

くりこみ法によるオプティカルフローの3次元復元

岩崎 利夫 金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科
〒376 桐生市天神町 1-5-1

あらまし 本論文では、一般形状の曲面に相対的なカメラの運動によって生じるオプティカルフローが得られたとき、その3次元運動と曲面の形状を計算する新しいアルゴリズムを提案する。従来の方法では反復や探索が必要であったが、本論文の解法は解析的な公式で直接的に与えられ、誤差に対してもロバストである。これは「基本パラメータ」と「ねじれフロー」によって記述された「エピ極線方程式」を最小二乗法によって解いたものである。しかし画像に誤差があれば得られた解には統計的偏差が存在する。そこで、反復によって誤差の挙動を推定しながら偏差を取り除く「くりこみ法」と呼ぶ手法を提案する。さらに、ノイズを加えたシミュレーションによってこの方法の有効性を示す。

和文キーワード オプティカルフロー、ねじれフロー、エピ極線方程式、統計的誤差解析、不偏推定、くりこみ法

3-D Recovery of Optical Flow by Renormalization

Toshio Iwasaki and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Abstract This paper presents a new algorithm for computing 3-D interpretation from optical flow induced by a general camera motion relative to a surface of general shape. While existing methods require numerical search, our method is given by a direct analytical formula and is robust to image noise. This method is based on the “epipolar equation” written in terms of the “essential parameters” and “twisted flow”. It can be shown that the computed solution is statistically biased in the presence of noise. We present a new scheme called “renormalization”, which iteratively removes the statistical bias by automatically adjusting to the image noise. Its effectiveness is demonstrated by random number simulations.

英文 key words **optical flow, twisted flow, epipolar equation, statistical error analysis, unbiased estimation, renormalization**

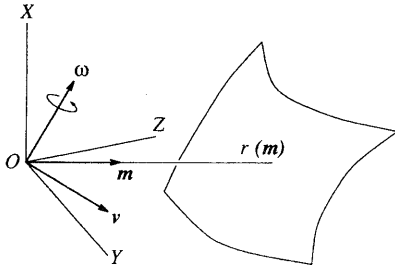


図1: 空間中から見た記述: 運動パラメータ $\{\omega, v\}$ と距離写像 $r(m)$

1. 序論

物体がカメラに対して相対的に微小な運動をするとき、画面上にその運動を投影したものを「オプティカルフロー」と呼ぶ。これは理論的には瞬間的運動の速度場として扱える。

オプティカルフローからの3次元復元に関しては従来から多く研究されてきたが[1, 2, 4, 6, 7, 8, 10], その多くは数値的な探索による解法であった。探索を必要としない解法は田川ら[9]によって提案された。本論文ではこれを洗練した解析的アルゴリズムを構成する。これは基本パラメータとねじれフローによって記述されるエビ極線方程式を最小二乗法によって解くものである。しかし画像に誤差があれば得られた解には統計的偏差が存在する。そこで、反復によって誤差の挙動を推定しながら偏差を取り除くくりこみ法と呼ぶ方法を提案する。さらに、乱数を用いた数値実験によってこの方法の有効性を確認する。

2. オプティカルフローの方程式

カメラのレンズの中心を原点 O とし、レンズの光軸を Z 軸とする XYZ 座標系をとる。原点 O を視点、定数 f を焦点距離と呼ぶ。画面上の点は視点 O からその点に向かう単位ベクトル m によって指定される。 m を N ベクトルと呼ぶ[5]。また、視点 O から N ベクトル m の方向の物体面までの距離 $r(m)$ を距離写像と呼ぶ(図1)。

今、カメラが視点 O の周りに回転速度 ω 、並進速度 v の瞬間的な運動をしているとする。 $\{\omega, v\}$ を運動パラメータと呼ぶ。カメラ座標系から見れば、 N ベクトルはある速度 \dot{m} で変化する。この \dot{m} を N 速度と呼ぶ[5]。 N ベクトル m は単位ベクトルであるから、常に $(m, \dot{m}) = 0$ が成立する。ただし (\cdot, \cdot) はベクトルの内積を表す。本論文では \dot{m} を m の関数とみなした $\dot{m}(m)$ をオプティカルフローと呼び、それが定義され

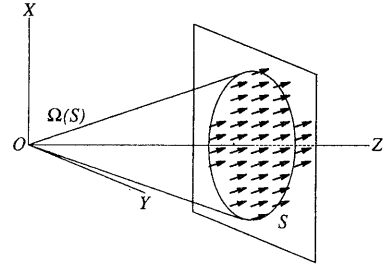


図2: カメラから見た記述: オプティカルフローが視野 $\Omega(S)$ 内に定義される。

ている立体角 $\Omega(S)$ を視野と呼ぶ(図2)。 S はフローが定義されている画像上の領域を表す。

ベクトル m を法線とする平面へのベクトル a の正射影は、

$$P_m = I - mm^T \quad (1)$$

とおくと $P_m a$ で表される(図3)。 P_m は射影行列[5]である。

【命題1】 距離写像 $r(m)$ をもつ物体面に対するカメラの運動 $\{\omega, v\}$ によって、次のオプティカルフローが生じる。

$$\dot{m} = -\omega \times m - \frac{P_m v}{r(m)} \quad (2)$$

(証明) カメラが回転速度 ω で回転すれば、物体面はカメラに相対的に回転速度 $-\omega$ で回転する。これによって $\dot{m} = -\omega \times m$ のフローが生じる。一方、カメラが並進速度 v で並進すれば物体面はカメラに相対的に並進速度 $-v$ で並進する。視線に沿った並進では画面上に運動が生じず、それに直交する成分 $-P_m v$ のみが観測される。その大きさは物体面までの距離 $r(m)$ に反比例するので、 $\dot{m} = -P_m v / r(m)$ のフローが生じる。観測されるフローはこれら二つの合成である。□

3. オプティカルフローの3次元解釈

式(2)より $\{\omega, v\}, r(m)$ が解ならば任意の零でない定数 k に対して $\{\omega, kv\}, kr(m)$ も解である。これはカメラから遠いところでの大きな運動と近いところでの小さな運動の区別がつかないことを意味する。入力データが N 速度 (= 視線の変化速度) という $1/\text{sec}$ の次元をもつ量であるため、これから長さの次元をもつ量が導けないのは当然である。そこで $v \neq 0$ のとき $\|v\| = 1$ と正規化する。 $v = 0$ のときは $\dot{m} = m \times \omega$ であり、距離写像 $r(m)$ は不定である。

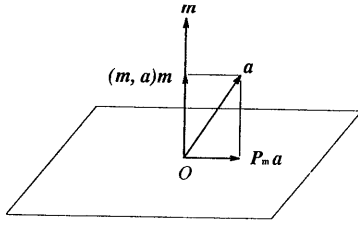


図3: 射影行列 P_m

フローに誤差があるときに $v = 0$ かどうかを判定するには

$$\int_{\Omega(S)} \|\dot{m} - m \times \omega\|^2 d\Omega(m) \rightarrow \min \quad (3)$$

となるようにベクトル ω を定め、適当な許容誤差 ϵ を用いてすべての $m \in \Omega(S)$ に対して $\|\dot{m} - m \times \omega\| < \epsilon$ かどうかを調べればよい。積分 $\int_{\Omega(S)} d\Omega(m)$ はフローの定義されているすべての画素での総和を表すが、フローの信頼度を示す重みを導入するのが望ましい(後述)。式(3)の最小化の解 ω は

$$M = \int_{\Omega(S)} m m^T d\Omega(m) \quad (4)$$

$$b = \int_{\Omega(S)} \dot{m} \times m d\Omega(m) \quad (5)$$

とおくとき次のように与えられる(証明省略)。

$$\omega = (\Omega(S)I - M)^{-1} b \quad (6)$$

距離写像 $r(m)$ は式(2)から計算できる。フローに誤差があるときは、

$$\|\dot{m} + \omega \times m + \frac{P_m v}{r(m)}\|^2 \rightarrow \min \quad (7)$$

となるように距離写像 $r(m)$ を計算すれば、解 $r(m)$ が次のように与えられる(証明省略)。

$$r(m) = \frac{1 - (m, v)^2}{|m, \omega, v| - (\dot{m}, v)} \quad (8)$$

ただし $|a, b, c|$ は、ベクトル a, b, c のスカラー三重積である。式(8)を運動視差方程式と呼ぶ。 $\{\omega, v\}, r(m)$ が式(2)の解ならば $\{\omega, -v\}, -r(m)$ も解であるが、式(8)の距離 $r(m)$ が正になるように v の符号を選ぶ。ただし、フローに誤差があればすべての $m \in \Omega(S)$ で $r(m) > 0$ となるとは限らないので、

$$\int_{\Omega(S)} (|m, \omega, v| - (\dot{m}, v)) d\Omega > 0 \quad (9)$$

とするのが実際的である。

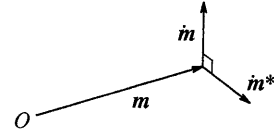


図4: ねじれフロー

4. ねじれフローとエビ極線方程式

運動パラメータ $\{\omega, v\}$ を計算するにはフロー \dot{m} の代わりに、N速度 \dot{m} を m の周りに 90° 回転した \dot{m}^* を考えるのが都合がよい。 \dot{m}^* をねじれフローと呼ぶ(図4)。N速度 \dot{m} は m に直交するから

$$\dot{m}^* = m \times \dot{m} \quad (10)$$

である。また対称行列 K を次のように定義する。

$$K = (\omega, v)I - \frac{1}{2}(\omega v^T + v \omega^T) \quad (11)$$

$\{K, v\}$ を基本パラメータと呼ぶ。任意の対称行列 K と単位ベクトル v が与えられたとき、式(11)を満たすベクトル ω が存在するとは限らない。存在するとき $\{K, v\}$ は分解可能であるという。

【命題2】 $\{K, v\}$ が分解可能である必要十分条件は次のように表せる。

$$(v, K v) = 0 \quad (12)$$

$$K = \frac{1}{2} \text{tr} K (I - v v^T) + K v v^T + v v^T K \quad (13)$$

(証明) K があるベクトル ω に対して式(11)を満たしていれば、直接代入することによって式(12), (13)が確かめられる。逆に K が式(12), (13)を満たしていれば、

$$\omega = \frac{1}{2}(\text{tr} K)v - 2K v \quad (14)$$

と定義して K を式(11)のように表すことができる。□

射影行列 P_m を用いれば、式(11)から次の式が成り立つ。

$$(m, K m) = (\omega, P_m v) = (v, P_m \omega) \quad (15)$$

【定理1】 フロー \dot{m} に対してそれを生じる距離写像 $r(m)$ が存在する必要十分条件は、すべての $m \in \Omega(S)$ に対して次式を満たす基本パラメータ $\{K, v\}$ が存在することである。

$$(\dot{m}^*, v) + (m, K m) = 0 \quad (16)$$

(証明) 命題 1 と \dot{m}^* の定義(10)より

$$\dot{m}^* + P_m \omega = -\frac{m \times v}{r(m)} \quad (17)$$

が得られる(詳細省略). この式を満たすスカラー関数 $r(m)$ が存在する必要十分条件はベクトル $\dot{m}^* + P_m \omega$ がベクトル $m \times v$ に平行であることである. すなわち

$$(\dot{m}^* + P_m \omega) \times (m \times v) = 0 \quad (18)$$

一方 \dot{m}^* と $P_m \omega$ の定義から $(\dot{m}^*, m) = 0$, $(P_m \omega, m) = 0$ であるから, 式(18)は

$$((\dot{m}^*, v) + (P_m \omega, v))m = 0 \quad (19)$$

と書ける. 式(15)から, これがすべての $m \in \Omega(S)$ で成立する条件は式(16)である. \square

式(16)は有限運動に対する「エビ極線方程式」の瞬間的極限であることが示せるので(証明省略), これもエビ極線方程式と呼ぶ.

5. 解析的アルゴリズム

基本パラメータ $\{K, v\}$ には 8 個の独立な要素があり, エビ極線方程式(16)は $\{K, v\}$ について線形であるから, 8 画素のねじれフローについて式(16)を解けば $\{K, v\}$ が計算できる(「8 点アルゴリズム」). 回転速度 ω は式(14)によって与えられる.

しかし, これはフローに誤差がないときの話であり, 実際的ではない. 誤差があってもロバストに計算できるように最適化

$$J = \int_{\Omega(S)} ((\dot{m}^*, v) + (m, K m))^2 d\Omega(m) \rightarrow \min \quad (20)$$

を考える. しかし, この J を最小にする解析解を得るのは困難である. そこで妥協として分解可能条件(13)を無視して基本パラメータ $\{K, v\}$ を独立変数とみなす. フローに誤差がなければ J は最小値 0 をとるので誤差が小さければよい近似値が得られると期待される. ただし, 得られた K が分解可能条件(13)を満たすとは限らないので, 次の最小化によって回転速度 ω を推定する.

$$\|K - (\omega, v)I + \frac{1}{2}(\omega v^T + v \omega^T)\|^2 \rightarrow \min \quad (21)$$

左辺を ω の各成分で微分して 0 とおくと, 解が次のように得られる(詳細省略).

$$\omega = \frac{1}{2}(\text{tr}K + 3(v, K v))v - 2K v \quad (22)$$

与えられたねじれフロー \dot{m}^* に対してテンソル $\mathcal{L} = (L_{ij})$, $\mathcal{M} = (M_{ijk})$, $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ を次のように定義する.

$$L_{ij} = \int_{\Omega(S)} \dot{m}_i^* \dot{m}_j^* d\Omega(m) \quad (23)$$

$$M_{ijk} = \int_{\Omega(S)} \dot{m}_i^* m_j m_k d\Omega(m) \quad (24)$$

$$N_{ijkl} = \int_{\Omega(S)} m_i m_j m_k m_l d\Omega(m) \quad (25)$$

テンソル \mathcal{N} の逆テンソル $\mathcal{N}^{-1} = (N_{ijkl}^{-1})$ を次のように定義する(付録 1). ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタである.

$$\sum_{k,l=1}^3 N_{ijkl}^{-1} N_{klmn} = \delta_{im} \delta_{jn} \quad (26)$$

以上より次の定理が得られる.

【定理 2】 並進速度 $v = (v_i)$ は次の行列 $A = (A_{ij})$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる.

$$A_{ij} = L_{ij} - \sum_{k,l,m,n=1}^3 M_{ikl} N_{klmn}^{-1} M_{jmn} \quad (27)$$

回転速度 ω は式(22)で与えられる. ただし $K = (K_{ij})$ は次のように定義した対称行列である.

$$K_{ij} = - \sum_{k,l,m=1}^3 N_{ijkl}^{-1} M_{mkl} v_m \quad (28)$$

(証明) テンソル \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} を式(23), (24), (25)で定義すると, 式(20)の J は次のように書ける.

$$J = \sum_{i,j=1}^3 v_i L_{ij} v_j + 2 \sum_{i,j,k=1}^3 v_i M_{ijk} K_{jk} + \sum_{i,j,k,l=1}^3 K_{ij} N_{ijkl} K_{kl} \quad (29)$$

固定した $v = (v_i)$ に対してこれが最小となるのは $\partial J / \partial K_{ij} = 0$, すなわち

$$\sum_{k,l=1}^3 N_{ijkl} K_{kl} = - \sum_{m=1}^3 M_{mij} v_m \quad (30)$$

のときである. この解は式(28)で与えられる. 式(28), (30)から式(29)は次のように書ける.

$$J = \sum_{i,j=1}^3 v_i \left(L_{ij} - \sum_{k,l,m,n=1}^3 M_{ikl} N_{klmn}^{-1} M_{jmn} \right) v_j \quad (31)$$

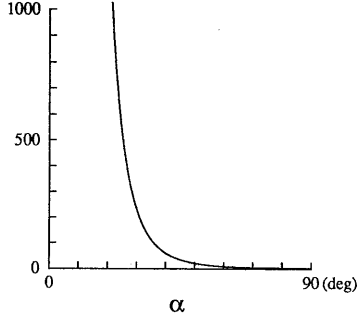


図5: テンソル \mathcal{N} の条件数

行列 $\mathbf{A} = (A_{ij})$ を式(27)のように定義すれば $\mathbf{J} = (\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v})$ と書ける. これを最小にするのは \mathbf{v} が \mathbf{A} の最小固有値に対する単位固有ベクトルのときである. 口

式(20), (23)~(25)の積分 $\int_{\Omega(S)} d\Omega(\mathbf{m})$ はフローが定義されている画素すべてに渡る総和を表すが, 実際問題としてはフローの精度はすべての画素で同じではない. 例えば濃淡変化の激しいところでは信頼性が高く, 濃淡がほぼ一定の領域では信頼性が低い. またフローの検出には何らかの拘束条件(フローの滑らかさ等)が必要であり, 精度は拘束条件にも依存する. したがって, 検出したフローの信頼度を適切に評価して, それを重みとする総和を用いるのが望ましい.

一方, 式(25)からわかるように, テンソル \mathcal{N} はフローに無関係に視野 $\Omega(S)$ の幾何学的形状のみから定まり, 誤差を含んでいない. 式(30)は \mathcal{N} を係数とする連立方程式であるから, その解が右辺に入る誤差を拡大しないためには行列式が大きく, 条件数(=最大固有値/最小固有値)が小さいほうがよい. 図5は円錐状の視野に対する \mathcal{N} の条件数を示したものである. ただし, 視野の円錐の頂角の半分を α とする. これから, 安定な3次元復元には大きな視野が必要であることがわかる.

6. 統計的偏差とくりこみ法

$\hat{\mathbf{m}}^*$ が正確なねじれフローであるとすると, 観測されるのは誤差を含んだ $\hat{\mathbf{m}}^* = \mathbf{m}^* + \Delta\mathbf{m}^*$ である. $\hat{\mathbf{m}}^*$ と \mathbf{m}^* はともに \mathbf{m} に直交するので, 誤差 $\Delta\mathbf{m}^*$ も \mathbf{m} に直交する. 誤差 $\Delta\mathbf{m}^*$ を \mathbf{m} の周りに等方的に分布する確率変数とみなし, 各 \mathbf{m} に独立に発生するとする. \mathbf{m} のモーメント行列 \mathbf{M} を

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega(S)} \mathbf{m}\mathbf{m}^T d\Omega(\mathbf{m}) \quad (32)$$

とすれば, 式(27)の行列 \mathbf{A} には

$$E[\Delta\mathbf{A}] \approx \frac{\epsilon^2}{2f^2} (\Omega(S)\mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (33)$$

の統計的偏差が存在する(付録2). ただし ϵ はフローの誤差の絶対値の標準偏差であり, f は焦点距離(視点から画像面までの距離)である. 並進速度 \mathbf{v} は \mathbf{A} の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられるので, 固有値問題の摂動定理[5]によれば, \mathbf{v} には $E[\Delta\mathbf{v}] = O(E[\Delta\mathbf{A}]) = O(\epsilon^2/f^2)$ の統計的偏差が存在する. 式(33)より, $c = \epsilon^2/2f^2$ とおいて行列 $\hat{\mathbf{A}}$ を

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - c(\Omega(S)\mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (34)$$

と定義し, これを \mathbf{A} の代わりに用いれば \mathbf{v} の不偏推定値が得られる. $\hat{\mathbf{A}}$ を厳密なねじれフローから計算した行列とすれば, 定数 c は $E[\hat{\mathbf{A}}] = \hat{\mathbf{A}}$ となるように選ぶべきであるが, 誤差の統計的挙動が未知であればこれは不可能である. 一方, $E[\hat{\mathbf{A}}] = \hat{\mathbf{A}}$ であれば, $\hat{\mathbf{v}}$ を厳密な並進速度とすると, 次の関係が成り立つ.

$$E[(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{v}})] = (\hat{\mathbf{v}}, E[\hat{\mathbf{A}}]\hat{\mathbf{v}}) = (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad (35)$$

なぜなら式(20)の \mathbf{J} は $\mathbf{J} = (\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v})$ と書け, 誤差がないときには真の解 $\bar{\mathbf{v}}$ に対して0になるからである. そこで毎回の反復において $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}) = 0$ になるように c を選ぶ. 現在の c と $\hat{\mathbf{A}}$ に対して $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}) \neq 0$ であったとすれば

$$\hat{\mathbf{A}}' = \hat{\mathbf{A}} - \frac{(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v})}{\Omega(S) - (\mathbf{v}, \mathbf{M}\mathbf{v})} (\Omega(S)\mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (36)$$

とおけば $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{A}}'\mathbf{v}) = 0$ となる. 行列 $\hat{\mathbf{A}}$ の最小固有値は $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v})$ であるから, 次の手順が得られる. これをくりこみ法と呼ぶ.

procedure renormalization($\hat{\mathbf{m}}^*$)

1. テンソル $\mathcal{L} = (L_{ij})$, $\mathcal{M} = (M_{ijk})$, $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ を式(23), (24), (25)によって計算し, テンソル \mathcal{N} の逆テンソル $\mathcal{N}^{-1} = (N_{ijkl}^{-1})$ を計算する(付録2). また, モーメント行列 $\mathbf{M} = (M_{ij})$ を式(32)で計算する.
2. $c = 0$ とおく.
3. 行列 $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_{ij})$ を次のように計算する.

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ij} = & L_{ij} - \sum_{k,l,m,n=1}^3 M_{ikl} N_{klmn}^{-1} M_{jmn} \\ & - c(\Omega(S)\delta_{ij} - M_{ij}) \end{aligned} \quad (37)$$

4. 行列 A の最小固有値に対する単位固有ベクトルを v とし, 最小固有値を λ_m とする.
5. 次のように c を更新する.

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_m}{\Omega(S) - (v, Mv)} \quad (38)$$

6. 更新が収束していなければ 3. に戻る. 収束していれば式(28)の K を計算し, それを用いて回転速度 ω を式(22)で計算する. そして $\{\omega, v\}$ を返す.

7. 数値実験

壁が格子模様である長方形の部屋の中をカメラが移動する場面を想定してシミュレーションした例を示す. 図 6(a) は 512×512 画素の画像上に観測されるオブティカルフローであり, 図 6(b) はそのねじれフローである. 正確なデータから運動パラメータと距離写像を計算すると正しい結果が得られる. 各フローの x, y 成分に標準偏差が 1 画素であるような正規乱数を誤差として加える. これから計算した 3 次元形状の 1 例を図 7(a), (b) に示す. 破線は真の形状である.

図 8(a), (b) は 100 回の異なる誤差を用いて計算した運動パラメータ $\{\omega, v\}$ の真の値からの誤差をヒストグラムにしたものである. ただし, 回転速度 ω の誤差は角速度 $\|\omega\|$ (deg/sec) の差で表し, 並進速度 v (単位ベクトル) の誤差は方向の違い (deg) で示している. これをみると, 統計的偏差が存在することがわかる.

図 9(a), (b) はくりこみ法を用いた場合のヒストグラムである. 統計的偏差がかなり取り除かれていることが分かる. くりこみ法の収束は速く, 4~5 回の反復で十分である. これは 2 次の収束であることが証明できる [3].

上例では誤差の影響をみやすいようにフローの与えられている点を比較的粗にとっているが, 全画素に対してフローが密に与えられていれば, フローの誤差がそれに応じて大きい場合に相当している.

8. まとめ

本論文では一般形状をもつ物体面に対するカメラの瞬間的運動を考え, 画像面上に生じるオブティカルフローから 3 次元復元を行なう解析的アルゴリズムを構成した. そして, 反復によって誤差の挙動を推定しながら偏差を取り除く「くりこみ法」と呼ぶ方法を提案し, 乱数を用いた数値実験によってこの方法の有効性を確認した. くりこみ法は計算が単純で収束も速く, オブティカルフローの 3 次元復元の標準的手法になると思われる.

実際問題としては, オブティカルフローの検出精度が問題であるが, 先に述べたように検出したフローの信頼度を適切に評価して, それを重みとする総和を用いれば信頼できる解が得られると期待できる. 数年前まではオブティカルフローの検出は時間を要する困難な問題と思われていたが, 今日ではワークステーションの普及によって計算能力が高まっているので, オブティカルフロー検出はコンピュータビジョンの最も基本的な処理のひとつになると思われる.

謝辞 本研究に関して貴重な示唆を頂いた東京都立大学の田川憲男助手に感謝します.

参考文献

- [1] A. Bruss and B. K. P. Horn, Passive navigation, *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **21** (1983), 3-20.
- [2] D. J. Heeger and A. D. Jepsen, Subspace methods for recovering rigid motion I: Algorithm and implementation, *Int. J. Comput. Vision*, **7** (1992) 95-117.
- [3] 岩崎利夫, 丸山 保, 金谷健一: くりこみ法によるコニック当てはめ, 情報処理学会研究報告, 92-CV-79, 1992-09.
- [4] 梶浦義弘, 大西 昇, 杉江 昇: 回転探索法による運動物体の 3 次元運動パラメータ推定法, 電子情報通信学会論文集 D-II, **J75-D-II-5** (1992) 873-882.
- [5] 金谷健一: 「画像理解 / 3 次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [6] H. C. Longuet-Higgins and K. Prazdny, The interpretation of a moving retinal images, *proc. Roy. Soc. Lond.*, **B-208** (1980), 385-397.
- [7] K. Prazdny, Determining the instantaneous direction of motion from optical flow generated by a curvilinearly moving observer, *Comput. Graphics Image Process.*, **17** (1981), 238-248.
- [8] K. Prazdny, On the information in optical flow, *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **22** (1983), 239-269.
- [9] 田川憲男, 鳥生 隆, 遠藤利生: オブティカルフローを用いた閉形式の 3 次元剛体運動復元方式, 電子情報通信学会技術研究報告 IE90-108/PRU 90-139, 1991, pp.23-29.
- [10] Y. Yasumoto and G. Medioni, Robust estimation of three-dimensional motion parameters from image sequences, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **8** (1986), 464-471.

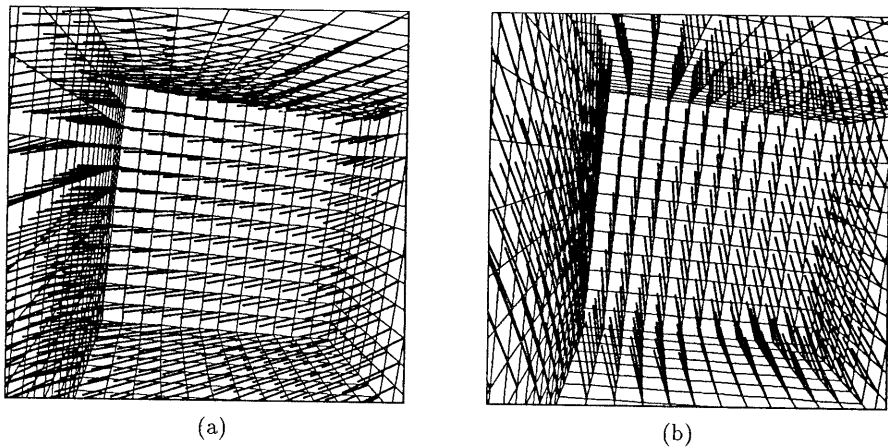


図 6: (a) オプティカルフロー. (b) ねじれフロー.

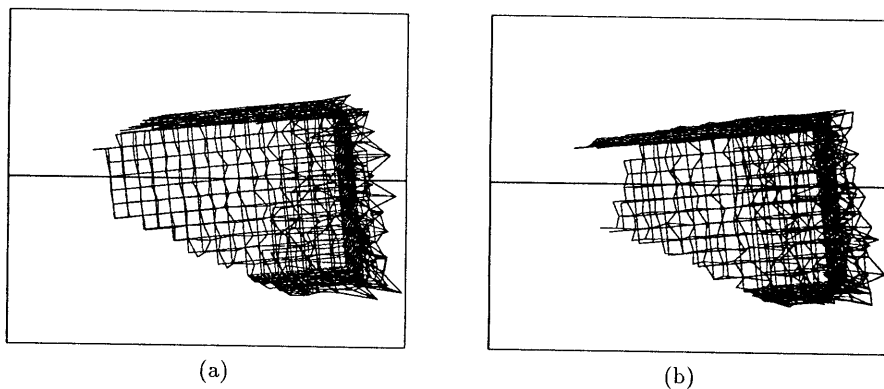


図 7: (a) 横から見た形状. (b) 上から見た形状.

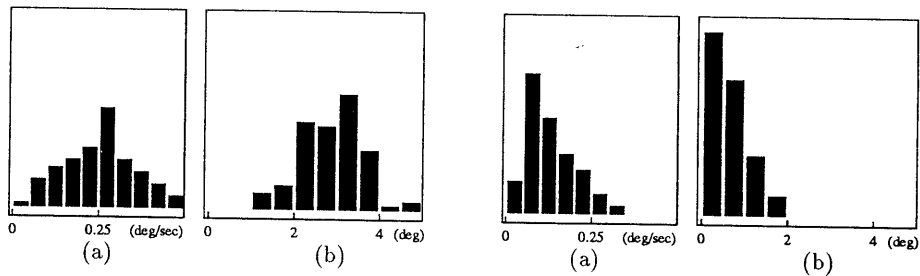


図 8: (a) 回転速度の誤差. (b) 並進速度の誤差. くりこみ法を用いない場合. 図 9: (a) 回転速度の誤差. (b) 並進速度の誤差. くりこみ法を用いた場合.

< 付録 1 > 逆テンソル \mathcal{N}^{-1} の計算

テンソル $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ は (ij) , (kl) について対称であり、次のように対称行列 $\mathbf{A} = (A_{ij})$ から対称行列 $\mathbf{B} = (B_{ij})$ への線形写像を定義する。

$$\mathbf{B}_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 N_{ijkl} A_{kl} \quad (39)$$

これを次のように書く。

$$\mathbf{B} = \mathcal{N} \mathbf{A} \quad (40)$$

対称行列 $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ は 6 つの独立な要素を持つので、それぞれ 6 次元ベクトル

$$(A_{11}, \sqrt{2}A_{12}, A_{22}, \sqrt{2}A_{13}, \sqrt{2}A_{23}, A_{33})^T$$

$$(B_{11}, \sqrt{2}B_{12}, B_{22}, \sqrt{2}B_{13}, \sqrt{2}B_{23}, B_{33})^T$$

とみなす。テンソル $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ も 6 次元行列

$$\begin{pmatrix} N_{1111} & \sqrt{2}N_{1112} & N_{1122} \\ \sqrt{2}N_{1211} & 2N_{1212} & \sqrt{2}N_{1222} \\ N_{2211} & \sqrt{2}N_{2212} & N_{2222} \\ \sqrt{2}N_{1311} & 2N_{1312} & \sqrt{2}N_{1322} \\ \sqrt{2}N_{2311} & 2N_{2312} & \sqrt{2}N_{2322} \\ N_{3311} & \sqrt{2}N_{3312} & N_{3322} \\ \sqrt{2}N_{1113} & \sqrt{2}N_{1123} & N_{1133} \\ 2N_{1213} & 2N_{1223} & \sqrt{2}N_{1233} \\ \sqrt{2}N_{2213} & \sqrt{2}N_{2223} & N_{2233} \\ 2N_{1313} & 2N_{1323} & \sqrt{2}N_{1333} \\ 2N_{2313} & 2N_{2323} & \sqrt{2}N_{2333} \\ \sqrt{2}N_{3313} & \sqrt{2}N_{3323} & N_{3333} \end{pmatrix}$$

とみなせば、式(40)は“ベクトル” \mathbf{B} が“行列” \mathcal{N} と“ベクトル” \mathbf{A} の積であるとみなせる。行列 \mathcal{N} の逆行列を \mathcal{N}^{-1} とすれば

$$\mathbf{A} = \mathcal{N}^{-1} \mathbf{B} \quad (41)$$

となる。行列 \mathcal{N}^{-1} をテンソルとみなすと、式(41)は

$$\mathbf{B}_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 N_{ijkl}^{-1} A_{kl} \quad (42)$$

と書ける。すなわち $\mathcal{N}^{-1} = (N_{ijkl}^{-1})$ がテンソル $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ の逆テンソルである。

< 付録 2 > 統計的偏差

テンソル $\mathcal{L} = (L_{ij})$, $\mathcal{M} = (M_{ijk})$ の定義より、それぞれの期待値は次のようになる。

$$E[L_{ij}] = \int_{\Omega(S)} E[\dot{m}_i^* \dot{m}_j^*] d\Omega(\mathbf{m}) \quad (43)$$

$$E[M_{ijk}] = \int_{\Omega(S)} E[\dot{m}_i^* m_j m_k] d\Omega(\mathbf{m}) \quad (44)$$

一方、テンソル \mathcal{N} はフローに無関係であるから、誤差の影響を受けない。誤差の仮定より次の式が成り立つ。

$$E[\Delta \dot{\mathbf{m}}^*] = 0 \quad (45)$$

$$E[\Delta \dot{\mathbf{m}}^* \Delta \dot{\mathbf{m}}^{*T}] = \frac{\epsilon^2}{2f^2} (\mathbf{I} - \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \quad (46)$$

したがって次の関係が成り立つ。

$$E[\dot{\mathbf{m}}^*] = E[\dot{\mathbf{m}}^* + \Delta \dot{\mathbf{m}}^*] = \dot{\mathbf{m}}^* \quad (47)$$

$$\begin{aligned} E[\dot{\mathbf{m}}^* \dot{\mathbf{m}}^{*T}] &= E[(\dot{\mathbf{m}}^* + \Delta \dot{\mathbf{m}}^*)(\dot{\mathbf{m}}^* + \Delta \dot{\mathbf{m}}^*)^T] \\ &= \dot{\mathbf{m}}^* \dot{\mathbf{m}}^{*T} + E[\Delta \dot{\mathbf{m}}^* \Delta \dot{\mathbf{m}}^{*T}] \\ &= \dot{\mathbf{m}}^* \dot{\mathbf{m}}^{*T} + \frac{\epsilon^2}{2f^2} (\mathbf{I} - \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \end{aligned} \quad (48)$$

これらを式(43), (44)に代入すれば、テンソル \mathcal{L} , \mathcal{M} の正確な値をそれぞれ $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{M}}$ とすると、 \mathcal{L} , \mathcal{M} の期待値がそれぞれ次のようになる。

$$E[\mathcal{L}] = \bar{\mathcal{L}} + \frac{\epsilon^2}{2f^2} (\Omega(S) \mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (49)$$

$$E[\mathcal{M}] = \bar{\mathcal{M}} \quad (50)$$

テンソル \mathcal{L} , \mathcal{M} は非常に多数の画素に渡る総和で定義されているので、大数の法則により $\mathcal{L} \approx E[\mathcal{L}]$, $\mathcal{M} \approx E[\mathcal{M}]$ とみなせる。すると式(27)より

$$\mathbf{A} \approx \bar{\mathbf{A}} + \frac{\epsilon^2}{2f^2} (\Omega(S) \mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (51)$$

となる。ただし $\bar{\mathbf{A}}$ は誤差がないときの厳密な値である。これは、行列 \mathbf{A} には

$$E[\Delta \mathbf{A}] \approx \frac{\epsilon^2}{2f^2} (\Omega(S) \mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (52)$$

の統計的偏差が存在すると解釈できる。