

## くりこみ法による3次元運動の解析

武田 佐知男 金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

3次元運動を計算するには、2画像間で8点かそれ以上の特徴点の対応から基本行列を決定すればよい。よく知られているように、基本行列は、データに誤差が含まれていても最小二乗法によってロバストに計算できる。本論文では、まず画像の誤差の統計的モデルに基づいて最尤推定の意味で最適な最小二乗法の重みを導出する。次に、そのような最適重みを用いても計算した解には統計的偏差が存在することを指摘する。そして、反復によって誤差を推定しながら偏差を取り除く「くりこみ法」と呼ぶ方法を提案し、乱数を用いたシミュレーションによってこの方法の有効性を示す。

## 3-D Motion Analysis by Renormalization

Sachio Takeda and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science  
Gunma University, Kiryu, Gunma, 376, Japan

3-D motion can be computed from two views if we can determine the essential matrix from correspondences of eight or more feature points between two images. As is well known, the essential matrix can be robustly computed by least squares in the presence of noise. In this paper, we first derive the optimal weights for the least squares in the sense of maximum likelihood estimation based on a statistical model of image noise. Then, we point out that the solution is statistically biased even if the optimal weights are used, and present a new scheme called "renormalization", which iteratively removes the statistical bias by automatically adjusting to the image noise. Its effectiveness is demonstrated by random number simulations.

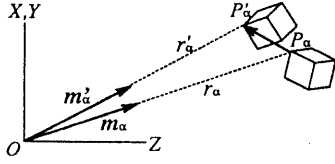


図 1: Nベクトルの対応 (カメラ系から見た記述).

## 1. 序論

物体またはカメラが3次元有限運動をするとき、その運動によって得られた2画像間で8個の特徴点の対応が与えられていれば、物体またはカメラの運動が解析的に求まる。その解法は「8点アルゴリズム」と呼ばれている [9, 16]。対応する特徴点が8個以上ある場合は最小二乗法によってロバストに計算する方法が知られている [20]。本論文では、そのような算法を「Nベクトル」 [6, 7] によって記述する。そして、画像の誤差の統計的モデル [8, 18, 19] に基づいて最尤推定の意味での最小二乗法の重みを導出する。次に、そのような最適重みを用いても、計算した解には統計的偏差が存在することを指摘する。そして、毎回の反復によって誤差の挙動を推定しながら偏差を取り除く「くりこみ法」と呼ぶ方法を提案し、乱数を用いたシミュレーションによってこの方法の有効性を示す。

## 2. 有限運動の3次元解釈

レンズの中心を原点  $O$  とし、その光軸を  $Z$  軸とする  $XYZ$  座標系をとり、平面  $Z = f$  を画像面とする。座標原点  $O$  を視点、定数  $f$  を焦点距離と呼ぶ。画像面上の点  $(x, y)$  は、視点  $O$  を始点とし、その点を通る視線の方向を表す単位ベクトル  $m$  で指定できる。このベクトル  $m$  を  $N$ ベクトルと呼ぶ [6, 7]。

$N$ ベクトルは、焦点距離が既知であれば画像から計算できる。以下、カメラが物体に対して運動する場合を考える。カメラの運動を視点の周りの回転  $R$  と並進  $h$  とで指定し、 $\{R, h\}$  を運動パラメータと呼ぶ。

空間中の物体の特徴点を  $\{P_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$  とし、各点の  $N$ ベクトルを  $\{m_\alpha\}$  とする。視点から特徴点  $P_\alpha$  までの距離を運動前後についてそれぞれ  $r_\alpha, r'_\alpha$  とし、運動前後で各  $N$ ベクトル  $m_\alpha$  が  $m'_\alpha$  に変化するとする (図 1)。  $m'_\alpha$  を最初のカメラ系から見れば、運動後のカメラ系は  $R$  だけ回転しているから、 $Rm'_\alpha$  に等しい。図 2 より次の関係が成り立っている。

$$r_\alpha m_\alpha - r'_\alpha Rm'_\alpha = h \quad (1)$$

したがって問題は「 $m_\alpha, m'_\alpha$  が与えられたとき、式

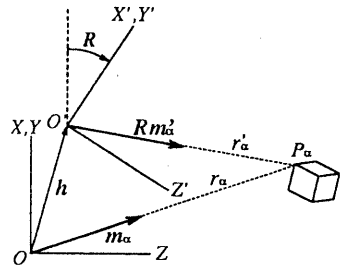


図 2: 運動パラメータ (物体から見た記述).

(1) を満たす  $\{R, h\}, r_\alpha, r'_\alpha$  を求めよ」と書ける。

式 (1) の関係から並進  $h$  と距離  $r_\alpha, r'_\alpha$  のスケールは不定である。すなわち、 $\{R, h\}, r_\alpha, r'_\alpha$  が解であれば任意の  $0$  でない  $k$  に対して  $\{R, kh\}, kr_\alpha, kr'_\alpha$  も解である。これは、遠くの大きな運動と、近くの小さな運動の区別が出来ないことを意味している。観測データが  $N$ ベクトルという無次元量であるために、長さの次元をもつ量を引き出すことは不可能である。

$h = 0$  かどうかを判断することは容易である。  $h = 0$  であれば、 $m_\alpha = Rm'_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$  であるから、データに誤差があるときは最適化

$$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \|m_\alpha - Rm'_\alpha\|^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

によって  $R$  を求め、適当な許容誤差  $\epsilon$  を用いてすべての  $m_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$  に対して  $\|m_\alpha - Rm'_\alpha\| < \epsilon$  かどうかを調べればよい。  $W_\alpha$  はデータの信頼度を表す重みである (後述)。式 (2) の最適化は「特異値分解」、「極分解」、「四元数表示」などによって解析的に計算できる [6, 8]。以下、 $h \neq 0$  であることが確かめられているとして、 $\|h\| = 1$  というスケールを採用する。

## 3. エピ極線方程式と基本行列

【定理 1】 2つの単位ベクトル  $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$  から、3次元解釈ができるための必要十分条件は

$$|h, m_\alpha, Rm'_\alpha| = 0 \quad (3)$$

となることである。

(証明) 式 (1) より、ベクトル  $h$  は単位ベクトル  $Rm'_\alpha$  と  $m_\alpha$  の線形結合によって表されている。この方程式を満足するような  $r_\alpha, r'_\alpha$  が存在するための必要十分条件は3つのベクトル  $h, m_\alpha, Rm'_\alpha$  がどの  $\alpha = 1, \dots, N$  に対しても共面であること、すなわち、それ

らのスカラー三重積が0となることである。□

距離  $r_\alpha, r'_\alpha$  は、次の式で与えられる。

$$r_\alpha = \frac{(h, m_\alpha) - (m_\alpha, Rm'_\alpha)(h, Rm'_\alpha)}{1 - (m_\alpha, Rm'_\alpha)^2} \quad (4)$$

$$r'_\alpha = \frac{(m_\alpha, Rm'_\alpha)(h, m_\alpha) - (h, Rm'_\alpha)}{1 - (m_\alpha, Rm'_\alpha)^2} \quad (5)$$

式(4), (5) は、式(1) から最小二乗法によって導かれたものであり、これを運動視差方程式と呼ぶ[6, 8].

運動パラメータ  $\{R, h\}$  を計算するには式(3) を解けばよい。そのために次のような行列  $G$  を定義し、基本行列と呼ぶ[6, 8, 9, 10].

$$G = h \times R \quad (6)$$

右辺は  $R$  の各列ベクトルを  $r_1, r_2, r_3$  とするとき ( $h \times r_1, h \times r_2, h \times r_3$ ) と定義する。基本行列  $G$  を用いれば、式(3) は次のように書きかえられる。

$$(m_\alpha, Gm'_\alpha) = 0 \quad (7)$$

式(3), および式(7) をエビ極線方程式と呼ぶ。基本行列  $G$  の定義より  $\|G\| = \sqrt{2}$  であることは直ちにわかる[6, 8]. ただし  $\|G\|^2 = \sum_{i,j=1}^3 G_{ij}^2$  である。

基本行列  $G$  には9個の要素があるが、制約  $\|G\| = \sqrt{2}$  があるから、少なくとも8個の特徴点観測されれば一般には  $G$  が一意的に定まる。これが「8点アルゴリズム」の名称の由来である。しかし、運動パラメータ  $\{R, h\}$  に含まれる未知数は、回転行列  $R$  に3個、単位ベクトル  $h$  に2個の合計5個であるから、本来は、5個の特徴点で十分なはずである(ただし、複数の解が得られる[1]). このくい違いは、すべての行列が式(6)のように分解できるとは限らないことに起因する。そのように分解できる行列を分解可能行列と呼ぶ。次のことが知られている[2, 8].

【命題1】 行列  $G$  が分解可能であるための必要十分条件は、その特異値が1, 1, 0となることである。

【系1】 行列  $G$  が分解可能であるための必要十分条件は、行列  $G$  が次の条件を満たすことである。

$$\det G = 0, \quad \|G\| = \|GG^T\| = \sqrt{2} \quad (8)$$

#### 4. 基本行列の計算法

基本行列  $G$  は、式(7)のエビ極線方程式を8個の特徴点について解くことによって得られる(8点アル

ゴリズム)。特徴点が8個以上の場合は、次の最適化を考える[20].

$$J = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha, Gm'_\alpha)^2 \rightarrow \min \quad (9)$$

$W_\alpha$  はデータの信頼度を示す重みである(後述)。相関テンソル  $M = (M_{ijkl})$  を次のように定義する。

$$M_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_{\alpha(i)} m'_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m'_{\alpha(l)} \quad (10)$$

ただし  $m_{\alpha(i)}$  は  $m_\alpha$  の第  $i$  成分である。相関テンソル  $M$  を用いれば、(9) は次のように書きかえられる。

$$J = \sum_{i,j,k,l=1}^3 M_{ijkl} G_{ij} G_{kl} \rightarrow \min \quad (11)$$

$G_{ij}$  の添字の組  $(i, j)$  を  $\kappa = 3(i-1) + j$  と書き直すと、9次元ベクトル  $\hat{G} = (\hat{G}_\kappa)$  が得られる。同様に、 $M_{ijkl}$  の添字の組  $(i, j)$  と  $(k, l)$  を  $(\kappa, \lambda) = (3(i-1) + j, 3(k-1) + l)$  と書き直すと、9次元行列  $\hat{M} = (\hat{M}_{\kappa\lambda})$  が得られる。これらを用いると(11)は次のようになる。

$$J = (\hat{G}, \hat{M}\hat{G}) = \sum_{\kappa,\lambda=1}^9 \hat{M}_{\kappa\lambda} \hat{G}_\kappa \hat{G}_\lambda \rightarrow \min \quad (12)$$

この解は、9次元行列  $\hat{M}$  の最小固有値に対するノルム  $\sqrt{2}$  の固有ベクトル  $\hat{G}$  によって与えられる。その  $\hat{G} = (\hat{G}_{ij})$  に対して  $(i, j) = ((\kappa-1)\text{div}3+1, (\kappa-1)\text{mod}3+1)$  とおくと、3次元行列  $G = (G_{ij})$  に戻すことができる。このように計算した  $G$  をテンソル  $M$  の最小固有値に対する(ノルム  $\sqrt{2}$ )固有行列と呼ぶ。

最小化(9)は分解可能条件(8)のもとで行なうべきであるが、これを無視しているのは計算の簡単化のためである。データ  $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}$  が厳密ならこれを無視しても、得られる解は(9)を自動的に満たしている。分解可能条件(8)を課せば解はもはや解析的には求まらず、数値的探索[14]あるいは数式処理[1, 5]が必要になる。これを直接的探索解法と呼ぶ(後述)。これにより解が定まる特徴点の個数の最小値は5個である。ただし、数値的探索で極小値に落ち込まずに最適解に到達するには複雑な技術を要する。

#### 5. 基本行列の分解

基本行列  $G$  が求まれば運動パラメータ  $\{R, h\}$  は次のように解析的に計算できる[6, 8].

1. 並進  $h$  は行列  $GG^T$  の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。符号は次式を満たすように選ぶ。

$$\sum_{\alpha=1}^N |h, m_{\alpha}, Gm_{\alpha}| > 0 \quad (13)$$

2. 行列  $-h \times G$  を次のように特異値分解する ( $V, U$  は直交行列,  $\Lambda$  は対角要素が大きい順に並んだ対角行列)。

$$-h \times G = V\Lambda U^T \quad (14)$$

3. 回転  $R$  は次のように与えられる [17].

$$R = V \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \det(VU^T) \end{pmatrix} U^T \quad (15)$$

(9) で定まる基本行列  $G$  の符号は不定であるから 2 通りの解が得られるが, 式 (4), (5) で求められる距離  $r_{\alpha}, r'_{\alpha}$  に対して  $r_{\alpha} > 0$  かつ  $r'_{\alpha} > 0, \alpha = 1, \dots, N$  となるものを選べばよい (誤差を考慮すれば  $\sum_{\alpha=1}^N (r_{\alpha} + r'_{\alpha}) > 0$  とするのがよい)。したがって, 基本行列  $G$  が (符号を除いて) 一意に定まりさえすれば, 解は一意的である。

基本行列  $G$  が定まらない唯一の例外はすべての特徴点が特殊な配置をしていて, ある  $\tilde{G} (\neq G)$  に対して "偽のエビ極線方程式" ( $m_{\alpha}, Gm'_{\alpha}) = 0$  が恒等的に成立することである。そのような配置はカメラの移動前後の二つの視点を通るある 2 次曲面であることが容易に導ける [10]。これを弱臨界面面という。このとき上の解法では基本行列を定めることができないが, 偽の基本行列  $\tilde{G}$  が分解可能でなければ, 分解可能条件 (8) を課すことによって  $G$  を定めることができる。あるいは直接的探索解法によっても解が求まる。しかし  $\tilde{G}$  が分解可能であれば真の解と区別することは原理的に不可能である。そのような曲面を (強) 臨界面面という。これは 2 次線織面であり, 連結双曲面かその縮退であることが知られている [11, 13]

## 6. 誤差の統計的モデルと最適重み

$\bar{m}$  を誤差を含まない特徴点の  $N$  ベクトルとし, 誤差を含んだ  $N$  ベクトル  $m = \bar{m} + \Delta m$  が観測されるとする。誤差は焦点距離  $f$  の画像面上の各特徴点に対して任意の方向に独立に与えられるものとし, その大きさの標準偏差を  $\epsilon$  とする。そして共分散行列  $V[m]$  を次のように定義する。

$$V[m] = E[\Delta m \Delta m^T] \quad (16)$$

ただし,  $E[\cdot]$  は期待値を表す。画像面が  $f$  に比べて小さければ,  $V[m]$  は次の式で与えられる [8, 18, 19].

$$V[m] = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (I - \bar{m} \bar{m}^T), \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{f} \quad (17)$$

エビ極線方程式 ( $m_{\alpha}, Gm'_{\alpha}) = 0$  は, 誤差を含んだデータに対しては必ずしも成り立たない。そこで  $\epsilon_{\alpha}$  を次のようにおく。

$$\epsilon_{\alpha} = (\bar{m}_{\alpha} + \Delta m_{\alpha}, G(\bar{m}'_{\alpha} + \Delta m'_{\alpha})) \quad (18)$$

$\Delta m_{\alpha}$  と  $\Delta m'_{\alpha}$  が統計的に独立であるとすれば,  $\epsilon_{\alpha}$  は期待値 0 の乱数と見なせる。

【命題 2】  $\epsilon_{\alpha}$  の分散  $\sigma_{\alpha}$  は次式で近似される。

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (\|G^T \bar{m}_{\alpha}\|^2 + \|G \bar{m}'_{\alpha}\|^2) \quad (19)$$

(証明) 式 (18) を 2 乗し, 4 次の項 ( $\Delta m_{\alpha}, G \Delta m'_{\alpha})^2$  を省略すると

$$\epsilon_{\alpha}^2 = (\bar{m}_{\alpha}, G \bar{m}'_{\alpha})^2 + (\Delta m_{\alpha}, G \bar{m}'_{\alpha})^2 + (\bar{m}_{\alpha}, G \Delta m'_{\alpha})^2 \quad (20)$$

となる。右辺の最初の項は, 厳密な  $G$  に対しては 0 となる。両辺の期待値をとり,  $\sigma_{\alpha}^2 = E[\epsilon_{\alpha}^2]$  とおくと

$$\sigma_{\alpha}^2 = \bar{m}_{\alpha}^T G^T V[m_{\alpha}] G \bar{m}'_{\alpha} + \bar{m}'_{\alpha}^T G V[m_{\alpha}] G^T \bar{m}_{\alpha} \quad (21)$$

となる。式 (17) を代入すると

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (\|G \bar{m}'_{\alpha}\|^2 + \|G^T \bar{m}_{\alpha}\|^2 - 2(\bar{m}_{\alpha}, G \bar{m}'_{\alpha})^2) \quad (22)$$

となり,  $(\bar{m}_{\alpha}, G \bar{m}'_{\alpha})^2 = 0$  より式 (19) が得られる。□

$\epsilon_{\alpha}$  の期待値は 0, 分散は  $\sigma_{\alpha}$  であるから  $u_{\alpha} = \epsilon_{\alpha} / \sigma_{\alpha}$  とおくと,  $u_{\alpha}$  の同時確率密度は次式で近似できる。

$$\prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_{\alpha}^2/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}^2/2} \quad (23)$$

これが最大値となる  $G$  を推定する (最尤推定) には

$$\sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha}^2 \rightarrow \min \quad (24)$$

とすればよい。(9) と比べると, 最適な重み  $W_{\alpha}$  は  $1/\sigma_{\alpha}^2$  に比例するようによればよいことがわかる。そこで次のようにおく。

$$W_{\alpha} = \frac{\text{const.}}{\|G \bar{m}'_{\alpha}\|^2 + \|G^T \bar{m}_{\alpha}\|^2} \quad (25)$$

以下, const. は  $\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} = 1$  となるように選ぶ。

## 7. 基本行列の統計的偏差

最小二乗法 (9) によって得られた解には、たとえ最適重みを使ったとしても統計的偏差が存在する。これは次のように示せる。誤差を含んだデータ  $\{\bar{m}_\alpha + \Delta m_\alpha\}$ ,  $\{\bar{m}'_\alpha + \Delta m'_\alpha\}$  の相関テンソルは次式のように書ける。

$$M_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (\bar{m}_{\alpha(i)} + \Delta m_{\alpha(i)}) (\bar{m}'_{\alpha(j)} + \Delta m'_{\alpha(j)}) \\ \times (\bar{m}_{\alpha(k)} + \Delta m_{\alpha(k)}) (\bar{m}'_{\alpha(l)} + \Delta m'_{\alpha(l)}) \quad (26)$$

モーメント行列  $M = (M_{ij})$ ,  $M' = (M'_{kl})$  を次のように定義する。

$$M = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m_\alpha m_\alpha^\top, \quad M' = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha m'_\alpha m'_\alpha^\top \quad (27)$$

これを用いると、式 (26) の期待値は次のようになる (付録 A)。

$$E[M_{ijkl}] = (1 - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2})^2 \bar{M}_{ijkl} \\ + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (1 - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2}) (\delta_{jl} \bar{M}_{ik} + \delta_{ik} \bar{M}'_{jl}) + \frac{\bar{\epsilon}^4}{4} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (28)$$

ただし、 $\bar{M}_{ijkl}$ ,  $\bar{M}_{ik}$ ,  $\bar{M}'_{jl}$  はそれぞれ相関テンソル  $\mathcal{M}$  とモーメント行列  $M$ ,  $M'$  の各要素の真の値である。

$\hat{\mathcal{M}}$  と  $(1 - \bar{\epsilon}^2/2)^2 \bar{\mathcal{M}} (= \bar{\mathcal{M}} + O(\bar{\epsilon}^2))$  は同じ固有行列をもつ。しかし  $\mathcal{M}$  には  $O(\bar{\epsilon}^2)$  の項が加わっているため、固有値問題の摂動定理 [6, 8] により、その固有行列は  $\hat{\mathcal{M}}$  の固有行列と比べて  $O(\bar{\epsilon}^2)$  の偏りがある。すなわち、 $\bar{G}$  を真の基本行列とすると、計算されるのは  $G = \bar{G} + O(\bar{\epsilon}^2)$  である。

理論的には  $G$  の不偏推定値はテンソル  $\mathcal{M} - E[\mathcal{M}]$  の最小固有値に対する固有行列として得られる。しかし  $E[\mathcal{M}]$  は未知の  $\{\bar{m}_\alpha\}$ ,  $\{\bar{m}'_\alpha\}$  によって記述されているので、それらを観測値  $\{m_\alpha\}$ ,  $\{m'_\alpha\}$  に置き換えると、再び偏りが生じてしまう。これを解決するために、次の不偏相関テンソル  $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{M}_{ijkl})$  を定義する。

$$\hat{M}_{ijkl} = M_{ijkl} - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} (\delta_{jl} M_{ik} + \delta_{ik} M'_{jl}) + \frac{\bar{\epsilon}^4}{4} \delta_{jl} \delta_{ik} \quad (29)$$

すると

$$E[\hat{\mathcal{M}}] = (1 - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2})^2 \bar{\mathcal{M}} \quad (30)$$

となる (付録 B)。したがって  $\hat{\mathcal{M}}$  の最小固有値に対する固有行列を計算すれば  $G$  の不偏推定値が得られる。しかし  $\hat{\mathcal{M}}$  を計算するには  $\bar{\epsilon}$  の値が必要である。こ

れを実際の画像から推定するのは困難である。そこで誤差が未知であっても、それを推定しながら反復によって偏差を取り除く方法を提案する。これは田川ら [15] がオブティカルフローの3次元解釈の誤差を補正するために提案した反復法を一般化したものである [3, 4, 19]。

## 8. くりこみ法

テンソル  $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$  を

$$N_{ijkl} = \delta_{jl} M_{ik} + \delta_{ik} M'_{jl} \quad (31)$$

と定義する。  $O(\bar{\epsilon}^4)$  の項を省略すると、式 (29) で定義した不偏相関テンソル  $\hat{\mathcal{M}}$  は

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - c\mathcal{N} \quad (32)$$

と書ける。ただし、 $c = \bar{\epsilon}^2/2$  とおいた。定数  $c$  は  $E[\hat{\mathcal{M}}] \propto \bar{\mathcal{M}}$  となるように決めるべきであるが、これは誤差の挙動がわからないかぎり不可能である。一方、定数  $c$  が正しく選ばれたとすれば

$$E[(\bar{G}, \hat{\mathcal{M}} \bar{G})] = (\bar{G}, E[\hat{\mathcal{M}}] \bar{G}) \propto (\bar{G}, \bar{\mathcal{M}} \bar{G}) = 0 \quad (33)$$

という関係が成り立つ。そこで、毎回の反復において  $(G, \hat{\mathcal{M}} G) = 0$  となるように  $c$  を選ぶことにする。今、もし  $(G, \hat{\mathcal{M}} G) \neq 0$  であったとすれば

$$\hat{M}' = \hat{\mathcal{M}} - \frac{(G, \hat{\mathcal{M}} G)}{(G, \mathcal{N} G)} \mathcal{N} \quad (34)$$

と更新すれば  $(G, \hat{M}' G) = 0$  となる。式 (31) より

$$(G, \mathcal{N} G) = \text{tr}(G^\top M G) + \text{tr}(G M' G^\top) \quad (35)$$

となる。また  $\hat{\mathcal{M}}$  の最小固有値を  $\lambda_m$  とすると、 $\|G\| = \sqrt{2}$  より  $(G, \hat{\mathcal{M}} G) = 2\lambda_m$  である。以上のことから次の手順が得られる。これをくりこみ法と呼ぶ [3, 4, 19]。

renormalization( $\{m_\alpha\}$ ,  $\{m'_\alpha\}$ )

1.  $c = 0$ ,  $W_\alpha = 1/N$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  とする。
2. モーメント行列  $M$ ,  $M'$  と不偏相関テンソル  $\hat{\mathcal{M}}$  を式 (27), (32) によって計算する。
3.  $\hat{\mathcal{M}}$  の最小固有値に対するノルム  $\sqrt{2}$  の固有行列  $G$  を計算し、その最小固有値を  $\lambda_m$  とする。
4. 定数  $c$  と重み  $W_\alpha$  を次のように更新する。

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1/(\|G m'_\alpha\|^2 + \|G^\top m_\alpha\|^2)}{\sum_{\beta=1}^N \{1/(\|G m'_\beta\|^2 + \|G^\top m_\beta\|^2)\}} \quad (36)$$

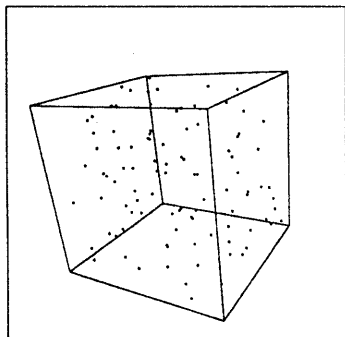


図 3: カメラ運動前の画像.

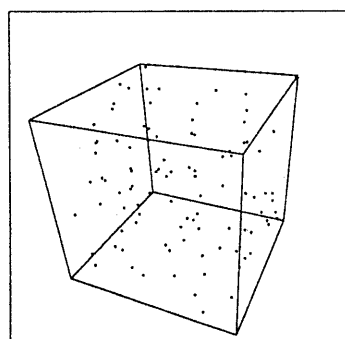


図 4: カメラ運動後の画像.

$$c \leftarrow c + \frac{2\lambda_m}{\text{tr}(G^T M G) + \text{tr}(G M^T G^T)} \quad (37)$$

- 更新が収束していなければ 2. に戻る。収束していれば、5 節の方法によって運動パラメータ  $\{R, h\}$  を計算する。

## 9. 実験

空間中に仮想的な立方体を考え、その中に一様乱数によって特徴点を 100 個与える。これに対して適当にカメラを移動させ、図 3,4 のような 2 画像を得る。ただし、各画像とも  $512 \times 512$  (画素) に想定し、焦点距離を  $f = 600$  (画素) とする。各画像に対して各特徴点の  $x, y$  成分に独立に、標準偏差が 1 画素の正規乱数を誤差として与える。異なる誤差に対して 100 回のシミュレーションを行なったとき、運動パラメータの誤差をヒストグラムにしたものが図 5 である。ただし、回転の誤差は真の回転角との差とし、並進の誤

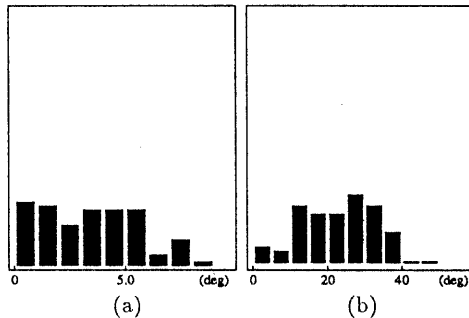


図 5: くりこみ法を用いない場合  
(a) 回転の誤差. (b) 並進の誤差.

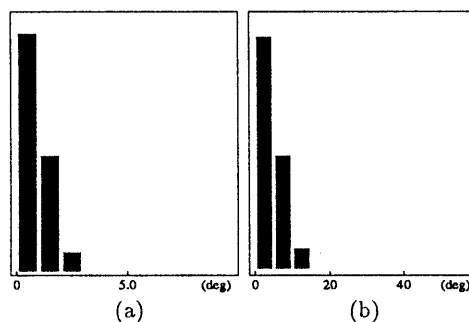


図 6: くりこみ法を用いた場合  
(a) 回転の誤差. (b) 並進の誤差.

差は真の方向とのなす角度とする。最小二乗法の重みとしては真の解に基づく最適重みを用いているが、定数重みを用いた場合とほとんど差はない。これを見ると明らかに統計的偏差が存在していることがわかる。これに対し、くりこみ法を用いた結果が図 6 である。統計的偏差がかなり減少しており、精度が向上している。また、収束も速く 4,5 回の反復で十分である。

## 10. まとめ

本論文では、2 枚の画像からその 3 次元運動を計算する解析的アルゴリズムを記述し、画像の誤差の統計的モデルに基づいて最適な重みを導出した。次に、その解には最適重みを用いても統計的偏差が存在することを指摘した。そして、反復によって誤差の挙動を推定しながら偏差を取り除く「くりこみ法」と呼ぶ方法を提案し、乱数を用いたシミュレーションによりその有効性を示した。

本論文で提案したくりこみ法は、消失点の計算やコ

ニック当てはめの偏差を取り除くくりこみ法 [3, 4] と同じ原理に基くものであり, 反復は 2 次収束することが証明できる [3]. くりこみ法は簡単に収束も速く, 3 次元運動の解析に対して標準的な方法になると思われる.

なお, 本論文に示したような解析的解法ではなく, 運動パラメータ  $\{R, h\}$  を直接に探索する方法でも誤差解析は同一であり [12], 最適重みを用いてもやはり偏差が存在する. これに対してもくりこみ法が有効であり, 定式化はまったく同一である (付録 C). しかし, 解の探索とくりこみ法の反復の二重の反復ループが必要となり, 計算時間の点で非効率的である. また, 得られる精度も本論文の方法と比べて大差ない. 計算効率と精度の両方の点を考慮すれば, 本論文の方法が優れている.

## 参考文献

- [1] O. D. Faugeras and S. Maybank: "Motion from point matches: Multiplicity of solutions," *Int. J. Comput. Vision.*, 4 (1990) 225-246.
- [2] T. S. Huang and O. D. Faugeras: "Some properties of the  $E$  matrix in two-view motion estimation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11 (1989) 1310-1312.
- [3] 岩崎利夫, 金谷健一: くりこみ法によるオブティカルフローの 3 次元復元, 情報処理学会研究報告 99-CV-80, 1992-11.
- [4] 岩崎利夫, 丸山保, 金谷健一: くりこみ法によるニックの当てはめ, 情報処理学会研究報告 99-CV-79, 1992-09.
- [5] C. Jerian and R. Jain: "Polynomial methods for structure from motion," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12 (1990) 1150-1165.
- [6] 金谷健一: 「画像理解 / 3 次元認識の数理」 森北出版, 1990.
- [7] K. Kanatani: Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding*, 54 (1991), 333-348.
- [8] K. Kanatani: *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [9] H. C. Longuet-Higgins: "A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections," *Nature*, 293-10 (1981) 133-135.
- [10] H. C. Longuet-Higgins: "The reconstruction of a scene from two projections—Configurations that defeat the 8-point algorithm," *Proc. 1st IEEE Conf. Artif. Intell. Appl.*, Denver, CO, U.S.A., December 1984, pp. 395-397.
- [11] S. J. Maybank: "Ambiguity in reconstruction from image correspondences," *Image Vision Comput.*, 9 (1991) 93-99
- [12] 森尻智昭, 金谷健一: 3 次元運動の不偏推定法と統計的誤差解析, 情報処理学会研究報告 92-CV-77, 1992-03.
- [13] S. Negahdaripour: "Multiple interpretations of the shape and motion of objects from two perspective images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12 (1990) 1025-1030.
- [14] A. N. Netravali, T. S. Huang, A. S. Krishnakumar and R. J. Holt: "Algebraic methods in 3-D motion estimation from two-view point correspondences," *Int. J. Imageing Sys. Tech.*, 1 (1989), 78-99.
- [15] 田川憲男, 鳥生隆, 遠藤利生: オプティカルフローを用いた閉形式の 3 次元剛体運動復元方式, 電子情報通信学会技術研究報告 IE90-108/PRU90-139, 1991-03, pp. 23-29.
- [16] R. Y. Tsai and T. S. Huang: "Uniqueness and estimation of three-dimensional motion parameters of rigid objects with curved surfaces," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 6 (1984) 13-27.
- [17] 辻弘行, 金谷健一: 3 次元回転行列の最良推定とその応用, 情報処理学会研究報告 92-76-14, 1992-01.
- [18] 浦沢康二, 金谷健一: 幾何学計算の統計解析: I, 基礎理論, 情報処理学会研究報告 92-CV-77, 1992-03.
- [19] 浦沢康二, 金谷健一: 幾何学計算の統計解析: II, エッジ, 消失点, 出現点, 情報処理学会研究報告 92-CV-78, 1992-05.
- [20] J. Weng, T. S. Huang and N. Ahuja: "Motion and structure from two perspective views: Algorithms, error analysis, and error estimation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11 (1989) 451-467.

## 付録

### A 相関テンソルの期待値の計算

$\Delta m_\alpha, \Delta m'_\alpha$  が独立であれば,  $E[\Delta m_\alpha] = E[\Delta m'_\alpha] = 0$  であるから,  $M_{ijkl}$  の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[M_{ijkl}] &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (\bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}'_{\alpha(j)} \bar{m}_{\alpha(k)} \bar{m}'_{\alpha(l)}) \\ &\quad + E[\Delta m_{\alpha(i)} \bar{m}'_{\alpha(j)} \Delta m_{\alpha(k)} \bar{m}'_{\alpha(l)}] \\ &\quad + E[\bar{m}_{\alpha(i)} \Delta m'_{\alpha(j)} \bar{m}_{\alpha(k)} \Delta m'_{\alpha(l)}] \\ &\quad + E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m'_{\alpha(j)} \Delta m_{\alpha(k)} \Delta m'_{\alpha(l)}] \quad (38) \end{aligned}$$

式(17)を代入すると, 右辺の各項は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[\Delta m_{\alpha(i)} \bar{m}'_{\alpha(j)} \Delta m_{\alpha(k)} \bar{m}'_{\alpha(l)}] &= E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(k)}] \bar{m}'_{\alpha(j)} \bar{m}'_{\alpha(l)} \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (\delta_{ik} - \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(k)}) \bar{m}'_{\alpha(j)} \bar{m}'_{\alpha(l)} \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\bar{m}_{\alpha(i)} \Delta m'_{\alpha(j)} \bar{m}_{\alpha(k)} \Delta m'_{\alpha(l)}] &= \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(k)} (\delta_{jl} - \bar{m}'_{\alpha(j)} \bar{m}'_{\alpha(l)}) \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m'_{\alpha(j)} \Delta m_{\alpha(k)} \Delta m'_{\alpha(l)}] &= E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(k)}] E[\Delta m'_{\alpha(j)} \Delta m'_{\alpha(l)}] \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}^4}{4} (\delta_{ik} - \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(k)}) (\delta_{jl} - \bar{m}'_{\alpha(j)} \bar{m}'_{\alpha(l)}) \quad (41) \end{aligned}$$

式(39), (40), (41)を式(38)に代入し,  $\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = 1$  を考慮すると式(28)が得られる.

### B 不偏相関テンソルの期待値の計算

式(29)の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[\hat{M}_{ijkl}] &= E[M_{ijkl}] \\ &\quad - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (\delta_{jl} E[M_{ik}] + \delta_{ik} E[M'_{jl}]) + \frac{\tilde{\epsilon}^4}{4} \delta_{jl} \delta_{ik} \quad (42) \end{aligned}$$

$E[M_{ijkl}]$  は式(28)で与えられている. また,  $E[\Delta m_\alpha] = 0$  より次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} E[m_\alpha m_\alpha^\top] &= E[(\bar{m}_\alpha + \Delta m_\alpha)(\bar{m}_\alpha + \Delta m_\alpha)^\top] \\ &= \bar{m}_\alpha \bar{m}_\alpha^\top + E[\Delta m_\alpha \Delta m_\alpha^\top] \\ &= \bar{m}_\alpha \bar{m}_\alpha^\top + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} (I - \bar{m}_\alpha \bar{m}_\alpha^\top) \\ &= (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) \bar{m}_\alpha \bar{m}_\alpha^\top + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} I \quad (43) \end{aligned}$$

$\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = 1$  であるから, モーメント行列  $M, M'$  の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[M] &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha E[m_\alpha m_\alpha^\top] = (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) \bar{M} + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} I \\ E[M'] &= (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) \bar{M}' + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} I \quad (44) \end{aligned}$$

式(28), (44)を式(42)に代入すると式(30)が得られる.

### C 直接的探索のくりこみ法

直接的探索法[12]に対するくりこみ法の手順は以下のようになる.

renormalization( $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}$ )

1.  $c = 0, W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N$  とする.
2. 次の行列  $\hat{A}(R)$  の最小固有値を最小にするような回転行列  $R$  を探索によって求める.

$$\begin{aligned} \hat{A}(R) &= \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (m_\alpha \times R m'_\alpha) (m_\alpha \times R m'_\alpha)^\top \\ &\quad - c \left( I - \frac{1}{2} (M + R M' R^\top) \right) \quad (45) \end{aligned}$$

その最小固有値を  $\lambda_m$ , 対応する単位固有ベクトルを  $h$  とする.

3. 基本行列  $G = h \times R$  を計算し, 定数  $c$  と重み  $W_\alpha$  を次のように更新する.

$$\begin{aligned} W_\alpha &\leftarrow \frac{1}{\|G m'_\alpha\|^2 + \|G^\top m_\alpha\|^2} \quad (46) \\ c &\leftarrow c + \frac{\lambda_m}{1 - ((h, M h) + (h, R M' R^\top h))/2} \quad (47) \end{aligned}$$

4. 更新が収束していないければ2.に戻る. 収束していれば運動パラメーター  $\{R, h\}$  を返す.