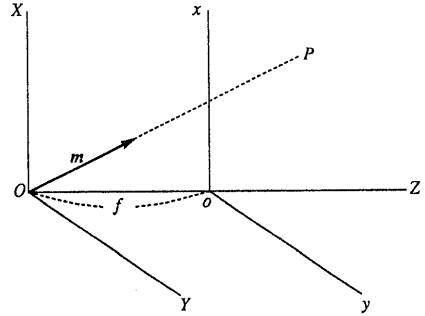


図1: 画像上の点の N ベクトル

じると仮定し、 ϵ を画素精度と呼ぶ。このとき、次のことが証明できる [11, 12].

【命題 1】 画像の大きさが焦点距離 f に比べて小さければ、共分散行列 $V[m]$ は次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{\epsilon^2}{2}(I - mm^T), \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{f} \quad (2)$$

3. コニックの当てはめ

コニックとは次の式で表される xy 平面上の曲線のことである。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (3)$$

行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & F/f^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と定義すると、式 (3) は N ベクトル m を用いて

$$(m, Qm) = 0 \quad (5)$$

と表せる。ただし (\cdot, \cdot) はベクトルの内積である。以下では簡単のために行列 Q の表すコニックを単に“コニック Q ”と呼ぶ。行列 Q を定数倍しても同じコニックを表すので、以下では $\|Q\| = 1$ と正規化する。ただし $\|\cdot\|$ は行列のノルムである ($\|Q\|^2 = \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij}^2$)。

コニックを当てはめるべきデータ点を P_α , $\alpha = 1, \dots, N$ とし、それぞれの N ベクトルを m_α とす

る。式 (5) より $(m_\alpha, Qm_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \dots, N$ となるコニック Q を求めればよい。そこで次の最小二乗法を考える。

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha, Qm_\alpha)^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

ただし W_α は正の重みである。 $m_{\alpha(i)}$ をベクトル m_α の第 i 成分とし、モーメントテンソル $M = (M_{ijkl})$ を

$$M_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m_{\alpha(l)} \quad (7)$$

と定義する。これは行列から行列への線形写像を定義する。すなわち MQ は (ij) 要素が $\sum_{k,l=1}^3 M_{ijkl} Q_{kl}$ の行列である。行列の内積を $(A, B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$ で定義すれば、最小化 (6) は

$$(Q, MQ) \rightarrow \min, \quad \|Q\| = 1 \quad (8)$$

と書ける。ここで Q を 6 次元ベクトル

$$(Q_{11}, \sqrt{2}Q_{12}, Q_{22}, \sqrt{2}Q_{13}, \sqrt{2}Q_{23}, Q_{33})^T \quad (9)$$

とみなし、 M を 6 次元行列

$$\begin{pmatrix} M_{1111} & \sqrt{2}M_{1112} & M_{1122} \\ \sqrt{2}M_{1211} & 2M_{1212} & \sqrt{2}M_{1222} \\ M_{2211} & \sqrt{2}M_{2212} & M_{2222} \\ \sqrt{2}M_{1311} & 2M_{1312} & \sqrt{2}M_{1322} \\ \sqrt{2}M_{2311} & 2M_{2312} & \sqrt{2}M_{2322} \\ M_{3311} & \sqrt{2}M_{3312} & M_{3322} \\ \\ \sqrt{2}M_{1113} & \sqrt{2}M_{1123} & M_{1133} \\ 2M_{1213} & 2M_{1223} & \sqrt{2}M_{1233} \\ \sqrt{2}M_{2213} & \sqrt{2}M_{2223} & M_{2233} \\ 2M_{1313} & 2M_{1323} & \sqrt{2}M_{1333} \\ 2M_{2313} & 2M_{2323} & \sqrt{2}M_{2333} \\ \sqrt{2}M_{3313} & \sqrt{2}M_{3323} & M_{3333} \end{pmatrix} \quad (10)$$

とみなせば、 $\|Q\|$ は Q の行列としてのノルムと考えるてもベクトルとしてのノルムと考えるてもよい。同様に (Q, MQ) は Q と MQ の行列としての内積と考えるてもよいし、 MQ を行列 M とベクトル Q の積とみなしてベクトルの内積と考えるてもよい。

Q と M をそれぞれベクトルおよび行列とみなせば、式 (8) はベクトル Q の 2 次形式であり、その最小値は行列 M の最小固有値に対する単位固有ベク

トルで与えられる。あるいは $MQ = \lambda Q$ となるノルム 1 の行列 Q をテンソル M の固有値 λ に対する単位固有行列と呼ぶことにすれば、解はテンソル M の最小固有値に対する単位固有行列 Q で与えられるともいえる。

式 (6) の重み W_α は信頼性の高いデータに対しては大きく、信頼性の低いデータに対しては小さく選ばなければならない。“最尤推定”の意味での最適な重みは次のように与えられることが証明できる [4].

$$W_\alpha = \frac{\text{const.}}{\|Qm_\alpha\|^2} \quad (11)$$

定数は最適化に影響を与えないので $\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = 1$ となるように選ぶ。

4. 統計的偏差と不偏推定

$\bar{M} = (\bar{M}_{ijkl})$ が正確な N ベクトル \bar{m}_α のモーメントテンソルであるとする。それぞれの N ベクトル m_α が誤差を含んで $m_\alpha = \bar{m}_\alpha + \Delta m_\alpha$ となると、モーメントテンソル \bar{M} も誤差を含んだ $M = \bar{M} + \Delta M$ となる。誤差 $\Delta M = (\Delta M_{ijkl})$ の期待値は次のようになることが証明できる [4].

$$\begin{aligned} E[\Delta M_{ijkl}] = & \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \left(-3(\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{8}) \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)} \bar{m}_{\alpha(k)} \bar{m}_{\alpha(l)} \right. \\ & + \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{4})(\delta_{ij} \bar{m}_{\alpha(k)} \bar{m}_{\alpha(l)} + \delta_{ik} \bar{m}_{\alpha(j)} \bar{m}_{\alpha(l)} \\ & + \delta_{il} \bar{m}_{\alpha(k)} \bar{m}_{\alpha(j)} + \delta_{jk} \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(l)} + \delta_{jl} \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(k)} \\ & \left. + \delta_{kl} \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)} \right) + \frac{\bar{\mu}^4}{8} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタであり、 $\bar{\epsilon} = \sqrt{E[\|\Delta m_\alpha\|^2]}$, $\bar{\mu} = \sqrt[4]{E[\|\Delta m_\alpha\|^4]}$ とおいた。固有値問題の摂動定理 [5] を用いれば $M = \bar{M} + \Delta M$ の単位固有行列には $E[\Delta Q] = O(E[\Delta M]) = O(\bar{\epsilon}^2)$ だけ統計的に偏差が存在することが示せる [4].

式 (7) の代わりに不偏モーメントテンソル $\hat{M} = (\hat{M}_{ijkl})$ を

$$\begin{aligned} \hat{M}_{ijkl} = & \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \left(\left(1 - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}\right) m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m_{\alpha(l)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\mu}^4}{4})(\delta_{ij} m_{\alpha(k)} m_{\alpha(l)} + \delta_{ik} m_{\alpha(j)} m_{\alpha(l)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta_{il}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(j)} + \delta_{jk}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(l)} \\
& +\delta_{jl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(k)} + \delta_{kl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)} \\
& +\frac{1}{2}\left(\tilde{\epsilon}^4 - \frac{(\tilde{\epsilon}^2 + 2)\tilde{\mu}^4}{8}\right)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})
\end{aligned} \quad (13)$$

と定義すれば,

$$E[\hat{\mathcal{M}}] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})(1 - 3(\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{8}))\bar{\mathcal{M}} \quad (14)$$

となることが示せる [4]. 定数 $(1 - \tilde{\epsilon}^2/2)(1 - 3(\tilde{\epsilon}^2 - \tilde{\mu}^4/8))$ は固有行列には影響しないので, $\hat{\mathcal{M}}$ の最小固有値に対する単位固有行列 Q は統計的に不偏である. この不偏推定法によって確かに偏差が除かれることはシミュレーション実験でも確かめることができる [4].

5. くりこみ法

前節の不偏推定法には二つの問題点がある. 第一点は最適重み (11) がこれから求めようとするコニック Q を含んでいることである. 第二点是不偏モーメントテンソル $\hat{\mathcal{M}}$ の計算に $\tilde{\epsilon}^2$, $\tilde{\mu}^4$ の値を必要とすることである. しかし, 実際の画像に対してその精度をあらかじめ予測するのは困難である.

そこで次の方法を考える. 最適重み W_α は反復を行ない, 前回の反復の Q を用いて計算する. 4 次の誤差項 $\tilde{\epsilon}^4$, $\tilde{\mu}^4$ を省略して $c = \tilde{\epsilon}^2$ とおくと, 不偏モーメントテンソル $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{M}_{ijkl})$ は次の形になる.

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{ijkl} = & (1 - \frac{c}{2}) \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} \\
& - \frac{c/2}{1 - c/2} (\delta_{ij}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} + \delta_{ik}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(l)} \\
& + \delta_{il}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(j)} + \delta_{jk}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(l)} \\
& + \delta_{jl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(k)} + \delta_{kl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)})) \quad (15)
\end{aligned}$$

定数 c は $E[\hat{\mathcal{M}}] = \bar{\mathcal{M}}$ となるように選ぶべきであるが, 誤差の統計的挙動が未知であればこれは不可能である. 一方, $E[\hat{\mathcal{M}}] = \bar{\mathcal{M}}$ であれば, 式 (14) から次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
E[(\bar{Q}, \hat{\mathcal{M}}\bar{Q})] &= (\bar{Q}, E[\hat{\mathcal{M}}]\bar{Q}) \\
&= (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})(1 - 3(\tilde{\epsilon}^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{8}))(\bar{Q}, \bar{\mathcal{M}}\bar{Q}) = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

そこで毎回の反復において $(Q, \hat{\mathcal{M}}Q) = 0$ となるように c を選ぶ. 式 (15) で全体の係数 $1 - c/2$ は当てはめに影響を及ぼさないので取り除き, $(c/2)/(1 - c/2)$ を改めて $c/2$ とおく. $\{m_\alpha\}$ のモーメント行列を

$$M = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_\alpha m_\alpha^T \quad (17)$$

とすれば, 式 (15) から

$$\begin{aligned}
(Q, \hat{\mathcal{M}}Q) &= (Q, MQ) \\
&- c(\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)) \quad (18)
\end{aligned}$$

となる. 現在の c と Q の推定値に対して $(Q, \hat{\mathcal{M}}Q) \neq 0$ であったとすれば

$$c' = \frac{(Q, \hat{\mathcal{M}}Q)}{\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)} \quad (19)$$

とおけば

$$(Q, \hat{\mathcal{M}}Q) - c'(\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)) = 0 \quad (20)$$

となる. また Q がテンソル $\hat{\mathcal{M}}$ の単位固有行列であれば $(Q, \hat{\mathcal{M}}Q)$ はその固有値に等しい. このことから次の手続きを得る. これをくりこみ法と呼ぶ.

procedure renormalization($\{m_\alpha\}$)

1. $c = 0$, $Q = -I/\sqrt{3}$ とおく.

2. W_α を次のようにおく.

$$W_\alpha = \frac{1/\|Qm_\alpha\|^2}{\sum_{\beta=1}^N 1/\|Qm_\beta\|^2} \quad (21)$$

3. 行列 $M = (M_{ij})$ とテンソル $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{M}_{ijkl})$ を次のように計算する.

$$M_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{ijkl} = & \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} \\
& - \frac{c}{2} (\delta_{ij}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)} + \delta_{ik}m_{\alpha(j)}m_{\alpha(l)} \\
& + \delta_{il}m_{\alpha(k)}m_{\alpha(j)} + \delta_{jk}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(l)} \\
& + \delta_{jl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(k)} + \delta_{kl}m_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)})) \quad (23)
\end{aligned}$$

4. テンソル \hat{M} の最小固有値に対する単位固有行列を Q とし, 最小固有値を λ_m とする.

5. 次のように c を更新する.

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_m}{\text{tr}Q\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)} \quad (24)$$

6. 更新が収束していれば Q を返す. そうでなければ 2. に戻る.

6. 実験例

図 2 のように楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ の上半分に 19 点を取り, 各点に各軸方向の標準偏差が $\sigma = 0.02$ の 2 次元正規分布に従うノイズを加える. ただし, この σ の値は以下の計算では使用しない (誤差の特性は未知とする). 焦点距離は $f = 10$ とする.

図 3 は最適に重みを選んだ最小二乗法による当てはめの 10 個のサンプルである. 破線は真のコンニクを表す. 図 4 は 100 回の試行で得られる面積 S と離心率 e の分布を示したものであり, サンプル平均は $S = 1.42$, $e = 0.89$ である. 真の値は $S = 1.57$, $e = 0.87$ である. 明らかに統計的偏差が存在する.

図 5 はくりこみ法による当てはめの 10 個のサンプルである. 図 6 は面積 S と離心率 e の分布であり, そのサンプル平均は $S = 1.61$, $e = 0.86$ である. このように誤差の特性が未知でも, くりこみ法によって統計的偏差が減少していることがわかる.

図 7 では楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ の右上半分に 10 点を取り, 同様に各点に標準偏差 $\sigma = 0.002$ の 2 次元正規分布に従うノイズを加える. 図 8 は最適に重みを選んだ最小二乗法による当てはめの 10 個のサンプルである. 図 9 は面積 S と離心率 e の分布であり, そのサンプル平均は $S = 1.48$, $e = 0.87$ である. やはり統計的偏差が存在する.

図 10 はくりこみ法による当てはめの 10 個のサンプルである. 図 11 は面積 S と離心率 e の分布である. そのサンプル平均は $S = 1.69$, $e = 0.87$ であり, 統計的偏差が減少していることがわかる.

図 12(a) は 300×200 画素の実画像を処理して得られたエッジ画像である. 5 つの楕円について当てはめを行なった. 図 12(b) に最適に重みを選んだ最小二乗法による当てはめ, 図 12(c) にはくりこみ法を用いた当てはめを示す. くりこみ法を用いたほうがややよい結果を与える.

図 13(a) は図 12(a) の画像を半分にしたものである. 図 13(b) に最適に重みを選んだ最小二乗法による当てはめ, 図 13(c) にはくりこみ法を用いた当てはめを示す. エッジが短いので, 完全な画像の場合と比べると当てはめが不正確になっている. しかし一般的にくりこみ法を用いたほうがよい当てはめが得られている.

シミュレーションデータについても実画像についても, くりこみ法の反復の収束は速く, 4~5 回の反復で十分である. これは方程式の根を求めるニュートン法と同様に 2 次収束であることが証明できる (付録).

7. まとめ

本論文では画像の誤差の特性が未知のとき, 反復によって誤差を推定しながら統計的偏差を取り除く“くりこみ法”と呼ぶ手法を提案した. そして, シミュレーションデータおよび実画像でコンニクの当てはめを行なって, くりこみ法によって当てはめが改善されることを確認した. カルマンフィルタ [2, 8] は逐次線形近似による最適化であり, データ点の個数だけ反復が必要であるが, くりこみ法は非線形最適化であり, データの個数に関係なく 4~5 回の反復で収束する. くりこみ法は計算が単純で収束も速く, コンニク当てはめの標準的手法になると思われる.

参考文献

- [1] F. L. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Graphics Image Process.*, **9** (1979), 56-71.
- [2] T. Ellis, A. Abbood and B. Brillault, Ellipse detection and matching with uncertainty, *Image Vision Comput.*, **10** (1992), 271-276.
- [3] D. Forsyth et al., Invariant descriptions for 3-D object recognition and pose, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **13** (1991), 971-991.
- [4] 岩崎利夫・金谷健一, コンニク当てはめの統計的偏差と不偏推定法, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.
- [5] 金谷健一, 「画像理解 / 3 次元認識の数理」, 森北出版, 1990.

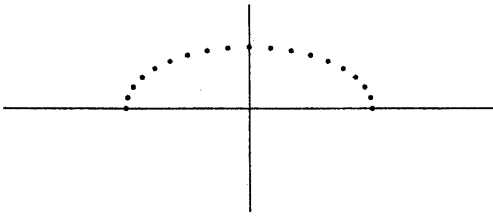


図 2: データ点

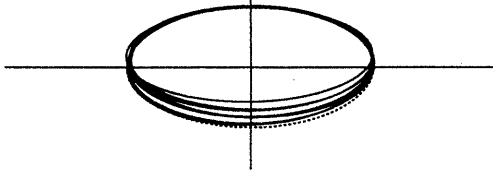


図 3: 最小二乗当てはめの例

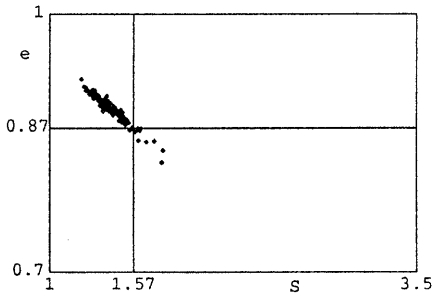


図 4: 面積 S , 離心率 e の分布

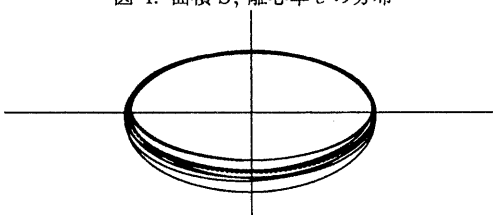


図 5: くりこみ法による当てはめの例

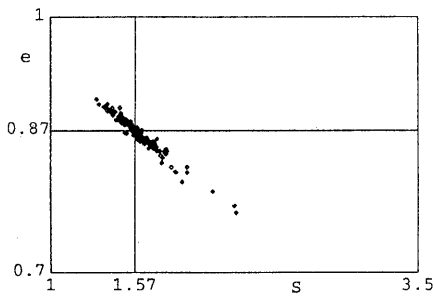


図 6: 面積 S , 離心率 e の分布

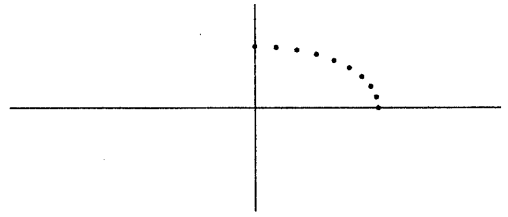


図 7: データ点

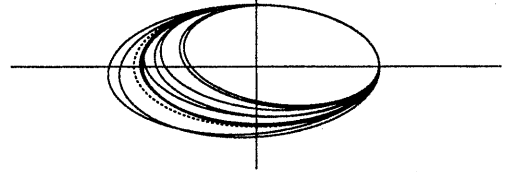


図 8: 最小二乗当てはめの例

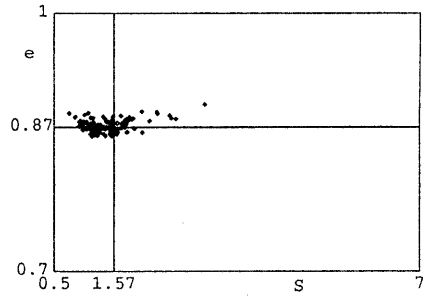


図 9: 面積 S , 離心率 e の分布

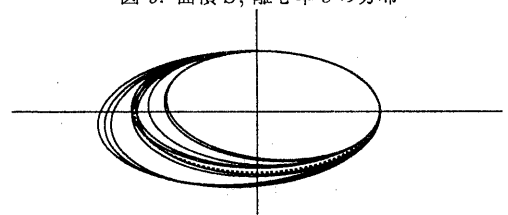


図 10: くりこみ法による当てはめの例

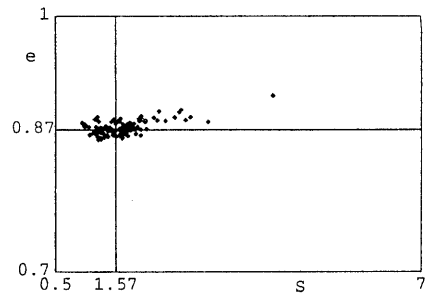
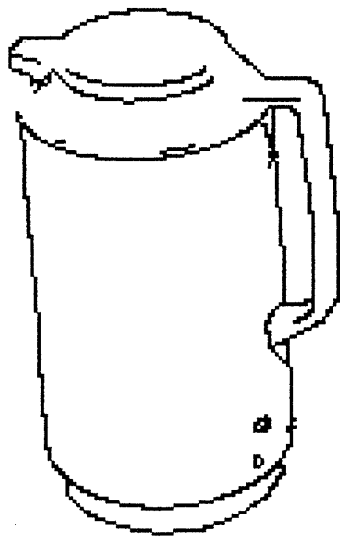
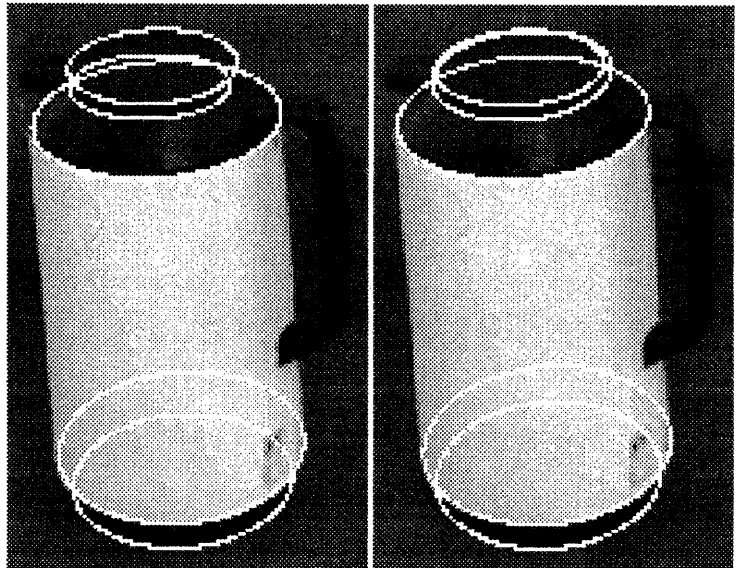


図 11: 面積 S , 離心率 e の分布



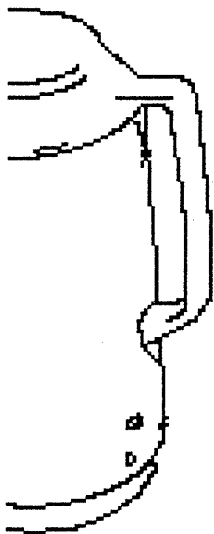
(a)



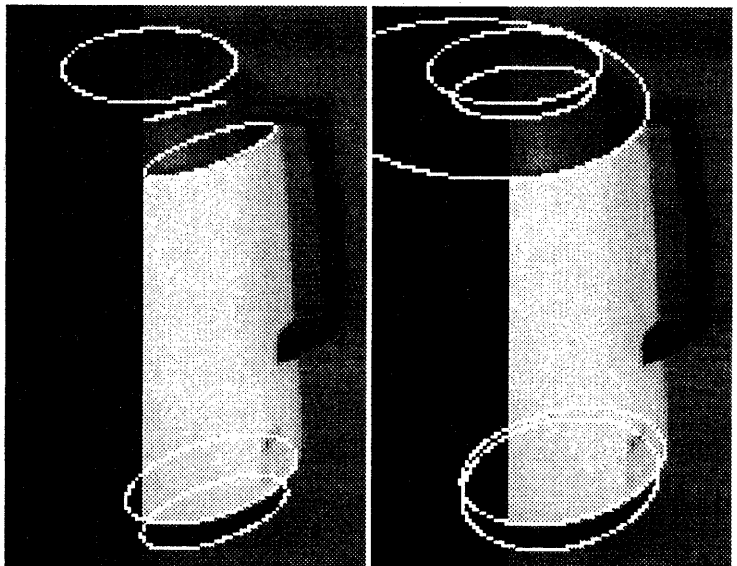
(b)

(c)

図 12: (a) エッジ画像 (b) 最小二乗当てはめ (c) くりこみ法による当てはめ



(a)



(b)

(c)

図 13: (a) エッジ画像 (b) 最小二乗当てはめ (c) くりこみ法による当てはめ

- [6] 金谷健一, コニックの計算論と直交性解釈, 情報処理学会論文誌, **33-6**(1992), 817-824.
- [7] 劉武・金谷健一, コニックの3次元解釈とその応用, 情報処理学会研究報告, 92-CV-76, 1992-01.
- [8] J. Porrill, Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter, *Image Vision Comput.*, **8** (1990), 37-41.
- [9] R. Safae-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib and K. C. Smith, Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images, *CVGIP: Image Understanding*, **54** (1991), 259-274
- [10] P. D. Sampson, Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Comput. Graphics Image Process.*, **18** (1982), 97-108.
- [11] 浦沢康二・金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: I. 基礎理論, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.
- [12] 浦沢康二・金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: II. エッジ, 消失点, 出現点, 情報処理学会研究報告, 92-CV-78, 1992-05.

< 付録 > くりこみ法の収束

半正値対称行列 \bar{A} の正確な値は未知で, ただその統計的な解析により

$$\bar{A} = E[A - cB] \quad (25)$$

ということがわかっているとき, \bar{A} の固有値 0 に対する単位固有ベクトル \bar{u}_m を計算したいとする. A と B はデータから得られる対称行列であり, したがって確率変数である. また c は誤差の程度を表す未知の定数である. このとき

$$\hat{A} = A - cB \quad (26)$$

とおき, $E[\hat{A}] = \bar{A}$ となるように定数 c が選べれば, \hat{A} の最小固有値に対する単位固有ベクトル u_m が \bar{u}_m の不偏推定を与える. しかし, 誤差の統計的挙動が未知であればこれは不可能である. 一方, $E[\hat{A}] = \bar{A}$ であれば, 真の解 \bar{u}_m に対して,

$$E[(\bar{u}_m, \hat{A}\bar{u}_m)] = (\bar{u}_m, E[\hat{A}]\bar{u}_m)$$

$$= (\bar{u}_m, \bar{A}\bar{u}_m) = 0 \quad (27)$$

となる. そこで毎回の反復において $(u_m, \hat{A}u_m) = 0$ となるように定数 c を選ぶ. $(u_m, \hat{A}u_m) \neq 0$ であれば,

$$\hat{A}' = \hat{A} - \frac{(u_m, \hat{A}u_m)}{(u_m, Bu_m)} B \quad (28)$$

と定義すれば, $(u_m, \hat{A}'u_m) = 0$ となる. また $\lambda_m = (u_m, \hat{A}u_m)$ は \hat{A} の最小固有値に等しい. このことからくりこみ法は次のように記述できる.

procedure renormalization(A, B)

1. $c = 0$ とおく.
2. 行列 \hat{A} を次のように定義する.

$$\hat{A} = A - cB \quad (29)$$

3. \hat{A} の最小固有値を λ_m とし, 対応する単位固有ベクトルを u_m とする.
4. c を次のように更新する.

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_m}{(u_m, Bu_m)} \quad (30)$$

5. 更新が収束すれば u_m を返す. そうでなければ 2. に戻る.

くりこみ法の収束速度を考える. 現在の推定値 \hat{A} の最小固有値 λ_m に対する単位固有ベクトルを u_m とすると, 行列 \hat{A} はつぎのステップで

$$\hat{A}' = \hat{A} - \frac{\lambda_m}{(u_m, Bu_m)} B \quad (31)$$

と更新される. 固有値問題の摂動定理 [5] によれば, \hat{A}' の最小固有値 λ'_m は

$$\lambda'_m = \lambda_m - (u_m, \left(\frac{\lambda_m}{(u_m, Bu_m)} B \right) u_m) + O\left(\frac{\lambda_m}{(u_m, Bu_m)} B \right)^2 = O(\lambda_m^2) \quad (32)$$

となる. ただし $O(\dots)^2$ は...の2次の項を示す. これは λ_m が 0 に 2 次収束をすることを意味する. したがって, くりこみ法の収束は極めて速く, ニュートン法によって方程式の解を逐次的に求めるのと同様に 3~4 回の反復で十分な結果が得られる.