

コニックステレオとその応用

劉 武

群馬大学工学部情報工学科

〒 376 桐生市天神町 1-5-1

あらまし ステレオ画像から点の対応を求めることなく任意のコニックスの3次元位置を計算する方法を提案する。その計算手法は射影幾何学の定式化に基いている。そして実画像を用いて計算の精度を検討する。最後に円形パタンの投影によって1台のカメラから平面の位置と向きを計測する応用を示す。

和文キーワード コニックス、ステレオ、光投影法

Conic Stereo and Its Application

Wu Liu

Department of Computer Science

Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Abstract A method for computing the 3-D geometry of arbitrary conics from stereo images is proposed. This method does not require point-to-point correspondences between the two images. The computation is based on the computational formalism of projective geometry. Real image experiments are done to examine the accuracy of the computation. Finally, we show an application to measure the 3-D position and orientation of a planar surface by using a single camera and projecting a circular light pattern.

英文 key words conic, stereo, light projection

1. まえがき

コニック（楕円、双曲線、放物線）は画像解析において直線に次ぐ重要な画像特徴であり、最近コニックに関する研究が増加している [1, 5]。コニックは円の投影像として工業の場で多く現れる。ロボットによる作業を考えると、各種のメータ、弁のハンドル、標識板などの円形物体を識別する必要は多い。これらは画像上にはコニックとして投影される。

金谷・劉 [8] は既知の円および楕円の投影像からそれらの3次元の位置を解析的に計算する手法を提出した。ただし、コニックの真の形状は既知でなければならない。本論文では2台カメラを用いて、真の形状が未知のコニックの画像からその3次元的位置と向きを計算する方法を提案し、これを「コニックステレオ」と呼ぶ。

通常のステレオでは2枚の画像間の対応関係を探索しなければならない。そのための技法がいろいろ提案されているが、多くの場合処理が複雑となり時間を要する。しかし本論文の方法では、各画像中に検出したコニック同士の対応さえわかれば点の対応は不要である。

もちろんコニックの対応がわかれば、エッジ極線を計算して点の対応を求めることもできる。しかし、点の対応から計算されるのはその点までの距離であって、そのコニックの形状、位置、向きを知るには改めて3次元データに対する当てはめを行わなければならない。これに対して本論文の方向では、画像上で当てはめたコニックの方程式から、そのコニックの空間中での形状、位置、向きが直接に計算できる。

最後にこれを応用して円形パタンの投影によって、1台のカメラから平面の位置と向きを計測する応用を示す。

2. 透視変換とNベクトル

次のようなカメラモデルを考える。レンズの中心を原点 O とし、光軸を Z 軸とする XYZ 座標系をとり、平面 $Z = f$ を画像面とする。座標原点 O を「視点」と呼ぶ。定数 f はカメラの撮像面とレンズの中心との距離であり、「焦点距離」と呼ぶ。画像面上に光軸に対応する点を原点 o とし、 X 、 Y 軸に平行な x 、 y 画像座標軸をとる。

画像面上の点 (x, y) は、視点 O とその点を通る視線の方向を表す単位ベクトル m で指定できる。画像面上の直線 $Ax + By + C = 0$ は、視点 O とそ

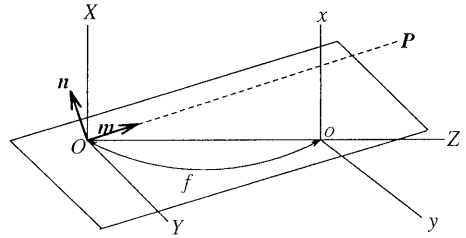


図1: 点と直線のNベクトル

の直線を通る平面の単位法線ベクトル n で指定できる (図1)。そのような単位ベクトル m 、 n を「Nベクトル」と呼ぶ [3, 4]。成分で表せば

$$m = \pm N \begin{bmatrix} x \\ y \\ f \end{bmatrix}, \quad n = \pm N \begin{bmatrix} A \\ B \\ C/f \end{bmatrix} \quad (1)$$

となる。ただし $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す。

3. 平面の運動と相称変換

空間中のある平面上にコニックが描かれているとき、その平面をそのコニックの「支持平面」とよぶ。支持平面わかれば、そのコニックの真の形状が投影像から一意的に決まる [8]。支持平面の単位法線を n (向きは視点 O から遠ざかるようにとる) とし、視点から支持平面までの距離を d (> 0) とすると、支持平面の方程式は $(n, r) = d$ と書ける。ベクトル $p = n/d$ を用いると、支持平面の方程式は $(p, r) = 1$ になる。ベクトル p を支持平面の「Pベクトル」と呼ぶ。

カメラが視点 O の周りに R だけ回転した後 h だけ並進すると、Pベクトルが p の支持平面によって画像面上には次の画像変換（相称変換）が生じる [3, 4]。

$$\begin{aligned} x' &= f \frac{A_{11}x + A_{21}y + A_{31}f}{A_{13}x + A_{23}y + A_{33}f}, \\ y' &= f \frac{A_{12}x + A_{22}y + A_{32}f}{A_{13}x + A_{23}y + A_{33}f} \end{aligned} \quad (2)$$

行列 $A = (A_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ は運動パラメータ $\{R, h\}$ と支持平面のPベクトル p によって次のように表せる [3, 4]。

$$A = \frac{1}{k} (I - ph^T)R, \quad k = \sqrt[3]{1 - (p, h)} \quad (3)$$

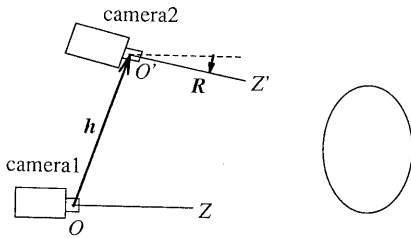


図 2: コニックステレオ

式(2)からわかるように、行列 A には定数倍の不定性があるが、正規化定数 k を上のように選べば $\det A = 1$ となる。

4. コニックの表現

「コニック」とは次の方程式で表される 2 次曲線のことである。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (4)$$

式(1)の N ベクトル m を用いると、式(4)は次のように表せる。

$$(m, Qm) = 0, \quad (5)$$

$$Q = \kappa \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & F/f^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ただし、 κ は任意の零でない定数である。以下では $\det Q = 0$ でない限り、 $\det Q = -1$ となるように定数 κ を定める。そして、行列 Q の表すコニックを単に「コニック Q 」とよぶ。相称変換 A によってコニック Q は次のようなコニック Q' に写像される [5]。

$$Q' = A^{-1}Q(A^{-1})^T \quad (7)$$

5. コニックステレオ

式(3)を式(7)に代入すれば、次の式が得られる。

$$(I - ph^T)RQ'R^T(I - hp^T) = (1 - (p, h))^{2/3}Q \quad (8)$$

空間中のあるコニックに対して、カメラ 1 とカメラ 2 で撮像した画像をそれぞれコニック Q 、 Q' とし、カメラの相対的關係を表すパラメータを $\{R$ 、

$h\}$ とする。ただし R 、 h はそれぞれカメラ 1 を基準とした、カメラ 2 の回転および並進である (図 2)

カメラ 1 を基準とした支持平面の P ベクトルを p とすれば、これは式(8)により拘束される。ただし未知数が、9 個 (行列 R に 3 個、並進 h に 3 個、 P ベクトル p に 3 個) である。式(8)は対称行列の間の等式であるから、6 個の方程式が得られるが、式(8)の両辺の行列式は恒等的に -1 であるから、独立な方程式 5 個しかない。したがって式(8)だけでは解が定まらない。

以下ではカメラの配置が既知である場合を考える。このとき未知数は p のみとなるが、今度は方程式が過剰となる。そこでこれを利用して、次の最小二乗法によって解をロバストに求めることを考える。

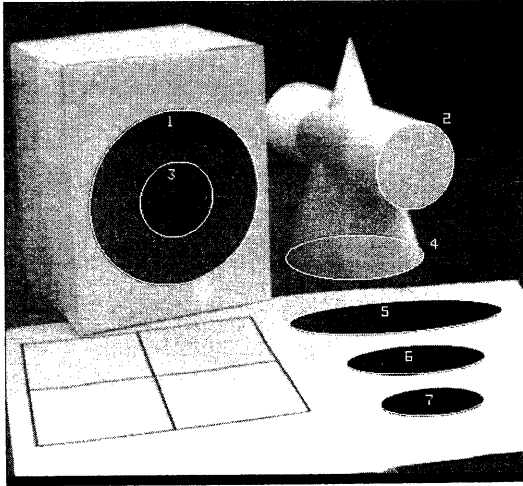
$$J(p) = \|(I - ph^T)RQ'R^T(I - hp^T) - (1 - (p, h))^{2/3}Q\|^2 \rightarrow \min \quad (9)$$

ただし $\|\cdot\|$ は行列のノルムであり、 $S = (S_{ij})$ に対して $\|S\|^2 = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2 (= \text{tr} S^2)$ と定義する。式(9)は非線形最適化問題であり、数値的な探索が必要となる。このとき次の 2 点が問題となる：

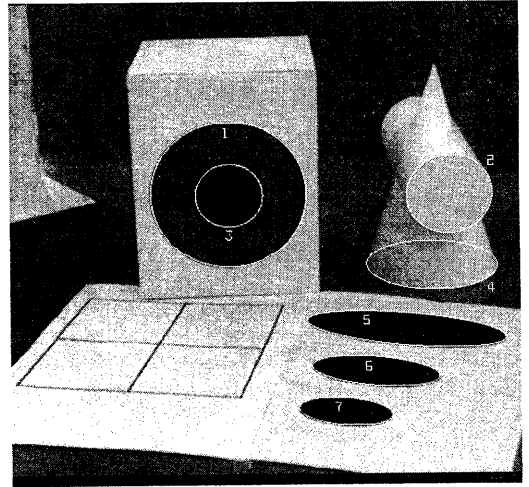
1. 探索が極小値に落ち込まないためには初期値が真の解に近くなければならないが、これをどのように選ぶか。
2. ライブラリルーチン (例えば準ニュートン法 [9]) を用いて数値探索するためには関数 J の勾配 $\nabla_p J(p)$ を計算する必要があるが、簡単な形では書けない。

第 1 点は瞬間運動の近似を用いて解決する。カメラの運動が微小であれば画像上の運動は「オプティカルフロー」で近似される [3]。こうすると問題が線形方程式を解くことに帰着するので、解が解析的に求まる (付録 1 参照)。第 2 点については吉田 [10] の開発した偏導関数自動導出システム ADDS を用いて、導関数プログラムを生成することにする。

図 3(a),(b) は 2 台のカメラで撮像した画像 (512 × 512 画素) である。まずコニックの当てはめは行なう。これに関してはいろいろな手法が発表されているが、ここでは文献 [2] の方法を用いた。残る問題はカメラキャリブレーションである。ここでは画像中の正方形の格子パターンを用いて 2 つのカメラの焦点距離 (単位は画素)、相対的回転軸 (単位ベクトル)、回転角、並進、およびカメラ 1 に対する平



(a)



(b)

図 3: コニック当てはめの実画像

面の勾配を計算する ([6, 7], 付録 2,3,4 参照)。その結果を表 1 に示す。本論文の方法によって計算した画像中のコニックの支持平面の P ベクトルを表 2 に示す。これから、直交すべき平面の方向はほぼ直交しており、同一平面上にあるコニックから計算すると、平面の方向はどれもほぼ同一の値が得られることがわかる。最大誤差は 2.6° 程度である。一方、異なる物体上のコニックでは、それぞれの支持平面は同一であっても向きに $7\text{--}10^\circ$ 程度の誤差が生じる。また部分的に当てはめたコニック (図 3 中の 4) を用いると精度が低下する。

6. 円形光投影による平面の計測

以上では 2 台のカメラで空間中のコニックを撮像する場合を考えたが、これを応用すると、1 台のカメラと 1 台の投光装置から空間中の平面の位置と向きを計測することができる。スポットライトのような光源から円形ボタンを空間中の平面に投影し、それをカメラで撮像する (図 4)。このとき光源が図 2 のカメラ 2 の役割をし、カメラ 2 に円形の画像が得られていることに相当する。

光源は画像面を持たないが、コニックの記述に必要な行列表示であり、キャリブレーションによって定めることができる。あらかじめ設置したスクリーンに投影像が円になるように光源を置き、そのスクリーンを仮想的な画像面と考える。そのスクリーンまでの距離が焦点距離 f に相当する。スクリーンを距離 d だけ平行移動して、円の投影像の半径が r_1 か

ら r_2 になったとすれば、 f は次のように与えられる (図 5)。

$$f = \frac{r_1 d}{r_2 - r_1} \quad (10)$$

そして、光源から見たコニックの行列表示は次のように与えられる。

$$Q' = \kappa' \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -r_1^2/f^2 \end{pmatrix}, \quad \kappa' = \left(\frac{f}{r_1}\right)^2 \quad (11)$$

この行列表示 Q' は光源自体に固有なものであって、対象面の位置や向き、あるいはその存在には依存しない。したがって、円形光を位置や向きが未知の平面に投影し、それをカメラで撮像し、コニック Q が得られたら、 Q と Q' から前節で述べたコニックステレオの手順で平面の P ベクトルが計算できる。

これを実験するために、円形ボタンのスライドフィルムを作製し、これをスライド投写機で平面に投影した。図 6(a),(b),(c) はこれを撮像した 3 通りの画像である。(a) の平面と (b) の平面との角度は 30° であり、(a) の平面と (c) の平面との角度は 45° である。これらの画像から計算した平面の向きと距離を示したものが表 3 である。計算した平面の間の角度はそれぞれ 30° と 48° であり、誤差は 3° の程度である。

この実験において、投光装置とカメラとの間の回転行列 R と並進ベクトル h は、あらかじめ既知

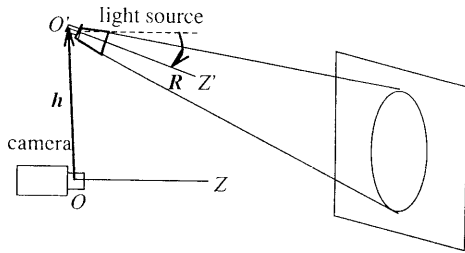


図 4: 円形ボタン投影

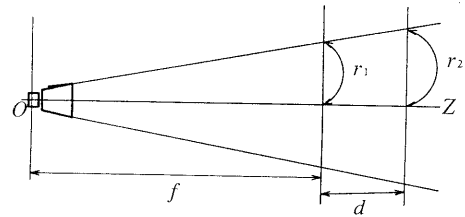


図 5: 投光装置のキャリブレーション

のボタンを投影することによって次のようにキャリブレーションを行なった。まず正方形格子ボタンのスライドフィルムを作り、それが正方形格子に写るようにスクリーンを置き、仮想的な画像面とする。そして、仮想的な焦点距離を円の場合と同様にして定め、頂点の N ベクトル $\{m'_\alpha\}$ を計算する。この格子ボタンをカメラで撮影して、対応する頂点の N ベクトル $\{m_\alpha\}$ を計算する。すると $\{m'_\alpha\}$ と $\{m_\alpha\}$ の対応からカメラの相対的運動 $\{R, h\}$ とスクリーンの P ベクトル p を解析的に計算することができる ([3], 付録 2 参照)。絶対的なスケールは付録 4 によって定めることができる。図 6(d) はキャリブレーションのために投影した正方形格子ボタンの実画像である。

このキャリブレーションの手間を考えると、円形ボタンの投影ではなく、初めから格子ボタンあるいは正方形ボタンを投影すればよさそうである。そうすればキャリブレーションの必要はない。しかし、その代わりに頂点同士の対応関係を知る必要があり、面が大きく傾いている場合は対応が明らかではない。また投影像が大きければすべての頂点が画像中に得られるとは限らない。

これに対して円形ボタンを投影すれば、キャリブレーションの必要はあるが対応点を求める必要はない。また、画像中にコニックの一部分のみが写っていても、コニック当てはめによって必要なデータが得られる(ただし写っている部分が少ないほど精度は低下する)。

7. まとめ

本論文では計算射影幾何学 [3, 4] の定式化を用いて、ステレオの手法で画像中のコニックから対応点を求めることなく 3 次元的位置と向きを計算する手法を示した。そして、実際の画像を用いて計算精度を検討した。最後に、これを応用して円形ボタン

の投影によって 1 台のカメラから平面の位置と向きを計測する方法を示した。

コニックは工業の現場で多く現れ、コニックの識別、当てはめの手法が数多く研究されている。カメラを搭載したロボットが移動する場合は初期画像に当てはめたコニックを連続的にずらしていく「スネーク」の手法を用いることも考えられる。そのような手法と組み合わせれば本論文で提案した方法は多くの場合で有効に利用できると思われる。

謝辞: 本研究の御指導を頂いた群馬大学の金谷健一教授に深く感謝します。また偏導関数自動導出システム ADDS を提供下さった電気通信大学の吉田利信助教授にも感謝します。最後に実験に協力して頂いた群馬大学金谷研究室の学生諸氏に感謝します。

表 1. カメラのパラメータ

カメラ 1 の焦点距離	1178
カメラ 2 の焦点距離	1906
カメラの回転角 ($^\circ$)	25.6
カメラの回転軸	$(-0.831, 0.265, 0.488)$
並進 (cm)	$(-9.67, -41.67, -9.95)$

表 2. 支持平面の単位法線ベクトルと距離

	単位法線ベクトル	距離 (cm)
1	$(0.350, -0.070, 0.934)$	90.0
2	$(0.435, -0.145, 0.889)$	83.7
3	$(0.338, -0.079, 0.938)$	90.3
4	$(-0.911, -0.147, 0.386)$	43.7
5	$(-0.866, -0.210, 0.455)$	50.4
6	$(-0.856, -0.203, 0.475)$	52.1
7	$(-0.850, -0.188, 0.492)$	53.4

表3. スクリーンの単位法線ベクトルと距離

	単位法線ベクトル	距離 (cm)
1	(-0.023, 0.218, 0.976)	240.1
2	(0.206, 0.632, 0.747)	204.3
3	(0.308, 0.801, 0.513)	161.3

文 献

- [1] D. Forsyth, et al., Invariant descriptions for 3-D object recognition and pose, *IEEE Trans, Pattern Anal. Machine Intell.*, **13** (1991), 971-991.
- [2] 岩崎利夫・金谷健一, コニック当てはめの統計的偏差と不偏推定法, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.
- [3] 金谷健一, 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [4] K. Kanatani, Computational projective geometry, *CVGIP :Image Understanding*, **54** (1991) 333-34.
- [5] 金谷健一, コニックの計算論と直交性解釈, 情報処理学会論文誌, 33-6 (1992), 817-824.
- [6] 金谷健一・浦沢康二, 消失点の推定とカメラキャリブレーションの統計的信頼性, 日本ロボット学会誌, 9-7 (1991), 813-820.
- [7] K. Kanatani and Y. Onodera, Anatomy of camera calibration using vanishing points, *IEICE Trans. Infor. Sys.* **74-10** (1991), 3369-3378.
- [8] 劉武・金谷健一, コニックの3次元解釈とその応用, 情報処理学会研究報告, 92-CV-76, 1992-01.
- [9] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1988.
- [10] 吉田利信, 偏導関数自動導出システム, 情報処理学会論文誌, 30-7(1989), 799-806.

付 録

1. 瞬間的運動の近似

カメラが物体に相対的に並進速度が $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ 、回転速度 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ で運動するとき、 Δt 秒後のカメラの運動パラメータ $\{R, h\}$ は次

のように与えられる。

$$R = I + \omega \times I \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (12)$$

$$h = v \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (13)$$

ただしベクトル u と行列 A に対して積 $u \times A$ は u と A の各列とのベクトル積からなる行列を表す。また $O(\Delta t^2)$ は Δt の2次以上の項である。式(12), (13)を式(3)に代入すると、相称変換の行列 A は次のようになる。

$$\begin{aligned} A &= \frac{(I - pv^T \Delta t + O(\Delta t^2))}{\sqrt[3]{1 - (p, v) \Delta t + O(\Delta t^2)}} \\ &= I + \left(\omega \times I + \frac{1}{3}(p, v)I - pv^T \right) \Delta t \\ &\quad + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (14)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限と考えると、画像上には $m = Wm$ で表されるオブテイカルフローが生じる。ただし、 $W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (A - I) / \Delta t$ である。式(14)より行列 W は次のように与えられる。

$$W = \omega \times I + \frac{1}{3}(p, v)I - pv^T \quad (15)$$

$A^{-1} = I - W \Delta t + O(\Delta t^2)$ であるから、式(8)より次の式が得られる。

$$\begin{aligned} Q' &= (I - W \Delta t + O(\Delta t^2)) Q \\ &\quad (I - W \Delta t + O(\Delta t^2))^T \\ &= Q - (WQ + QW^T) \Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (16)$$

コニック Q を時刻 t の関数とみなして、その変形速度 D を次の式で定義する。

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} Q(t)^{-1} = \dot{Q}(t) Q(t)^{-1} \quad (17)$$

式(16)から次の式が得られる。

$$WQ + QW^T = -DQ \quad (18)$$

式(15)を代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \omega \times Q + (\omega \times Q)^T + \frac{2}{3}(p, v)Q \\ - p(Qv)^T - (Qv)p^T = -DQ \end{aligned} \quad (19)$$

カメラの運動パラメータを $\{R, h\}$ とし、回転 R の回転角と回転軸をそれぞれ Ω, l (単位ベクトル)

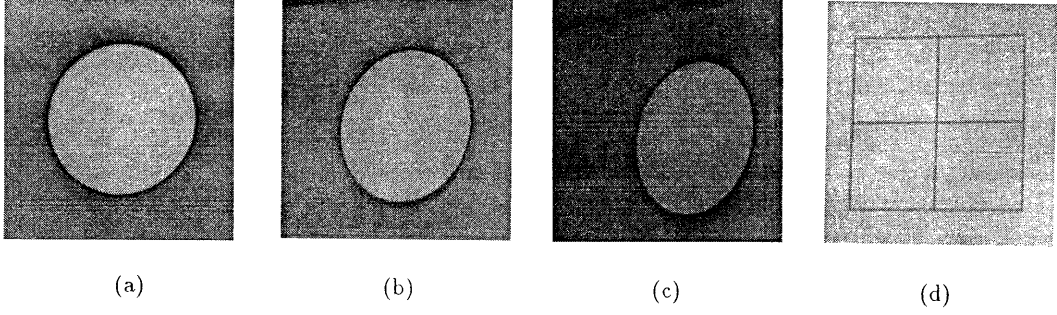


図 6: 円形パターンと正方格子パターンの実画像

とすれば、 $\Delta t = 1$ として、回転速度、並進速度はそれぞれ $\omega \approx \Omega l$ 、 $v \approx h$ と近似できる。式 (19) の左辺の DQ は $DQ \approx Q' - Q$ により近似できる。式 (19) に対する次の最小二乗法を考える。

$$\bar{J}(p) = \|\omega \times Q + (\omega \times Q)^T + \frac{2}{3}(p, v)Q - p(Qv)^T - (Qv)p^T + DQ\|^2 \rightarrow \min \quad (20)$$

ここで

$$u = Qv, \quad G = \frac{2}{3}Q, \quad (21)$$

$$S = DQ + \omega \times Q + (\omega \times Q)^T \quad (22)$$

と置き、 $\bar{J}(p)$ を p_i について偏微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{J}}{\partial p_i} = & 2(p, v)v_i \|G\|^2 - 4(p, v)(Gu)_i - \\ & 4v_i(Gu, p) + 2v_i(S, G) - 4(Su)_i + \\ & 4(u, p)u_i + 4\|u\|^2 p_i \end{aligned} \quad (23)$$

これを 0 と置いて整理すると次の線形方程式が得られる。

$$Tp = b \quad (24)$$

ただし行列 T 、ベクトル b を次のように定義する。

$$\begin{aligned} T = & \|G\|^2 vv^T - 2Gu v^T - 2v u^T G \\ & + 2uu^T + 2\|u\|^2 I \end{aligned} \quad (25)$$

$$b = 2Su - (S, G)v \quad (26)$$

ただし (\cdot, \cdot) は行列の内積であり、 $S = (S_{ij})$ 、 $G = (G_{ij})$ に対して $(S, G) = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} G_{ij}$ ($= \text{tr} S G^T$) である。式 (24) を解いて p の初期値が得られる。

シミュレーションによれば、カメラの回転角は 4° 程度のとき、この近似では P ベクトルの方向のく

いちがいが 45° 程度ある。 $\omega \times Q + (\omega \times Q)^T \approx RQ - QR$ であるから、式 (22) 中の $\omega \times Q + (\omega \times Q)^T$ を $RQ - QR$ で置き換えてもよい。こうするとカメラの回転が微小でないときもよい結果が得られる。

2. 平面運動の計算

平面上の特徴点 $\{P_\alpha\}$ 、 $\alpha = 1, \dots, N$ の N ベクトルがカメラ 1 に対して $\{m_\alpha\}$ であり、カメラ 2 に対して $\{m'_\alpha\}$ であるとき、カメラ 1 を基準としたカメラ 2 の運動パラメータ $\{R, h\}$ ($\|h\| = 1$) および平面の P ベクトル p は次のように計算できる (図 7)。ただし、カメラの運動が平面の同じ側で起こる場合 (場合 1) と平面の反対側に回り込む場合 (場合 2) を区別する。

1. $m_\alpha = (m_{\alpha(1)} m_{\alpha(2)} m_{\alpha(3)})^T$ 、 $m'_\alpha = (m'_{\alpha(1)} m'_{\alpha(2)} m'_{\alpha(3)})^T$ とするとき、次式で定義する 2 次の「モーメント行列」 $M = (M_{ij})$ および 4 次の「相関テンソル」 $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ を計算する。

$$M_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} \quad (27)$$

$$N_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha(i)} m'_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m'_{\alpha(l)} \quad (28)$$

2. テンソル $T = (T_{ijkl})$ を次のように計算する。

$$T_{ijkl} = M_{ik} \delta_{jl} - N_{ijkl} \quad (29)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

3. 9 次元行列 $\hat{T} = (\hat{T}_{\kappa\lambda})$ を $i = (\kappa - 1) \text{div} 3 + 1$ 、 $j = (\kappa - 1) \text{mod} 3 + 1$ 、 $k = (\lambda - 1) \text{div} 3 + 1$ 、 $l =$

$(\lambda - 1) \bmod 3 + 1$ とおき、 $\hat{T}_{\kappa\lambda} = T_{ijkl}$ と定義する。ただし div、mod はそれぞれ整数商、整数剰余の演算を表す。

4. 行列 \hat{T} の最小固有値に対するノルム $\sqrt{3}$ の 9 次元固有ベクトルを $\hat{A} = (\hat{A}_\kappa)$ とし、行列 $A = (A_{ij})$ を $A_{ij} = \hat{A}_{3(i-1)+j}$ によって定義する。

5. 対称行列 AA^T の固有値を $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2 (> 0)$ とし、対応する固有ベクトル $\{u_1, u_2, u_3\}$ を互いに直交してこの順に右手系をつくる単位ベクトルにとる。

6. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ であれば、運動パラメータは

$$R = A, \quad h = 0 \quad (30)$$

であり、平面の P ベクトル p は不定である。そうでなければ、次のように解が得られる。

7. 場合 1 では P ベクトル p は次のように定まる。

$$p = \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}} \left(\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} u_1 \pm \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} u_3 \right) \quad (31)$$

場合 2 では P ベクトル p は次のように定まる。

$$p = \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}} \left(\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} u_1 \pm \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} u_3 \right) \quad (32)$$

8. 場合 1 では単位並進 h は次のように定まる。

$$h = \frac{-\sigma_3 \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} u_1 \pm \sigma_1 \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} u_3}{\sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}} \quad (33)$$

場合 2 では単位並進 h は次のように定まる。

$$h = \frac{\sigma_3 \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} u_1 \pm \sigma_1 \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} u_3}{\sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}} \quad (34)$$

9. 場合 1 では回転行列 R は次のように定まる。

$$R = \frac{1}{\sigma_2} \left(I + \sigma_2^3 p h^T \right) A \quad (35)$$

場合 2 では回転行列 R は次のように定まる。

$$R = \frac{1}{\sigma_2} \left(-I + \sigma_2^3 p h^T \right) A \quad (36)$$

10. それぞれの解について、 p と h の符号を同時に反転させたものも解である。

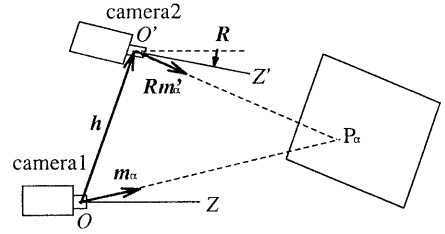


図 7: 平面運動の計算

3. 焦点距離の決定

1. 空間中で互いに直交する平行な 2 組の直線（正方形格子ボタン）を投影した画像を取り込む。
2. 格子画像に 2 値化、細線化を行なう、得られたエッジに直線を最小二乗法で当てはめる。
3. 2 組の直線群のそれぞれについて共通の交点（「消失点」）を最適最小二乗法によって計算する [6, 7]。
4. 仮の焦点距離 \hat{f} を用いて、それぞれの消失点の N ベクトル $m = (m_1, m_2, m_3)^T$ 、 $m' = (m'_1, m'_2, m'_3)^T$ を計算する。
5. 次の式より、真の焦点距離の値 f を求める。

$$f = \hat{f} \sqrt{\frac{m_1 m'_1 + m_2 m'_2}{m_3 m'_3}} \quad (37)$$

4. スケールの決定

1. 空間中の単位法線ベクトル n を持つ平面上に点 A と点 B をとる。点 A, B 間の距離を w とし、点 A と点 B の N ベクトルをそれぞれ m_A, m_B とすると、視点 O から平面までの距離 d は次のように与えられる。

$$d = w \left\| \frac{m_A}{(n, m_A)} - \frac{m_B}{(n, m_B)} \right\| \quad (38)$$

2. 並進が単位ベクトル h であるとして計算した平面の P ベクトルを p とすると、平面までの距離が d のときの真の並進 \bar{h} と真の P ベクトル \bar{p} は次のように与えられる。

$$\bar{h} = d \|p\| h, \quad \bar{p} = \frac{p}{d \|p\|} \quad (39)$$