

影からの形の復元

井宮 淳 市川 薫

千葉大学 工学部 情報工学科

本論文では, 影からもとの物体が復元できるための十分条件を導く. ここでの物体は3次元ユークリッド空間の凸閉領域である. まず, 3次元空間における接線極座標による物体の記述法を提案する. 次に, 中心投影による影からの物体の復元公式を導くと共に, この影から物体が完全に復元できるための十分条件を証明する. また, 3次元運動に不変な物体の類似尺度を物体の記述子から構成する.

Shape from Shadow

Atsushi IMIYA and Akira ICHIKAWA

Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba 263 JAPAN
e-mail imiya@ics.tj.chiba-u.ac.jp

This paper clarifies a sufficient condition for the reconstruction of a three-dimensional object from its shadows. Our object is a closed convex region in the three-dimension Euclidean space. We propose a surface descriptor by using normal vectors of tangent planes of object. This descriptor derives a formula for object reconstruction from shadows. We also define a motion-invariant similarity measure for three-dimensional objects.

1. まえがき

計測データから物体を復元する“Xからの物体復元”では計測データからの形状の復元に注意が払われるため、画像面上のデータからいかに形状を復元するかが問題となり、復元したデータを利用して何をするかには余り問題とされてこなかった。しかし、“Xからの物体復元”を形状認識・理解のための第1段階と考えれば、計測データから復元される形状のパラメータは形状の類似性などを判定するためのデータとなる。

本論文では、形状認識・理解のための“Xからの物体復元”としての影からの形状復元を取り扱う。人間が形状の類似性を判定する場合、厳密に類似性を判定するのではなく、「だいたい似ている」と判定することが行われる。ここでは、「だいたい似ている」を形状の凸包の類似性と考えことにする。そこで、物体を3次元ユークリッド空間の凸閉領域と考え、影からもとの物体が復元できるための十分条件を導く。まず、3次元空間における接線極座標による物体の記述法を提案する。次いで、中心投影による影からの物体の復元公式を導くと共に、この影から物体が完全に復元できるための十分条件を証明する。また、3次元運動に不変な物体の類似尺度を物体の記述子から構成する[1,2]。

2次元の凸多角形あるいは図形の凸包を中心投影から復元する問題が文献[3,4,5]で取り扱われている。3次元形状を2次元図形の積み重ねと考えれば、平行投影による投影から元の物体を近似する形状を復元できる。しかし、この手法を中心投影の場合にそのまま適用することはできない。

CTスキャナの画像復元の基礎となる線積分からの物体の復元においては、中心投影に対応する扇状ビームや円錐ビームによる投影からの線源の位置に関する十分条件が知られている[6,7]。本論文で取り扱う問題は線積分を影に置き換えた問題になっている。

2. 物体の接平面極座標表示

2.1. 座標と回転行列

3次元ユークリッド空間 R^3 の直交座標を (x, y, z) とし、 R^3 のベクトルを $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ で表すことにする。この座標系を世界座標と呼ぶことにする。また、ベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} との内積を $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ とし、ベクトルのノル

ムを

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (1)$$

とする。

R^3 の回転行列 R_1, R_2, R_3 をそれぞれ、

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

とする。そして、

$$R = R_1 R_2 R_3 \quad (5)$$

とする。このとき、

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T \quad (8)$$

に対して

$$\hat{\mathbf{e}}_i = R^T \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

と置けば、

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)^T \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta)^T \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)^T \quad (12)$$

となる。

次に、 $\mathbf{x} \in R^3$ に対して図1のように決めた θ, ϕ によって

$$D\mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{x}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{x} \right) \quad (13)$$

なる演算を定義する。このとき、式(10), (11), (12)より

$$D\hat{\mathbf{e}}_1 = (\hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) \quad (14)$$

となるから、 $\hat{\mathbf{e}}_1$ に関して

$$\mathbf{R} = (\hat{\mathbf{e}}_1, D\hat{\mathbf{e}}_1) \quad (15)$$

なる関係が成立する。

2.2. 凸物体の接平面

K を \mathbf{R}^3 の凸閉領域とする。 K の境界 ∂K に点 \mathbf{q} で接する平面を $P(\mathbf{q})$ とする。 $P(\mathbf{q})$ の単位法線ベクトルを \mathbf{n} , $P(\mathbf{q})$ と原点との距離を $p(\mathbf{q})$ とすれば,

$$\mathbf{q}^T \mathbf{n} = p(\mathbf{q}) \quad (16)$$

なる関係が成立する。 図 2 に凸物体と、その接平面及び平面の法線ベクトルとの関係を示す。

ここで、 $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}_1$ となるように θ, ϕ を決めれば、 $P(\mathbf{q})$ と原点との距離は θ と ϕ との関数となる、そこで、 $p(\mathbf{q})$ を改めて $p(\theta, \phi)$ と置くことにする。 またさらに、

$$\hat{\nabla} p(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, \phi), \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} p(\theta, \phi) \right) \quad (17)$$

によって球面上の関数に対する勾配演算子 $\hat{\nabla}$ を定義する。

このとき、式 (15), (16) より、

$$\mathbf{p} = (p(\theta, \phi), \hat{\nabla} p(\theta, \phi))^T \quad (18)$$

と置けば、

$$\mathbf{R}^T \mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (19)$$

なる関係が成立する。 したがって、 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ に対して、接平面と原点との距離がわかれば $p(\theta, \phi)$ から ∂K を

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{p} \quad (20)$$

によって決定できる。 そこで、 $p(\theta, \phi)$ を K の接平面極座標表示という。 以下では、式 (20) を

$$\mathbf{q} = (q_1(\theta, \phi), q_2(\theta, \phi), q_3(\theta, \phi))^T \quad (21)$$

と置くことにする。

3. 物体の影からの復元

$\mathbf{a} = (a, b, c)^T$ を原点とし、 \mathbf{a} から原点に向かう方向を ζ 軸の正の方向とする右手系の 1 つを $((\xi, \eta, \zeta))$ とし、観測座標と呼ぶことにする。 観測座標のベクトルを

$$\xi = ((\xi, \eta, \zeta))^T \quad (22)$$

とし \mathbf{R}^3 の回転行列を \mathbf{U} とすれば、世界座標と観測座標とは

$$\mathbf{a} = \mathbf{U}\xi - \mathbf{a} \quad (23)$$

なる関係で結ばれている。

点 \mathbf{a} を投影の中心とし、画像平面 $((0, 0, f))^T$ に映る K の影 $\tilde{K}(\mathbf{a})$ の境界の成す閉曲線 $\partial \tilde{K}$ の上の点を

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{a}) = ((\xi(t), \eta(t)))^T, 0 \leq t \leq T(\mathbf{a}) \quad (24)$$

とする。 ただし、

$$\mathbf{r}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{r}(T(\mathbf{a}), \mathbf{a}) \quad (25)$$

である。

以下では、 $\mathbf{r}(t, \mathbf{a})$ から ∂K を復元する問題を考える。 $\mathbf{r}(0, \mathbf{a})$ を世界座標で見たベクトルの N ベクトル [8] を $\mathbf{l}(t, \mathbf{a})$ とする:

$$\mathbf{l}(t, \mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{\xi(t)^2 + \eta(t)^2 + f^2}} \mathbf{U} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ f \end{pmatrix} \quad (26)$$

\mathbf{a} を固定したとき、 $\mathbf{l}(t, \mathbf{a})$ が原点を中心とする単位球面 S^2 の上に描く曲線 $\partial L(\mathbf{a})$ を N 曲線と呼ぶことにする。

次いで、

$$\dot{\mathbf{l}}(t, \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{l}(t, \mathbf{a}) \quad (27)$$

$$\mathbf{m}(t, \mathbf{a}) = \frac{\dot{\mathbf{l}}(t, \mathbf{a})}{\|\dot{\mathbf{l}}(t, \mathbf{a})\|} \quad (28)$$

と置けば、 $\|\mathbf{l}(t, \mathbf{a})\| = 1$ より、

$$\mathbf{l}(t, \mathbf{a})^T \mathbf{m}(t, \mathbf{a}) = 0 \quad (29)$$

となり、2つのベクトルは直交する単位ベクトルである。そして、 $\mathbf{m}(t, \mathbf{a})$ は $\partial \tilde{K}$ の接ベクトルであるから、

$$\mathbf{n}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{l}(t, \mathbf{a}) \times \mathbf{m}(t, \mathbf{a}) \quad (30)$$

と置けば、 $\mathbf{n}(t, \mathbf{a}), \mathbf{l}(t, \mathbf{a}), \mathbf{m}(t, \mathbf{a})$ を直交軸とする動座標を N 曲線の上に考えることができる。 図 3 に、これら3つのベクトルの関係を示す。

また、 $\mathbf{a}, \mathbf{r}(t, \mathbf{a})$ を通り、 $\mathbf{m}(t, \mathbf{a})$ に接する平面は

$$P(\mathbf{n}) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}^T \mathbf{n}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{n}(t, \mathbf{a})\} \quad (31)$$

となる。そこで、

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{l}(t, \mathbf{a}) \times \frac{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{l}(t, \mathbf{a})}{\left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{l}(t, \mathbf{a}) \right\|} \quad (32)$$

となるように、 θ, ϕ を決めれば、

$$\mathbf{R} = (\mathbf{n}(t, \mathbf{a}), \mathbf{D}\mathbf{n}(t, \mathbf{a})) \quad (33)$$

と置くことができる。

またさらに、

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}(t, \mathbf{a})^T \mathbf{n}(t, \mathbf{a}), \hat{\nabla}[\mathbf{a}(t, \mathbf{a})^T \mathbf{n}(t, \mathbf{a})])^T \quad (34)$$

である。したがって、総ての立体角に渡って $\mathbf{n}(t, \mathbf{a})$ が計測できれば、 ∂K を復元できることになる。

次に

$$\mathbf{n}(t, \mathbf{a}) = (\alpha, \beta, \gamma)^T \quad (35)$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (36)$$

と置けば、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \gamma, & \sin \theta &= \delta^{-1} \\ \cos \phi &= \alpha \delta, & \sin \phi &= \beta \delta \end{aligned} \quad (37)$$

となる。したがって、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha\gamma\delta & \beta\gamma\delta & -\delta \\ -\beta\delta & \alpha\delta & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

となる。また、

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{a})^T \mathbf{n}(t, \mathbf{a}) = a\alpha + b\beta + c\gamma \quad (39)$$

より、

$$\mathbf{p} = (a\alpha + b\beta + c\gamma, -b\beta\delta, -c\delta)^T \quad (40)$$

となる。したがって、式(38)、(40)より、 $\mathbf{n}(t, \mathbf{a})$ の成分によって、 ∂K 上の点を表すことができる。そして、式(30)と式(38)、(40)とより、曲面上の点は $\partial \hat{K}$ の点の N ベクトルの無理関数であることがわかる。

4. 物体の復元条件

投影の中心 \mathbf{a} を固定したとき、画像面上の点 $\bar{\mathbf{x}} \in \hat{K}(\mathbf{a})$ の N ベクトルを $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ とする。このとき、正の実数 λ に対して、

$$C(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}(\mathbf{a})\} \quad (41)$$

は凸円錐となる。 $C(\mathbf{a})$ を視錐と呼ぶことにする。視錐の境界は、

$$\partial C(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \lambda \mathbf{l}(t, \mathbf{a}), \mathbf{l}(t, \mathbf{a}) \in L(\mathbf{a})\} \quad (42)$$

である。

頂点を共有する2つの視錐が

$$C_1(\mathbf{a}) \subset C_2(\mathbf{a}) \quad (43)$$

なる関係を満たすとき N 曲線の関係を

$$\partial L_1(\mathbf{a}) \prec \partial L_2(\mathbf{a}) \quad (44)$$

と記すことにする。

$\mathbf{l}(t, \mathbf{a})$ が $\partial L(\mathbf{a})$ の上を動くとき $\mathbf{n}(t, \mathbf{a})$ の描く N 曲線 $\partial N(\mathbf{a})$ を直交 N 曲線と呼ぶことにする。 $\mathbf{n}(t, \mathbf{a})$ は $C(\mathbf{a})$ の単位法線であるから、式(44)を満たす2つの N 曲線に対して、その直交 N 曲線は逆の関係

$$\partial N_1(\mathbf{a}) \succ \partial N_2(\mathbf{a}) \quad (45)$$

を満たす。またここで、

$$\partial C(\mathbf{a})^\perp = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \lambda \mathbf{n}(t, \mathbf{a})\} \quad (46)$$

を境界とする視錐を $C(\mathbf{a})^\perp$ とすれば、式(43)が成立するとき、

$$C_1(\mathbf{a})^\perp \supset C_2(\mathbf{a})^\perp \quad (47)$$

なる関係が成立する。

図4に頂点を共有し一方が他方の中に含まれる2つの視錐の例を示す。ここで、広い立体角の視錐は球の視錐を想定し、立体角の小さな視錐は球に内接する凸形状の視錐を想定している。

$\forall \mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^3$ に対して、常に

$$C_1(\mathbf{a})^\perp \subset \mathbb{R}^3 \quad (48)$$

であるから、

$$\bigcup_{\mathbf{a} \in A} C_2(\mathbf{a})^\perp \supset \mathbb{R}^3 \quad (49)$$

となるように、 A を決めれば、

$$\mathbb{R}^3 \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in A} C_2(\mathbf{a})^\perp \subset \mathbb{R}^3 \quad (50)$$

より、

$$\bigcup_{\mathbf{a} \in A} C_1(\mathbf{a})^\perp = \mathbf{R}^3 \quad (51)$$

となり、そして、

$$\bigcup_{\mathbf{a} \in A} n_1(t, \mathbf{a}) = S^2 \quad (52)$$

となる。すなわち、 $n_1(t, \mathbf{a})$ が単位球面上を総て動くことになる。

次ぎに、物体 K に対して式 (50) を満たす A の例を示す。 $C_1(\mathbf{a})$ を K の視錐とし、 $C_2(\mathbf{a})$ を K を含み、原点を中心とする半径 r の球を B とする。また、原点を通る 2 つの直交する平面を P_1, P_2 とする。さらに、 P_1, P_2 上の原点を中心とする円をそれぞれ、 c_1, c_2 とする。そして、 c_1, c_2 の半径を $a > r, b > r$ とする。このとき、次の定理が成立する。

[定理 1] 2 つの円の半径が

$$a^{-2} + b^{-2} \geq r^{-2} \quad (53)$$

を満たすとき、

$$A = c_1 \cup c_2 \quad (54)$$

は、式 (52) を満たす。

(証明) 式 (53) が成立していれば、直交 N 曲線の包絡図形は S^2 となる。仮定より、 $K \subset B$ であるから、凸物体 K の直交 N 曲線の包絡図形も S^2 となる。したがって、 K の接平面の単位法線ベクトルを全立体角にわたって決定できる。

証明終

図 5 に視点が円周上を動くとき、2 つの直交 N 曲線 $\partial N_1(\mathbf{a}) \times \partial N_2(\mathbf{a})$ の作る球面上の包絡図形 C^\perp 、 K^\perp とその包含関係を示す。

物体を囲み中心投影によって画像の影から物体を復元するためには、物体から十分離れた直交する 2 つの円周上の点から観測すれば十分であることが、上の定理からわかる。また、 B を K に外接するできるだけ半径の小さな球とし、式 (53) において等号が成立し、しかも $a = b$ である円を採用すれば、可能な限り投影中心の動く円周の半径を小さくすることができる。このとき、 $a = b = r/\sqrt{2}$ となる。

5. 物体の類似度

まず、 $i = 1, 2, 3$ に対して、

$$g_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q_i(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta, \quad (55)$$

とすれば、

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T \quad (56)$$

が ∂K の重心である。また、 $\mathbf{x} \in \partial K$ に対して

$$E = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\mathbf{x}\|^2 \sin \theta d\phi d\theta} \quad (57)$$

とする。このとき、

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{E}(\mathbf{x} - \mathbf{g}) \quad (58)$$

は拡大・縮小および、平行移動に関して不変は図形となる。そこで、

$$\bar{\partial K} = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \partial K\} \quad (59)$$

を規格化された境界と呼ぶことにする。

次ぎに、回転行列を \mathbf{R} として、2 つの開曲面 $\partial K_1(\ni \mathbf{x})$ と $\partial K_2(\ni \mathbf{y})$ との間の距離を

$$\begin{aligned} d(\partial K_1, \partial K_2) &= \sqrt{\min_{\mathbf{R}} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{y}}\|^2 \sin \theta d\phi d\theta} \\ & \quad (60) \end{aligned}$$

とする。式 (60) が距離の公理を満たすことを付録に示す。この距離は定義より、拡大・縮小、平行移動に関して不変である。さらに、回転に関しても不変になっている。

ここで、

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}^T \sin \theta d\phi d\theta \quad (61)$$

と置けば、

$$d(\partial K_1, \partial K_2) = \sqrt{2\{1 - \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)\}^{\frac{1}{2}}} \quad (62)$$

となる。したがって、規格化された 2 つ曲面上の点の相互相関が判れば 2 つの曲面の間の距離が計算できることがわかる。

6. 球殻の復元

4. 節の議論より凸物体を囲む球殻が完全に影の輪郭から復元できれば、凸物体をその影から完全に復元できることがわかる。ここでは、天球を動く太陽

を光源とする影からは凸物体ですら完全には復元できないことを示す。

天球を動く太陽を光源として樹木がなす影の幾何学的な配置は図6のように考えることができる。ここで、 θ は太陽の天中角に相当する。そして、視点は円周上の総ての点を動くことを想定している。図7、図8に示すように、天中角が高くなれば、接平面の単位法線ベクトルが作るN曲線の包絡図形が球面に近くなるために、物体の復元できない部分は少なくなることがわかる。

ここでは、N曲線を利用せずに画像面上の影の輪郭から直接、変換行列および、接平面と原点との距離を計算した。この場合、影の輪郭にそって動く斜交座標を利用して物体の輪郭の接平面極座標表示を計算することになる。

7. むすび

本論文では、形状の凸包の類似性を考えるために、3次元ユークリッド空間の凸閉領域が影から復元できるための十分条件を導いた。また、物体の計測法から導かれる凸閉曲面の記述法を提案した。さらに、3次元運動に不変な物体の類似尺度を物体の記述子から構成した。

本研究の一部は文部省からの科学研究費補助金、ならびに、電気通信フロンティア研究開発によるものである。

参考文献

- [1] Imiya, A. and Kakuda, K. "Description of line figures," Proceedings of 8th SCIA, Vol. 1, pp.601-608, 1993.
- [2] Schwartz, J. T. and Sharir, M.: "Identification of partially obscured objects in two and three dimensions by matching noisy characteristic curves," The International Journal of Robotics Research, Vol. 6, pp.29-44, 1987.
- [3] Lindenbaum, M. and Bruckstein, A.: "Reconstruction of a convex polygon from binary perspective projections," Pattern Recognition, Vol. 23, pp.1343-1350, 1990.
- [4] Li, R. S.-Y.: "Reconstruction of polygons

from projection," Information Processing Letters, Vol. 28, pp.235-240, 1988.

- [5] Stark, H. and Peng, H.: "Shape estimation in computer tomography from minimal data," Proceedings 9th IAPR, Vol. 1, pp.184-186, 1988.
- [6] Falconer, K.: "X-ray problems for point sources," Proceedings of London Mathematical Society, Vol. 43, pp.241-262, 1983.
- [7] Tuy, H. K.: "An inversion formula for cone-beam reconstruction," SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 43, pp.546-552, 1983.
- [8] Kanatani, K.: *Geometric computation for machine vision*, Oxford University Press; Oxford, 1993.

付録

まず、2つの閉曲面 $\partial K_1, \partial K_2$ が互いに相似であるとき、すなわち、 $\mathbf{x} \in \partial K_1, \mathbf{y} \in \partial K_2$ に対して、適当な正の実数 λ 、回転行列 \mathbf{R} 、ベクトル \mathbf{c} が存在して、

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{c}$$

が成立するとき、

$$\partial K_1 \sim \partial K_2$$

と記することにする。このとき、明らかに

$$d(\partial K_1, \partial K_2) = 0 \text{ iff } \partial K_1 \sim \partial K_2$$

である。次に、 $d(\cdot, \cdot)$ の定義より、

$$d(\partial K_1, \partial K_2) = d(\partial K_2, \partial K_1)$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} & d(\partial K_1, \partial K_2) + d(\partial K_2, \partial K_3) \\ &= \sqrt{\min_{\mathbf{R}_1} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{R}_1 \bar{\mathbf{y}}\|^2 d\omega} \\ &+ \sqrt{\min_{\mathbf{R}_2} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{R}_2 \bar{\mathbf{z}}\|^2 d\omega} \\ &= \sqrt{\min_{\mathbf{R}_1} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\mathbf{R}_1^T \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|^2 d\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\min_{\mathbf{R}_2} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{R}_2 \bar{\mathbf{z}}\|^2 d\omega} \\
& = \min_{\mathbf{R}_1} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\mathbf{R}_1^T \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|^2 d\omega} \\
& + \min_{\mathbf{R}_2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{R}_2 \bar{\mathbf{z}}\|^2 d\omega} \\
& \geq \min_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\mathbf{R}_1^T \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|^2 d\omega \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{R}_2 \bar{\mathbf{z}}\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \geq \min_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\mathbf{R}_1^T \bar{\mathbf{x}} \right. \\
& \quad \left. - \mathbf{R}_2 \bar{\mathbf{z}}\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \geq \min_{\mathbf{R}_3} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{R}_3 \bar{\mathbf{z}}\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = d(\partial K_1, \partial K_3)
\end{aligned}$$

より, $d(\cdot, \cdot)$ が三角不等式を満たすことがわかる. ただし,

$$d\omega = \sin \theta d\phi d\theta$$

である.

図の説明

図 1: 極座標, 座標の回転, 基底ベクトルの関係を示す.

図 2: 凸物体, その接平面, 平面の法線ベクトルの関係を示す.

図 3: N 曲線上の 3 動く直交ベクトルの関係を示す.

図 4: 頂点を共有し一方が他方の中に含まれる 2 つの視錐の例. 広い立体角の視錐は球の視錐を想定し, 立体角の小さな視錐は球に内接する凸形状の視錐を想定している.

図 5: 2 つの N 曲線 $\partial L_1(a) \prec \partial L_2(a)$ の作る球面上の包絡図形 C^\perp, K^\perp とその包含関係を示す.

図 6: 動く視点と球殻との空間配置.

図 7: 計測範囲が狭い例 $\theta = 30^\circ$.

図 8: 計測範囲が広い例 $\theta = 80^\circ$.

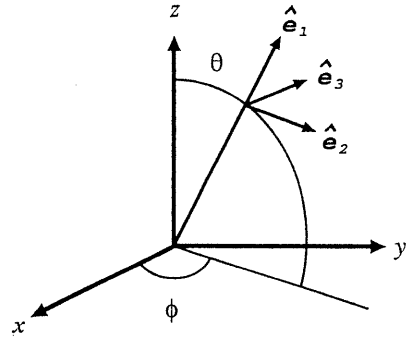


図 1

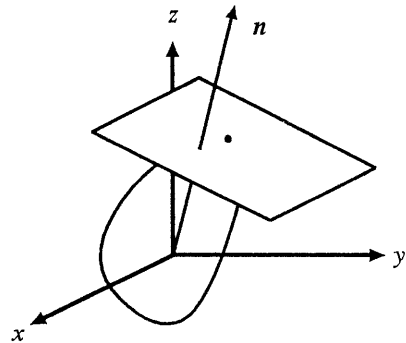


図 2

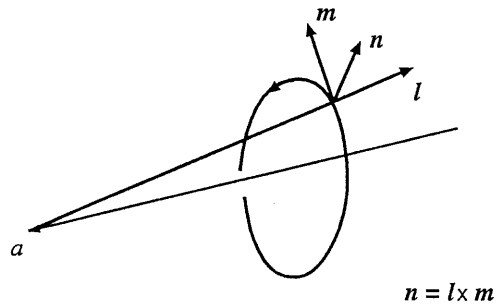
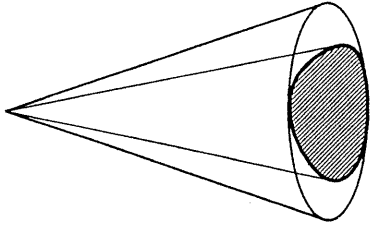
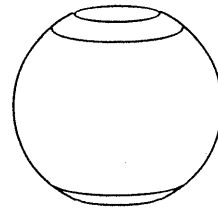
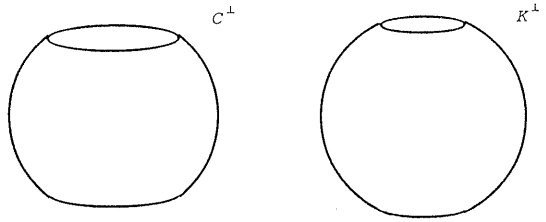


図 3

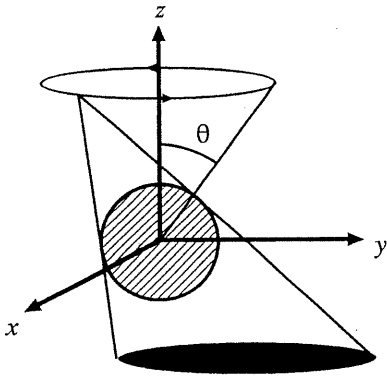
$$n = l \times m$$



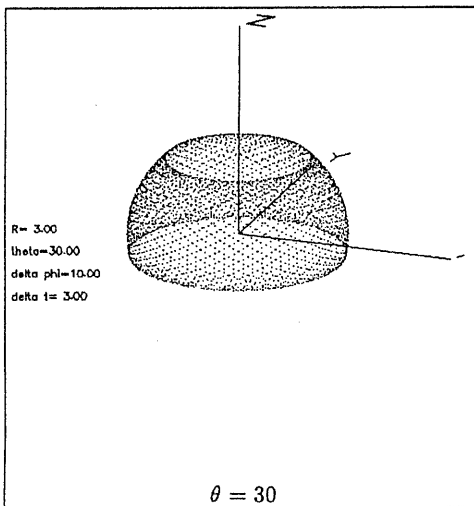
☒ 4



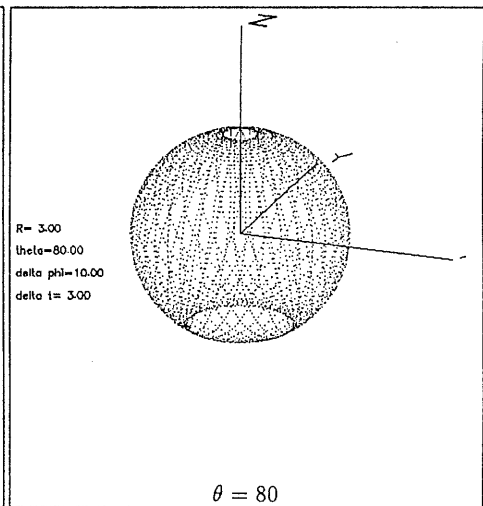
☒ 5



☒ 6



☒ 7



☒ 8