

画像流体保存式と関数展開法による オプティカルフロー

田村進一, Robert Close*, 佐藤嘉伸, James S. Whiting*, Jack Sklansky**

大阪大学医学部機能画像診断学研究所

*Dept. of Medical Physics, Cedars-Sinai Medical Center, LA

**Dept. of Electrical and Computer Engineering, U.C., Irvin

我々はすでに、画像濃淡値が変位により変化しない場合、変位前の画像の展開係数と変位した関数による変位後の画像の展開係数が等しいという拘束条件を用いて画像の見かけ上の変位を求める手法（変位関数展開法、または単に関数展開法）を開発してきた。

本稿では、柔軟物体や流体を対象とし、変位しても対象画像の濃淡値局所総量は保存されるという”画像流体保存式”で画像をモデル化する。この際、圧縮性運動や濃淡値の生成（湧き出し）も許すことにする。この拘束の基に医用画像等の動画像に対して変位関数展開法を適用し、2枚の画像の間の変位場を求める。

キーワード： オプティカルフロー、動き推定、変位、流体モデル、凸投影法、関数展開法。

Optical flow by image-flow conservation equation
and functional expansion

Shinichi Tamura, Robert Close, Yoshinobu Sato, James S. Whiting*, Jack Sklansky**

Div. of Functional Diagnostic Imaging, Osaka University Medical School

*Dept. of Medical Physics, Cedars-Sinai Medical Center, LA

**Dept. of Electrical and Computer Engineering, U.C., Irvin

Abstract

The problem of computing the apparent motion from sequential images can be described as an inverse problem whose solution is a transformation relating the two images. The transformation consists of (1) a displacement field representing motion and (2) intensity sources which represent changes in illumination, obstruction, or noise. In this work, a fluid model is used to relate the effects of these two quantities on image intensity, resulting in a well-defined norm to be minimized in the optimal solution. A solution method is presented which utilizes projections onto the solution space of integral constraint equations. Results are shown for some synthetic sequential image pairs.

Index term: Motion estimation, Optical flow, Fluid model, Convex projection,
Functional expansion.

1. 序

変位場(速度場)を求める手法には、相関法[1,2]と勾配法[3]がある。それに対して我々は変位関数展開法を提案し、(1)変位により画像が大きく歪み、あるいは繰り返し構造のため相関法が使えない場合や、(2)大きな変位のため勾配法が使えない場合に対しても有効であることを示した。その際、画像濃淡値は変位があっても不変に保たれるとの仮定を用いた。この仮定の基に、画像の種々の展開係数は変位があっても不変に保たれるという性質をもとに関係式を導いた。そしてこの関係式を線形化して得られる拘束式群へ初期推定変位を順に投影していくPOCS法により、解(変位場)を求めた。この投影の際には正則化のため、現在の推定値にある意味で一番近い(コスト関数の一番小さい)次推定値を得た。

本稿では、この画像濃淡値不変の場合に加えて、とくに濃淡値の局所総量が保存される場合について考察を行う。後者の場合、画像値を一般流体とみなした"画像流体方程式"を用いて正則化のためのコスト関数を設定する。そして前者と同様のPOCS法により逐次推定を行う。

2. 濃淡値変化モデル

2.1 濃淡値不変

変形(変位)する柔軟物体を撮影した2次元画像を $\rho(\underline{r}, t)$ とする。ここに、 ρ は画像の濃淡値、 \underline{r} は画素の座標、 t は時間である。上に述べた我々はすでに、画像濃淡値が変位に対して不変、すなわち

$$\rho(\underline{r} + \underline{s}, t + \Delta t) = \rho(\underline{r}, t) \quad (1)$$

の場合、変位関数展開法により変位場 $\underline{s}(\underline{r})$ を求める(推定する)ことが出来ることを示した[4]。この場合、よく知られているように対象物体と一緒に動く座標から見た画像濃淡値 ρ の時間変化(実質微分)に関して

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \underline{s}}{\partial t} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2)$$

が成り立つ。この式は物体の速度 $\partial \underline{s} / \partial t$ の画像濃淡勾配方向成分を与える[1]。

2.2 濃淡値局所量保存—画像濃淡値の流体モデル

画像濃淡値を流体とみなし、基本的にはその局所総量が不変であると仮定する。しかしながらそのような場合でも2枚の画像間で、照明や絞りの変化等による画像の濃淡変化、湧出・消滅、occlusion(隠れ)、奥行き方向の動き等により局所総量保存則が必ずしも満たされないことが生ずる。このとき画像の単位面積当りの画像濃淡値変動成分を一般に画像生成成分とよぶこととし、 ρ_* で表す。このとき、一般的な画像濃淡値保存則は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{u} = \frac{\partial \rho_*}{\partial t} \quad (3)$$

ここに、 $\underline{u} = \partial \underline{s} / \partial t$ (速度ベクトル)である。

2.3 圧縮性画像流

一般に、

$$\nabla \cdot \rho \underline{u} = \underline{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \underline{u} \quad (4)$$

なる関係が成り立つ。したがって、物体と共に移動する座標から見た濃淡変化である実質微分 $D\rho/Dt$ は

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho \\ &= \frac{\partial \rho_*}{\partial t} - \rho \nabla \cdot \underline{u} \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。式(5)の第1項は生成による濃淡値の増加項であり、第2項は拡張(拡散)による減少項である。

医用画像を例にとると、X線心血管造影画像では造影剤を運搬する血液自体は非圧縮性であっても造影剤自体の拡散・攪拌により、また心血管系の3次元的な収縮拡張により、造影剤の流れは圧縮性流体画像として扱う必要がでてくる。また心MRIでは心拍にともなう撮像断面外からの流入出により、 $\text{div}(\underline{v})$ 成分と濃淡生成項 ρ_* が生じ、やはりこのような圧縮性流体として取り扱う必要がある。

動きが非圧縮性($\text{div} \underline{u} = 0$)で、かつ $\rho_* = 0$ 、すなわち画像濃淡値の生成がない場合、式(5)の右辺は0となり、式(2)と一致する。一方、Cornelius と Kanade[5]は

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho \neq 0 \quad (6)$$

の場合を提案している。これは非圧縮性の場合に、 $(D\rho/Dt) = (\partial \rho / \partial t) \neq 0$ を仮定することと同じである。

また、武川[6,7]は画像濃淡値生成成分($\partial \rho_s / \partial t$)を物体表面の反射モデルから計算することを提案している。これらは何れも、対象上の特定の点に注目し、それがどう動くかを追跡することに主眼が置かれている。一方、野村、三池ら[8-10]は式(3)において、とくに $\text{div } \underline{u}=0$ の場合に画像濃淡値生成成分($\partial \rho_s / \partial t$)の時間的または空間的滑らかさを拘束として動きを求めている。彼らの方法は他の研究と異なり、対象を追跡すること無く画像平面上で固定された領域で式(3)の諸量を計算している点が特徴である。我々が対象とする医用画像では、上で述べたように $\text{div } \underline{u}$ が無視できず、それを陽に含んだ形で定式化を行う。

3. コスト関数

いま固定した時間区間を考えると、その間の実質微分値の大きさは $D\rho = \delta \rho_s - \rho \nabla \cdot \delta \underline{s}$ となる。この $D\rho$ は2つの項よりなる。これらの項は等しく $D\rho$ に寄与する。そこで、これらの各項の大きさの和を表すベクトル場 $\underline{V} = (\rho \nabla \cdot \delta \underline{s}, \delta \rho_s)$ のノルム

$$\begin{aligned} \|\underline{V}\|^2 &= \int p(\underline{r}) (|\rho \nabla \cdot \delta \underline{s}|^2 + |\delta \rho_s|^2) d\underline{r} \\ &= \|\rho \nabla \cdot \delta \underline{s}\|^2 + \|\delta \rho_s\|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

をコスト関数とする。これは $p(\underline{r})$ で重み付けされたベクトル場のノルムである。そしてこれを最小にする拡張された変位 $\underline{v} = (\delta s_x, \delta s_y, \delta \rho_s)$ を最適な解とする。なお、 p はノルム評価の際の場の重み付け因子であり、画像値 ρ の関数とする。いま付録で示すように、 $p(\underline{r}) = 1/\rho(\underline{r})$ にとると

$$\|\underline{V}\|^2 = \int \rho (|\nabla \cdot \delta \underline{s}|^2 + |\delta \rho_s / \rho|^2) d\underline{r} \quad (7)$$

となる。すなわち、 $\text{div}(\delta \underline{s})$ および相対的画像変動値 $\delta \rho_s / \rho$ の大きさができるだけ小さくなるような拡張変位場 $\underline{v} = (\delta s_x, \delta s_y, \delta \rho_s)$ が求められる。ただし、その際の”大きさ”は画像値 ρ で重み付けられた誤差エネルギーであり、明るいところは大きく、暗いところは小さく評価される。なおこの時、実質微分場のノルムは

$$\begin{aligned} \|D\rho\|^2 &= \int p(\underline{r}) |D\rho|^2 d\underline{r} \\ &= \int \rho (|\delta \rho_s / \rho - \nabla \cdot \delta \underline{s}|^2) d\underline{r} \\ &= \int ((1/\rho) |\delta \rho_s|^2 - 2(\nabla \cdot \delta \underline{s})(\delta \rho_s) + \rho |\nabla \cdot \delta \underline{s}|^2) d\underline{r} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。したがって、2項のcross項は局所画像濃淡値に無関係となる。別の表現をすれば、変位と濃淡値変化の推定時の相互作用は画像濃淡値 ρ の大きな所または小さな所に集中して存在するのではなく、画像全体に拡散している。付録では、 $p(\underline{r}) = 1/\rho(\underline{r})$ に選ぶと、POCS法によりフーリエ成分から変位が復元できることを示す。

流体要素である小領域は最初の画像から次の画像の間で移動するとき、その濃淡値(流体濃度)は流体の収縮拡張および湧き出し消滅(occlusion, 出現, 発生, 照明変化など)にしたがって変化する。式(7)はこれらの項による正規化画像濃淡値変化を最小化する。ここでは、shear(せん断)や回転のコストは組み込んでいない。これらは局所の画像濃度値を変化させないからである。もちろん、運動や濃淡変化に関する別の事前知識が利用可能であればこれらは最適とはいえなくなる。

式(7)は非圧縮性流体でかつ濃淡生成の無い対象に対しては0となる。このタイプの運動に対しては、単に変位場のノルムを最小にするのが適切である。そのような非圧縮性流体の場合にはノルムを

$$\|\delta \underline{s}\|^2 = \int \rho |\delta \underline{s}|^2 d\underline{r} \quad (9)$$

で定義すればよい。

式(7)において、第一の問題は画像濃淡値 ρ が小さなところは評価関数に反映されないため、変位場、濃淡値の推定精度が悪くなることである。そのため目的によっては、ノルムを修正する必要がでてくるであろう。第二の問題は、初期濃淡値が0の領域では、濃淡生成量が不定になることである。したがってそのような場合には、あらかじめ若干のオフセットを加えておく必要がある。オフセット値は雑音のRMS実効値が適切であろう。他の可能性は、2つの生成源を使うことであり、各画像は真の濃淡値プラス誤差源として取り扱うことである。本稿では、濃淡値が0の領域は生成源が無いとした。

式(7)は標準的勾配法によってオプティカルフローを求めるときの正則化のための拘束として使うことができる。しかしながら勾配法の適用は変位の小さなときに限られる。そこで本稿では従来から提案している大局的・積分的な拘束である変位関数展開法(一般化モーメント変換法)を用いる。

4. 関数展開法

4.1 基本式

もし画像特徴(または流体要素)が、最初の画像の位置 \underline{r}_1 から2番目の画像の位置 \underline{r}_2 へ動いたとすると、変位場 $\underline{s}(\underline{r}_1)$ は $\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{s}(\underline{r}_1)$ なる関係で表される。もし、画像濃淡値の局所和が保存されるなら

$$\rho_2(\underline{r}_2) d\underline{r}_2 = [\rho_1(\underline{r}_1) + \rho_s(\underline{r}_1)] d\underline{r}_1 \quad (10)$$

これは先に我々が提案した濃淡値不変の式とは、微分面積要素が付いている点異なる。目標は変位 $\underline{s}(\underline{r}_1)$ および濃淡生成量 $\rho_s(\underline{r}_1)$ の妥当な推定値を得ることである。式(10)の両辺に任意関数(たとえば直交基底関数系 $g_n(\underline{r})$)を掛けて積分することにより

$$\int_{\text{image2}} g_n(r_2) \rho_2(r_2) dr_2 = \int_{\text{image1}} g_n(r_1+s(r_1)) [\rho_1(r_1) + \rho_s(r_1)] dr_1 \quad (11)$$

ここで、最初の画像領域image1は2番目の画像領域image2にマッピングされる。式(11)は画像濃淡分布 $\rho_2(r_2)$ に対して重み関数 $g_n(r_2)$ ($\rho_1(r_1)$ に対しては $g_n(r_1+s)$) で展開していると見ることができ、そのときの展開係数が等しくなければならないという要請を表している。

画像の周辺では $\rho=0$ または $s=0$ と仮定することにより、積分領域 image1 と image2 を等しくすることができる。実際にはこの条件は、周辺で0になる窓関数を掛けることにより、強制的に作り出すことができる。窓操作は理想的には変位ではなく、濃淡値生成項に影響を与えるであろう。

4.2 変位と生成量の推定

様々な重み関数 $g_n(r)$ を選ぶことにより、未知変位 $s(r)$ と生成 $\rho_s(r_1)$ に関する方程式群が得られる。たとえば $g_n(r) = x$ および $g_n(r) = y$ とすると、“重心”の移動を表す一様変位場が得られる[11]。もし $\{g_n(r)\}$ が完全系をなすなら、積分拘束式群から得られる拡張変位場は初期画像から完全な2番目の画像を計算することができるものとなるであろう。しかしながら、得られる変位場は見かけのものであって、必ずしも真の変位場を与えるわけではない。いまこのような例としてFourier重み関数系 $(\exp i \cdot kr)$ を考える。空間周波数ベクトルは $k=(k_x, k_y)$; $k_x=2\pi n_x/w$, $k_y=2\pi n_y/h$, また $n_x, n_y=-w/2 \leq n_x \leq w/2$, $-h/2 \leq n_y \leq h/2$ を満たす整数, w および h はそれぞれ画像の幅および高さである。原理的には N 個の独立な方程式から変位場の N 個の係数を求めることができる。しかしながら、非線形方程式を同時に解くことは非現実的である。それゆえ、凸投影法[12-14]を使う。この方法では方程式群は拘束集合として取り扱われ、解は各拘束方程式の解空間に逐次投影することにより得られる。

上の手続きは一般的にノルムを局所的に最小化する解へ収束し、もし解空間が凸なら絶対的的最小値へ収束する。しかしながら、式(11)は一般的に凸ではない。それゆえ得られる解は大局的な最小コスト解ではなく、局所的な最小コスト解である。得られる解は、重み関数の選び方やその投影順に依存するであろう。拘束に矛盾しない可能な解のうち、できるだけ滑らかな変位を得るために $|n_x|$ および $|n_y|$ の小さい順に投影を行ってほしいであろう。変位は関数展開式の線形化を正当化できるほど十分滑らかでなければならない。三角関数空間波に対してこれは、各波の大きさ(振幅)がその波長に対して十分小さくなければならないという条件となる。コスト関数にdivergence以外の微分項を含まないので、この手続きは通常の滑らかさ拘束とは異なる。もし、変位が低周波空間周波数のみを含むことが仮定されているならば、許される空間モードのみ計算すればよい。

生成の無い非圧縮性変位の場合には $\nabla^2 g_m = 0$ を満たす多重極重み関数 $g_m(r) = r^m \exp(-im\theta)$ を用いればよいであろう。

我々の手法は、展開基底関数としてフーリエ級数を使い、低次より展開していくならば、勾配法において使われる多重解像度法[15-17]に似ている。しかしながらこれらの方法では、画像はスムージングを受け、また各解像度レベルで変位はその微分スケール(勾配の向きがほぼ一定となる範囲)に比べて小さくなければならない。したがって、画像サイズの半分以上も変位しているような対象に対しては低解像度の画像勾配だけでは対処しにくく、特別な処理を必要とする。それに対して、我々の関数展開法では画像はスムージングを受けず、微分もされない。また、展開重み関数として直流を含む三角関数の積分形を用いると、対象の重心を求めて一致させる拘束式ができることから、大きな変位に対してもそのまま適用できる。ただし、各投影の拘束式の線形化を正当化できるようにするため、波長に比べて変位モードの大きさ(振幅)は十分滑らか(急変しない)でなければならない。

4.3 推定画像

変位の推定が完了したならば、最初の画像 $\rho_1(r)$ をその推定変位に基づいて変換することにより2番目の画像 $\rho_2(r)$ の近似が $\rho'(r)$ として得られる。

$$\rho'(r+s(r)) = \frac{\rho_1(r) + \rho_s(r)}{1 + \nabla \cdot s(r)} \quad (12)$$

この式は連続的画像で ρ_s および $\nabla \cdot s$ が小さいと仮定して式(3)の時間積分から得られる。離散的画像においては、最初の画像から2番目の画像に変位するとき、画素は色々な方向に拡張や収縮を受ける。そのとき、変換後の濃淡値の総和は $\rho_1(r) + \rho_s(r)$ であるが、それが $1 + \nabla \cdot s(r)$ 倍の面積にばらまかれることから式(12)が得られる。

5. 実験結果

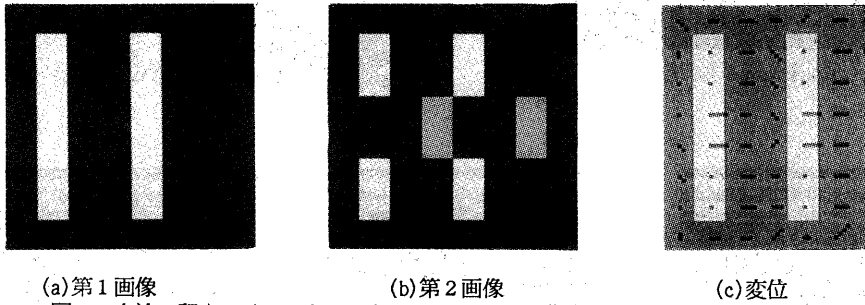
5.1 合成画像

図1(a), (b)は血管部分のtagging (tagging手法により印をつけた) MRI画像をシミュレートした2枚の連続画像である。血流に従って中央の部分が右に移動しているが、濃淡値は少し薄くなったとしている。図1(c)は

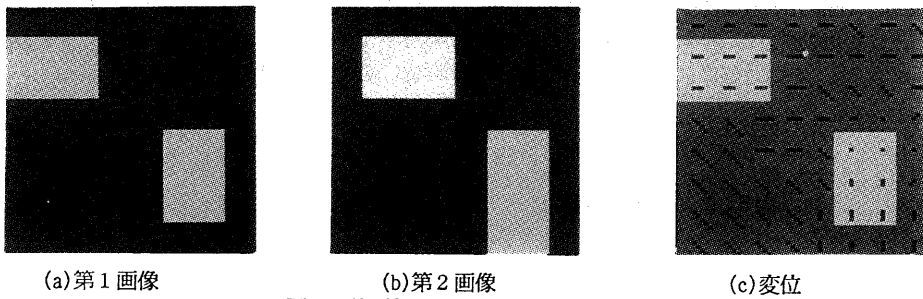
得られた動きを1枚目の画像に重ねて表示したものである。中央部の動きはうまく抽出されている。暗い部分の動きは余り評価しないようになっていたので、そのような場所の動きは正確ではない。

図2(a), (b)には、上の物体はそのまま右へ変位し、右下の物体は下の方へ伸長した合成連続画像を示す。結果を図2(c)に示すが、そのような変位をうまく捉えていることが分かる。

図3(a), (b)には、中央部が右へシフトした合成連続画像を示す。結果を図3(c)に示すが、変位を局所的に処理している部分がある。得られた変位に従って第1画像を変位させた推定第2画像を図3(d)に示すが、右の出っ張りを生ずるため、両側の根元から濃淡値が持ち出されていることが分かる。

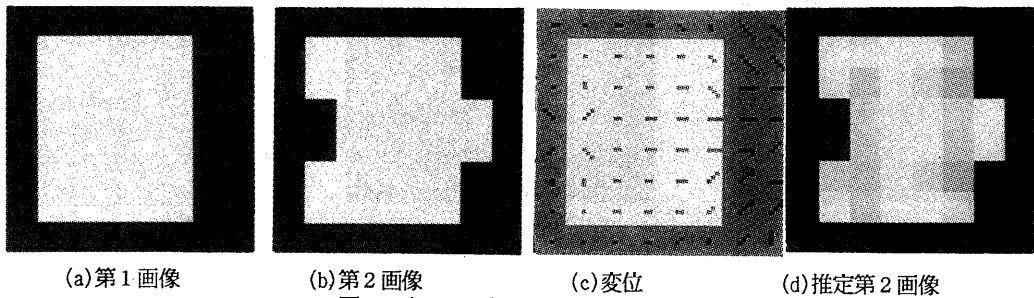


(a)第1画像 (b)第2画像 (c)変位
図1. 血液に印をつけることのできるtagging MRI画像をシミュレートした合成画像



(a)第1画像 (b)第2画像 (c)変位

図2. 伸延部分をもつ合成連続画像



(a)第1画像 (b)第2画像 (c)変位 (d)推定第2画像

図3. 右シフト部をもつ合成連続画像

5. 2 Mモード心エコー図

Mモード心エコー図は2次元画像であるが、横軸は時間であり、縦軸は奥行き位置である。したがって、Mモード心エコー図はビーム方向に沿うターゲットからのエコーの強さを表す縦軸1次元図が連続的に左から右へ時間順に並んだものである。この場合、変位には、隣接する2枚の縦軸1次元図間の変位（隣接変位）と、1枚の初期画像と現在の縦軸1次元図間の変位（長期変位）がある。図4(a)には画像強調されたMモード心エコー図を、また同(b)にはそれ自身から得られた隣接変位を原画像に重ねて示す。図5(a)には図4の最左部を引き延ばした初期画像を示す。図5(b)には、図5(a)から図4へ長期変位を推定する途中で得られた中間

推定変位を図5 (a)の初期画像に適用して得られた画像を示す。また同(c)には最終推定長期変位を適用して得られた図4の推定画像を示す。



図4 Mモード心エコー図

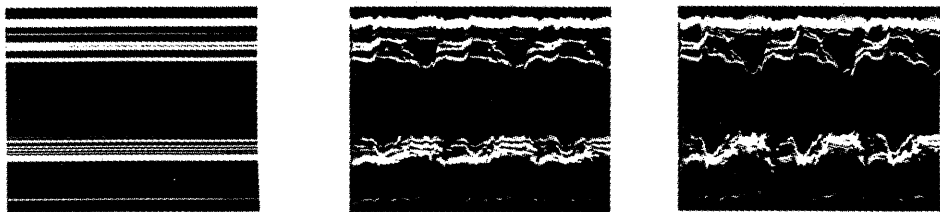


図5 長期変位を初期画像に適用した結果

5.3 tagging 心MRI

図6には tagging 心MRIの(a)収縮初期像, (b)収縮末期像, および(c)得られた変位を(a), (b)の差画像に重ねたものを示す。図(c)には, 中隔壁(左側)より外壁側の方がよく収縮している様子が示されている。これは, 従来の超音波で間接的に, または侵襲的方法で確認されていたことをtagging手法により非侵襲的・直接的に示したものである。

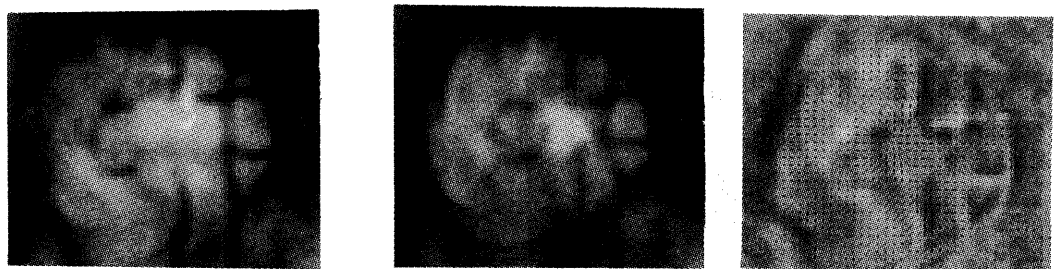


図6 tagging 心MRI

6. むすび

濃淡値量が保存される画像を対象とし, それを画像流体保存式で表現した。これは, 画像流を非圧縮性流体とし, 発散的運動を陽に表現するとともに, 画像濃淡値の生成も考慮するものである。これを基にコスト関数を設定した。

一方, 前報の濃淡値不変の場合と同じく, 変位に対する拘束として, 重み関数による変位前の画像の展開係数と変位後それは等しいという拘束を線形化した拘束式を導いた。この方式は, 2枚目の画像と推定変位に基づく推定画像との間の変位残差をフーリエ級数等の基底関数により順次展開していく方式となっている。2枚の画像間で画像濃淡値の重心を一致させる効果を持ち, したがって大きく変位する画像間の変位も求めることが出来る。

上のコスト関数とこの関数展開法は必ずしも一体のものではなく、分離出来る独立した手法である。したがって、上のコスト関数と通常の滑らかさ拘束の組み合わせでオプティカルフローを求めることもできるし、逆に前報のように一般的な濃淡値不変の拘束の基に、関数展開法を用いてオプティカルフローを求めることもできる。

謝辞：文献をお送り頂いた山口大学三池秀敏教授他の方々に感謝致します。

- [1] G.E. Trahey, J.W. Allison, and O.T. von Ramm, "Angle independent ultrasonic detection of blood flow," IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-34, no. 12, pp. 965-967, Dec. 1987.
- [2] J.K. Aggarwal, L.S. Davis, and W.N. Martin, "Correspondence processes in dynamic scene analysis," Proc. IEEE, vol. 69, pp. 562-572, 1981.
- [3] B.K.P. Horn and B.G. Schunck, "Determining optical flow," Artif. Intell., vol. 17, pp. 185-204, 1981.
- [4] ロバート クロース, 中島義和, 田村進一, 内藤博昭, 原田貢士, 小塚隆弘, "一般化モーメント変換によるオプティカルフロー", 信学論D-II, Vol. J77-D-II, No. 4, pp. 663-671, 1994.4.
- [5] N. Corneliuss and T. Kanade, "Adaptive optical flow to measure object motion in reflectance and X-ray image sequences", Proc. ACM SIGGRAPH/SIGGART Interdisciplinary Workshop Motion: Representation and Perception, Tront, Canada, 1983.
- [6] 武川直樹, "陰影モデルに基づく画像の動き場の推定", 信学論D-II, Vol. J74-D-II, No. 8, pp. 1104-1011, 1991.
- [7] 武川直樹, "動画像からの光源情報復元", 信学論D-II, Vol. J74-D-II, No. 9, pp. 1236-1242, 1991.
- [8] A. Nomura, H. Miike, and K. Koga, "Field theory approach for determining optical flow", Pattern Recognition Letters, Vol. 12, pp. 183-190, 1991.
- [9] 野村厚志, 三池秀敏, 古賀和利, "時間変動する照明下での動画像からの速度ベクトル場の検出", 信学論D-II, Vol. J76-D-II, No. 9, pp. 1977-1986, 1993.
- [10] A. Nomura, H. Miike, and K. Koga, "Detecting a velocity field from sequential images under time-varying illumination", Proc. 4th Int'l Workshop on Time Varying Image Processing and Moving Object Recognition, 3, Elsevier Science B.V., Amsterdam, pp. 343-350, 1994.
- [11] 中島義和, 田村進一, ロバートクロース, 青柳剛, 岡崎耕三, 山本修三, "大局的オプティカルフロー-変位関数展開法-", 情報処理学会コンピュータビジョン研究会87-7, pp. 49-56, 1994. 1. 20.
- [12] L.M. Bregman, "Finding the common point of convex sets by the method of successive projection," Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 162, no. 3, pp. 487-490, 1965.
- [13] L.G. Gubin, B.T. Polyak, and E.V. Raik, "The method of projections for finding the common point of convex sets," U.S.S.R. Computational Math. Math. Phys., vol. 7, no. 6, pp. 124, 1967.
- [14] D.C. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections: Part I-Theory", IEEE Trans. Med. Imaging, vol. MI-1, pp. 81-94, 1982.
- [15] K. Wahn, L.S. Davis, and P. Thrift, "Motion estimation based on multiple local constraints and nonlinear smoothing," Pattern Recognition, vol. 16, no. 6, pp. 563-570, 1983.
- [16] W. Enkelmann, "Investigations of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences," Comput. Vision Graphics Image Process., vol. 43, pp. 150-177, 1988.
- [17] R. Battiti, E. Amaldi, and C. Koch, "Computing optical flow across multiple scales: an adaptive coarse-to-fine strategy," Int. J. Comput. Vision, vol. 6, no. 2, pp. 133-145, 1991.

付録

いま簡単化のため、次の表記を用いる。

$$I_n = \int_{I_{n+1} \times I_2} g_n(r_2) \rho_2(r_2) dr_2 \quad (A1)$$

$$H_n = \int_{I_{n+1} \times I_1} g_n(r_1 + s(r_1)) [\rho_1(r_1) + \rho_*(r_1)] dr_1 \quad (A2)$$

第n拘束式 $I_n - H_n = 0$ の解空間への投影 P_n のうち、ノルム $\|v\|$ を最小にする $v = (\delta s, \delta \rho)$ が解である。

変位および画像濃淡値等を既知量と未知量に分け、次のように表す。すなわち、 $\underline{s}(r_1) = s_0(r_1) + \delta s(r_1)$, $\rho(r_1) = \rho_0(r_1) + \delta \rho(r_1)$, および $H_n(s, \rho) = H_n(s_0, \rho_0) + \delta H_n$ で表す。未知量 $\delta s(r_1)$, および $\delta \rho(r_1)$ がいま求めたい量である。なお、 $\rho_1(r_1) + \rho_*(r_1) = \rho(r_1)$ と定義している。また、重み関数の微分を $\underline{G}_n = \nabla g_n(r)$ としておく。このとき、線形化された関数展開方程式は

$$\begin{aligned} \delta H_n &= H_n(\underline{s}, \rho) - H_n(s_0, \rho_0) \\ &= \int_{I_{n+1} \times I_1} \rho_0(r_1) [\partial \underline{G}_n(r_1 + s_0(r_1)) / \partial s] \cdot \delta s(r_1) + g_n(r_1 + s_0(r_1)) \delta \rho(r_1) dr_1 \quad (A3) \end{aligned}$$

真の解 (\underline{s}, ρ) に対しては $I_n = H_n(\underline{s}, \rho)$ が成立するので、この左辺は $\delta H_n = I_n - H_n(s_0, \rho_0)$ として2枚の画像から求めることができる。

以下、簡単化のため関数の引数等は省略する。Lagrange乗数 $-\lambda (I_n - H_n)$ を加えてコスト関数を次のようにする。

$$C = \int p (|\rho_0 \nabla \cdot \delta \underline{s}|^2 + |\delta \rho|^2) d\underline{r} - \lambda (\ln - Hn) \quad (A4)$$

いま、 $\delta \underline{s} = \delta \underline{s}_0 \exp(\underline{k} \cdot \underline{r})$ になったと仮定する。このとき、 $\nabla \cdot \delta \underline{s} = i \underline{k} \cdot \delta \underline{s} = i k_{p, \dots, n} |\delta \underline{s}|$ 、ここに $i k_{p, \dots, n}$ は $\delta \underline{s}$ に平行な \underline{k} の成分である。コスト関数は

$$C = \int p (k_{p, \dots, n}^2 |\rho_0 \delta \underline{s}|^2 + |\delta \rho|^2) - \lambda (\ln - Hn) \quad (A5)$$

これを $\delta \underline{s}$ と $\delta \rho$ につき最小化すると、次の値を得る。

$$\delta \underline{s} = \lambda \frac{G^*(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)}{p \rho_0 k_{p, \dots, n}^2} \quad (A6)$$

$$\delta \rho = \lambda \frac{g^*(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)}{p} \quad (A7)$$

変位を局所濃淡値に無関係とするために、 $p(\underline{r}) = 1/\rho_0(\underline{r})$ とすることにする。これらの(A6, 7)式により、変位が滑らかなフーリエ成分として得られることがわかる。拘束式から定数 λ は

$$\lambda = \frac{k_{p, \dots, n}^2 [\ln - Hn(\underline{s}_0, \rho_0)]}{\|\rho_0 \underline{G}_n\|^2 + k_{p, \dots, n}^2 \|\rho_0 \underline{g}_n\|^2}$$

となる。これを代入することにより、解は

$$\delta \underline{s} = \frac{\ln - Hn(\underline{s}_0, \rho_0)}{\|\rho_0 \underline{G}_n\|^2 + k_{p, \dots, n}^2 \|\rho_0 \underline{g}_n\|^2} \underline{G}_n^*(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (A8)$$

$$\delta \rho = \frac{k_{p, \dots, n}^2 [\ln - Hn(\underline{s}_0, \rho_0)]}{\|\rho_0 \underline{G}_n\|^2 + k_{p, \dots, n}^2 \|\rho_0 \underline{g}_n\|^2} \rho_0 \underline{g}_n^*(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (A9)$$

となる。変位 $\delta \underline{s}$ は重み関数 g_n の勾配方向 \underline{G}_n^* に向いている。すなわち、重み関数はその勾配方向の変位のみを与えるのである。この勾配は予め計算可能であり、画像自身の微分は必要ないことが特長である。今の場合、 $\underline{k} \neq 0$ に対して $g_n(\underline{r}) = \exp(-\underline{k} \cdot \underline{r})$ とする。前報では $g_n(\underline{r})$ を三角関数等の実数関数としたが、ここでは複素関数としたため、 $\delta \underline{s}$ 、 $\delta \rho$ や他の関数も複素量となっている。この場合には得られた解の実部を最終結果とすればよい。これは、各変数の凸実空間への投影と等価である。

この方式は、2枚目の画像と推定変位に基づく推定画像との間の変位残差をフーリエ級数等の基底関数により順次展開していく方式となっている。画像自体の展開はこのフーリエ級数等の基底関数の積分形であるため、元の0次項(直流分)に対する積分形である1次モーメント項は画像濃淡値の重心を一致させる効果を持ち、したがって大きく変位する画像間の変位も求めることが出来る。

上の場合、 $\delta \underline{s} \parallel \underline{k}$ であるので、 $k_{p, \dots, n}^2 = k_{p, \dots, n}^2$ となる。 $\underline{k} = 0$ のときには重み関数 $g_n(\underline{r}) = 1$ となり、変位0を表すが、次のように画像濃淡値を正規化する：

$$\delta \rho = \frac{\ln - Hn(\underline{s}_0, \rho_0)}{\|\rho_0\|^2} \rho_0(\underline{r}) \quad (A10)$$

$g_n(\underline{r}) = \exp(-\underline{k} \cdot \underline{r})$ で $\underline{k} \neq 0$ のとき、結果は以下のようになる。

$$\delta \underline{s} = \text{Re} \left[\frac{\ln - Hn(\underline{s}_0, \rho_0)}{2k^2 \|\rho_0\|^2} \right] i \underline{k} \exp[i \underline{k} \cdot (\underline{r} + \underline{s}_0)] \quad (A11)$$

$$\delta \rho = \text{Re} \left[\frac{\ln - Hn(\underline{s}_0, \rho_0)}{2 \|\rho_0\|^2} \right] \rho_0 \exp[i \underline{k} \cdot (\underline{r} + \underline{s}_0)] \quad (A12)$$

ここで、 \ln および $Hn(\underline{s}_0, \rho_0)$ はそれぞれ、第2画像および中間画像のフーリエ展開係数であり、 $\|\rho_0\|^2$ は中間画像の濃淡エネルギーである。これらの解は重み関数の勾配方向を向いており、(拡張された)変位の残差場を重み関数の微分で関数展開しているということが出来る。

なお、初期値が $\rho_0 = 0$ であった場合、常に $\delta \rho = 0$ となるので、その場合には雑音レベル程度の若干のバイアス値を初期値につけておく必要がある。

また、 $\nabla \cdot \delta \underline{s} = 0$ でかつ $\delta \rho = 0$ の場合、すなわち非圧縮性変位の場合には、ペナルティ関数は

$$\|\underline{v}\|^2 = \int \rho |\delta \underline{s}|^2 d\underline{r} \quad (A13)$$

とすればよい。各投影において動きが重み関数の勾配方向に向いていることから、 $\nabla \cdot \delta \underline{s} = 0$ の条件は $\nabla^2 g_n = 0$ であることを必要とする。このとき、 $g_n(\underline{r}) = r^m \exp(-im\theta)$ (多重極関数)、ここに $m > 0$ 、 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 、 $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ である。得られる結果は

$$\delta S_x = \text{Re} \left[\frac{\ln - Hm(\underline{s}_0, \rho_0)}{\|\rho_0\|^2} m r^{m-1} \exp[i(m-1)\theta] \right] \quad (A14)$$

$$\delta S_y = \text{Re} \left[\frac{\ln - Hm(\underline{s}_0, \rho_0)}{\|\rho_0\|^2} i m r^{m-1} \exp[i(m-1)\theta] \right] \quad (A15)$$

$$\delta \rho = 0 \quad (A16)$$

各投影の後、変位場と濃淡値は次のように更新される。

$$\underline{s}_0(\underline{r}_1) \leftarrow \underline{s}_0(\underline{r}_1) + \delta \underline{s}(\underline{r}_1) \quad (A17)$$

$$\rho_0(\underline{r}_1) \leftarrow \rho_0(\underline{r}_1) + \delta \rho(\underline{r}_1) \quad (A18)$$