

陰影画像の等濃度線の分布を利用した形状の凹凸の推定

岡谷 貴之 出口 光一郎

東京大学工学部

陰影画像が与えられたとき、特異点（面の向きと光源の向きが一致する最も明るい画像の点）の種類を、極大点、極小点、鞍点のいずれであるかを特定する問題を、特に光源方向が未知である場合について考える。特異点の種類を特定することは、大域的な Shape from Shading 問題の鍵であり、形状の凹凸情報を得ることと等価である。画像の濃淡の鞍点が、常に形状の放物的曲線（ガウス曲率ゼロの曲線）の上にあるというホトメトリック不変性をもとに、この点からの濃淡の最急上昇曲線によってつながれた二つの特異点が、互いに異なる符号を持つことを示す。微分方程式の数値計算を伴うことなく、画像から直接特異点に関する情報を得られる。

Estimation of Convexity/Concavity of Smooth Surface from Shading Using Distribution of Isophotes

Takayuki Okatani and Koichiro Deguchi

Faculty of Engineering, University of Tokyo,
Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

This paper is concerned with the problem of identifying types of image singular point as maxima, minima, or saddle points, especially for the case of unknown lighting direction. (Singular points are defined as maximally bright points in the image whose corresponding surface normals coincide with the lighting direction). The identification of singular points is the key to the global shape from shading problem, and it is equivalent to determine convexity/concavity of the object shape. Using photometric invariance that saddle points of the image grey level profile always lie on the parabolic curves (curves of zero Gaussian curvature), it is shown that the two singular points which are connected by two steepest ascent curves starting from an image saddle point have different signs with each other. This constraints the combination of the types of the singular points in the global shape from shading problem.

1 はじめに

シーンの見かけの明るさは、シーンの物体を照らす照明と、その物体の形状（表面の向き）、そして物体表面の反射特性の三つの要素で決まる。

われわれ人間は、大抵の場合、シーンの画像一枚だけから、物体の形状や配置などを知ることができる。ところが、シーンの照明については、それを正確に言い当てる能力はあまりないと言われる。例えば、適当に照明を与えて撮った、人の顔の写真が一枚与えられたとき、その場の照明がどのようであったかを正しく当てるのは、簡単ではない。われわれ人間は、一般に、形状の差には敏感だが、照明の差にはそれほど敏感でないと言われている [1]。見かけの明るさから形状が分かるのに照明が分からないというのは、上述のように形状と照明が物体表面での光の反射に深く関わる2要素であることを考えれば、不思議である。

画像の明るさから形状を復元することは、コンピュータビジョンの中心的な課題であり、画像と照明の関係に対しても、様々な研究が行われてきた。

以前は、画像だけから照明を推定しようとする試みがあった。例えば、無限遠に置かれた点光源の方向を、画像から推定する方法が提案された。[2, 3, 4]。推定された結果は、そのまま Shape from Shading のアルゴリズムで利用された。しかし、それらの光源方向の推定は、物体の形状に対する強い仮定（面の向きの分布が空間的に一様であるなど）を必要とし、どんな画像にも普遍的に使えるというわけではなかった。

一方、近年、画像だけから照明を完全に決定するのは、原理的に不可能であると主張するいくつかの研究がある [5, 6]。これは、上で述べたような、人間の視覚系が、照明を正確に推定できないのではないかという予想と一致する。それらの研究では、画像から形状と照明を完全に分離した形で推定することはできないと結論されている。（照明の分布についてより深く考察し、あくまでも画像からの照明の推定を中心に、問題の解決を探る研究もある [1].）

もしそうだとすれば、画像から形状を求めるためには、何を計算すればよいのか。一つの考え方は、照明が分からなくても得られる形状の情報、いわゆるホトメトリック不変性 (photometric invariant) [7, 8] を考えることである。例えば、照明を変化さ

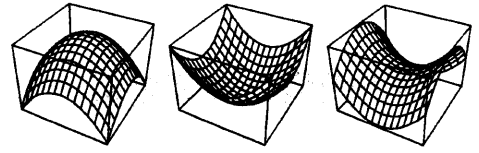


図 1. 特異点付近の形状. 左から極大点, 極小点, 鞍点.

せても、物体表面での明るさの極値は、常に形状の放物的点（ガウス曲率がゼロの点）にあることなどが示されている。ただし、これらの不変性は、非常に狭い部分的な形状の情報（点や線上）しか与えてくれず、そこから、形状の大域的な特徴をただちに引き出すことはできなかった。

本研究は、ホトメトリック不変性をもとに、形状のより大域的な特徴を得ることを目指すものである。具体的には、大域的 Shape from Shading 問題の鍵である、特異点の種類決定を、ホトメトリック不変性をもとにした画像の特徴を用いて行うことを考える。

Shape from Shading は、画像の濃淡と面の向きの関係を表す等式を、面の向きに関する方程式（画像照度方程式）と見立て、これを解く問題として定式化された [9, 10]。問題の正則化を行い、できるだけなめらかで、与えられた濃淡を最もよく表す形状を求めるアルゴリズム [11] がよく研究された一方で、解の一意性についての研究も行われてきた。多くの重要な結果が得られたが、中でも一番重要な結果は、Oliensis [12, 13] によって示された、画像の特異点の種類（対応する形状が極大、極小、鞍点のどれか、図 1 参照）を知ることができれば、それに基づいて形状を一意に定められる、というものである。（これによって正則化は必要でなくなる。）

特異点とは、画像の最も明るい点のことである。特異点の種類を画像から定め、大域形状を計算する問題を、大域的 Shape from Shading 問題と呼ぶ。

この問題に対して、二つのアルゴリズムが示されている [14, 15]。いずれも、光源の方向が与えられたときに、画像照度方程式を、偏微分方程式として解いてみて、特異点付近の形状を決定するものであった。光源の方向が推定できなければアル

ゴリズムは実行できないし、推定が少しでも誤っていると、特異点の種類を正しく同定できる保証がない。むしろ、濃淡画像をごくわずかでも摂動させると、対応するなめらかな形状は存在しなくなることが示されていて [12]、その意味でこれらの方法は頑強ではなかった。

本研究では、特異点の種類情報を、偏微分方程式を明示的に解くことなく、画像の濃淡から直接に得ることを考える。特異点の種類を同定する問題だけを考えると、その結果は形状の大域的な凹凸を示していると考えることができる。本研究では、この同定の問題だけを扱う。光源の方向が分からなくても、特異点の種類に関するある程度の情報が、ホトメトリック不変性に基づいて、画像の濃淡から得られることを示す。

2 ホトメトリック不変性

2.1 画像照度方程式

もっとも理想化された状況（表面がランバート面で、照明は遠方にある点光源ただ一つとし、物体は自分の上に陰を作らず、相互反射もない）を仮定すれば、画像の明るさ $I(x, y)$ は

$$I(x, y) = \rho \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{L}$$

と書ける。ここで ρ は反射係数、 $\hat{\mathbf{N}}$ は面の単位法線ベクトル、 \mathbf{L} は光源の方向を指し、強度をその大きさとするベクトルである。正射影を仮定し、対象表面を画像面からの奥行き $z(x, y)$ で表すことにすると、面の勾配 $(p, q) = (\partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ を用いて、法線ベクトルは $\hat{\mathbf{N}} = (p, q, -1) / \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$ と書ける。

ランバート面では、画像の明るさは視線方向によらない。物体表面の上での濃淡の分布について考えるために、仮想的に画像を光源方向から撮ったと考え、その画像について考える。この場合 $\mathbf{L} = (0, 0, -1)$ となる。実際には光源方向は未知であり、この設定は本章での議論を簡単にするためだけである。¹ 画像 $I(x, y)$ だけから計算できる次のような $n(x, y)$ を定義する。

$$n(x, y) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I(x, y)^2} - 1 \right) \quad (1)$$

¹ 画像の明るさを使って、画像照度方程式を明示的に解くことをしないので、この仮定は議論の本質に関係しない。

以降この関数を画像と同一視する。上述の仮定のもとでは、 $n(x, y) = (p^2 + q^2) / 2$ となる。

2.2 ホトメトリック不変性に関する過去の研究

ここで、ホトメトリック不変性に関する過去の研究について要約する。

Koenderink ら [7] は、ランバート面でできた曲面を、平行光で照らしたとき、曲面上の照度の極点が常にその曲面の放物的曲線（ガウス曲率が 0 の曲線）上にあることを示した。さらに、曲面上の放物的曲線の上では、等照度線（isophotes、照度の等しい線）の向きが、照明の方向によらず一定であることを示した。後に、Yuille [8] は、これらがランバート面でなくても成り立つことと、放物的曲線上で一定となる等照度線の向きが、曲面の主曲率方向と一致することを示した。放物的曲線の上では、2 つある主曲率のいずれかが 0 になる。Yuille は、等照度線の向きに一致する主曲率方向が、0 になる方の主曲率方向になっていることを述べた。これらは、照明によらない不変量であり、ホトメトリック不変性と呼ばれる。

これらを (1) 式の $n(x, y)$ を使って示すことにする。

まず、一つ目の結果について述べる。 $n(x, y) = (p^2 + q^2) / 2$ を x と y についてそれぞれ微分すると、

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (2)$$

を得る。 \mathbf{H} は $z(x, y)$ のヘッセ行列

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$$

である。濃淡の極点では $n_x = n_y = 0$ である。ただちに

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (3)$$

を得る。もしこの極点が特異点でなければ $(p, q) \neq (0, 0)$ 、 \mathbf{H} は固有値 0 を持つ。したがって $\det \mathbf{H} = 0$ となり、この点でガウス曲率が 0 になることがわかる。（ガウス曲率 $K = \det \mathbf{H} / (p^2 + q^2 + 1)^2$ であるから。）これで、特異点を除く濃淡の極点が、常に放物的曲線上にあることが示された。

次に二つ目の結果について考える。放物的点では $\det \mathbf{H} = 0$ である。これを (2) 式と連立させて

H について解くと

$$H = \frac{1}{n_x p + n_y q} \begin{bmatrix} n_x n_x & n_x n_y \\ n_y n_x & n_y n_y \end{bmatrix}$$

を得る。このとき、行列 H 固有値 0 を持てば、それに対応する固有ベクトルが $(n_y, -n_x)$ であることはすぐに分かる。そしてこのベクトル $(n_y, -n_x)$ は等濃度線の方向（つまり濃度勾配の直交方向）に等しい。したがって、放物的曲線の上では、常に等濃度線の方向が 0 になる主曲率方向を向くことが示された。

これらの不変性は、重要なものであるが、形状の上のごく一部（放物的点や曲線上の局所形状）についての情報に過ぎない。そこで、これをもとに、形状の大域的な情報を得ること、具体的には、特異点の種類を特定するのに役立つ情報を得ることを考える。

3 濃淡の分布と特異点の種類

3.1 濃淡の鞍点からの最急上昇線

画像の濃淡 $I(x, y)$ を曲面と見たとき、その曲面を最も上昇する方向に上ってゆく曲線を考える $(n(x, y)$ で考えると最も下る方向)。この曲線は、曲線上の各点で常に等濃度線と直交するような曲線であり、最終的に濃淡の極大点に到達する。このような曲線は、最初の点を決めるとただ一つに決まる。

このような濃淡の最急上昇線の最初の点として、画像上の濃淡の鞍点、つまり画像の濃淡を曲面と見たときの鞍点を考える。一般に、曲面上の最急上昇曲線は、鞍点では正確に 4 本がつながることが知られている。うちの 2 本は鞍点に到達し、残りの 2 本は鞍点からスタートする（図 2）。（Grobman-Hartman の定理。この定理は Oliensis が、画像照度方程式の解である特性曲線²の振る舞いを調べるのに使ったもので [12, 13]、われわれは、濃淡の最急上昇曲線について考えるのにこれを用いる。）濃淡の鞍点から発する最急上昇曲線は、画像内の最急上昇曲線の集合の中で特殊である。

最急上昇線は常に最後は濃淡の極大点に到達するが、これが最大値をとる点（特異点）であることがある。鞍点から発した 2 本の最急上昇線が両方ともそれぞれ別の特異点に到達する場合を考え

²実は曲面の最急上昇線に等しいことが示されている。

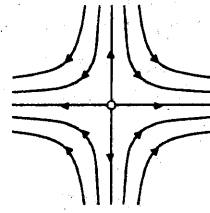


図 2. 濃淡の鞍点付近での最急上昇曲線の振舞い

る。つまりそのような鞍点を選んで、そしてそれが結ぶ 2 つの特異点について考える。

3.2 特異点の種類に関する拘束

本研究の目的は、特異点の種類を、極大、極小、鞍点のいずれであるかを特定する方法を考えることである。

上で述べたような、濃淡の鞍点から発した最急上昇線が結ぶ 2 つの特異点は、ほとんどの場合に、互いに異なる符号を持つことを示す。符号というのは、特異点での物体形状の主曲率の符号のことである。主曲率は 2 つあるから、2 つの特異点が互いに異なる符号をもつというのは、それらの組み合わせが、極大と鞍点、極小と鞍点、極大と極小、鞍点と鞍点、のいずれかであるということを示す。つまり、極大と極大や、極小と極小であることがない。

これは特異点の種類を特定する上での拘束として用いることができる。³

鞍点に端を発する最急上昇曲線に対応する、物体表面の上の曲線を考える。鞍点から特異点に達する途中で、その表面上の曲線の法曲率の符号が変化しないことを示す。また、鞍点に端を発する最急上昇線は 2 本あるが、その 2 本の曲線に対応する曲線の法曲率の符号が、曲線の開始点（鞍点）付近で互いに異なることを示す。もしこれらが正しいとすると、鞍点からの最急上昇曲線が 2 つの異なる特異点で、物体形状の曲率の符号が互いに異なることになる。つまり、上で述べた特異点の種類に関する条件が言えたことになる。

まず、鞍点に端を発する 2 本の最急上昇線の、対

³符号が異なるだけではそれほど強い条件にはならないように思えるが、濃淡の鞍点の数が多く、それらが結ぶ特異点の組の数が多い場合には、画像全体での特異点の種類の組み合わせの可能性を大きく減らすことができる。

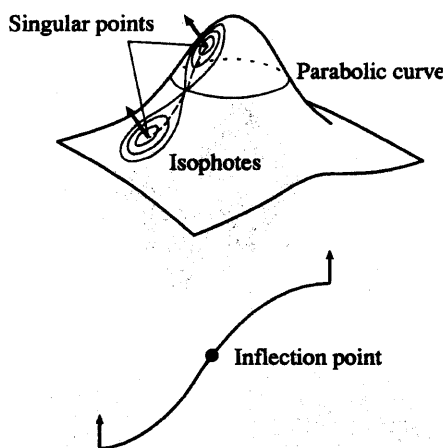


図3. 濃淡の鞍点からの最急上昇曲線がつなぐ二つの特異点. 濃淡の鞍点はその曲線の変極点になる.

応する表面上の曲線の法曲率が、互いに異なる符号をもつことを示す。前に述べたように、濃淡の鞍点（極点）は必ず放物的曲線の上にある。いま考えている2本の最急上昇線は、鞍点でつなぐとなめらかな1本の曲線になる。この曲線に対応する表面上の曲線は、鞍点のところで放物的曲線を横断し、接することはない。（これは、放物的曲線のガウス像を考えると分かる。）

放物的曲線上では、少なくとも1つの主曲率がゼロになる。再び前に述べたように、放物的曲線上での等濃度線の方向は、ゼロになる主曲率方向である。2本の最急上昇線をつないだ曲線は、放物的曲線を横断する際、その接方向とゼロになる主曲率方向とが等しい。つないだ曲線を曲面上で考えると、濃淡の鞍点が曲線の変極点になる（図3）。つまり、その曲線の曲面に対する法曲率が、濃淡の鞍点、つまり放物的点でゼロになり、その前後で符号が入れ替わる。

次に、鞍点に端を発する最急上昇線は、特異点に達するまで、対応する表面上の曲線の法曲率の符号が変化しないことを示す。再び前に述べたように、等濃度線が放物的曲線をまたぐときは常に、ゼロになる主曲率の方向を向く。濃淡の最急上昇曲線は、その定義から、等濃度線と常に直交する。したがって、濃淡の最急上昇曲線が放物的曲線をまたぐときは常に、ゼロになる主曲率の方向と直交することになる。（ただし、開始点である濃淡の

鞍点は除く。）つまり濃淡の最急上昇線は、ゼロになる主曲率の方向を決して向かない。これによって、濃淡の最急上昇線は、その途中で放物的曲線をまたいでも、法曲率の符号は不変であると言える。

ただし、ガウス曲率が負の領域の点（双曲的点）では、主曲率とは関係なく法曲率がゼロになるような方向がある。（ $u^T H u = 0$ となるような方向 u 。）濃淡の勾配方向がこの方向に等しいような点を、最急上昇曲線が通過すると、曲線上の法曲率の符号が変化し得る。しかし、今考えている濃淡の鞍点に端を発する最急上昇線で、そのような点を通るものが存在するのは、大変複雑な曲面に限られる。そしてその場合でも、到達する特異点は鞍点であるから、上で述べた拘束条件に反するものではなく、誤った情報を得てしまうことはないと考えられる。

4 例

前節で述べた特異点の種類に関する拘束が、実際に画像にどのように適用されるかを示す。

図4(a)はラクダのこぶのような形状である。視線と平行な照明のもとでできる画像が同図(b)である。画像には3つの特異点と4つの濃淡の鞍点があることが分かる。今関心があるのは、特異点の間の2つの濃淡の鞍点である。それらは、それぞれ s_1 と s_2 、 s_2 と s_3 の特異点を、最急上昇線でつなぐ。前節の拘束を適用すると、 s_1 と s_2 、 s_2 と s_3 は異なる符号をもつはずである。すなわち、 $s_1 - s_2$ 、 $s_2 - s_3$ は、極大-極大や極小-極小ではありえない。画像内に物体の閉じた遮蔽境界があれば、その内部で特異点で極大と極小のもの個数が、特異点で鞍点の個数を一つだけ上回ることが自動的に分かる [12]。したがって s_1 、 s_3 は極大、極小のいずれか、 s_2 は鞍点であると分かる。もし、さらに形状が凹の領域を持たないことが既知であれば、 s_1 、 s_3 は極大点であると限定できる。そして、これらの予想はもとの形状（図4(a)）と一致する。

図4は図4と同じ形状だが、照明方向を傾けた場合である。3つの特異点が2つの濃淡の鞍点によって結ばれている。上の議論はそのまま適用できる。照明方向が変化しても、濃淡の最急上昇曲線が結ぶ二つの特異点は、画像の濃淡からほぼ正しく得られ、拘束を適用できる。

図6はより複雑な形状である。5つの特異点と8

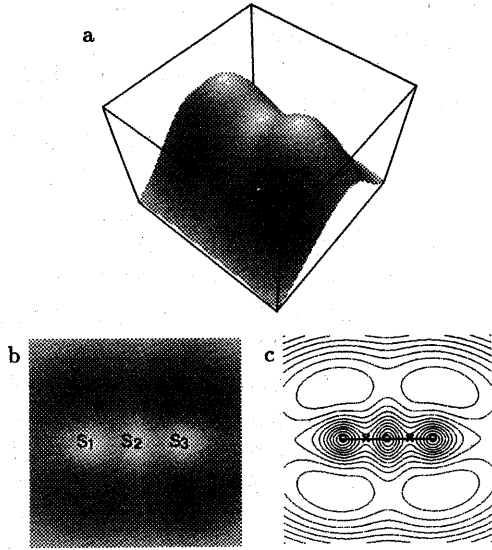


図 4. (a) 形状. (b) 濃淡分布と特異点. (c) 等濃度線分布と最急上昇曲線.

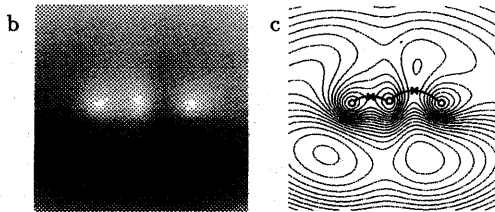


図 5. 傾いた光源方向に対する, (a) 画像と, (b) 等濃度線と最急上昇曲線.

つの濃淡の鞍点がある. 結ばれる特異点は, $s_1 - s_3$, $s_1 - s_5$, $s_2 - s_4$, $s_3 - s_4$, と $s_4 - s_5$ である. それぞれの特異点の対において, その符号は上で述べたように拘束される. 真の特異点の種類は, s_1 :鞍点, s_2 :極大点, s_3 :極小点, s_4 :鞍点, s_5 :極大点, である. 上の拘束はこの特異点の種類と矛盾なく一致する. ただし, この拘束だけでは, 特異点の種類組み合わせはさほど絞れない. 可能な組み合わせは膨大にある. これは, われわれ人間にももとの形状を正しく判断できない陰影画像 (図 6 はその一例) が多くあることと関係があると考えられる.

さらに, 実画像の例を図 7 に示す. これはゴム

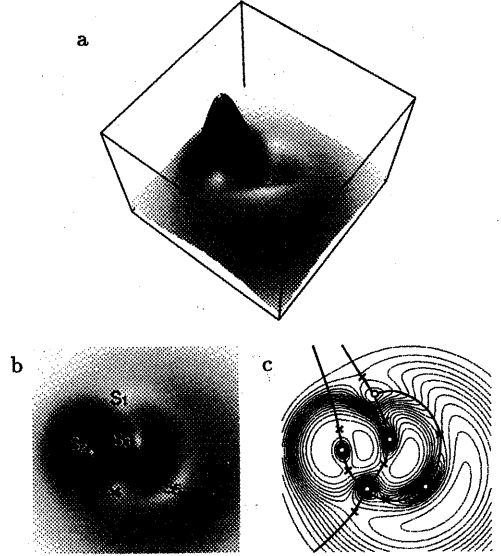


図 6. (a) 形状. (b) 濃淡分布と特異点. (c) 等濃度線分布と最急上昇曲線.

製のおもちゃのアヒルに, 視線に対して傾いた照明を加えて得た画像である. 等濃度線の分布から, 2つの濃淡の鞍点が3つの濃淡の極大点 (おそらく特異点と判断される) を結んでいることが分かる ($s_1 - s_2$, $s_2 - s_3$). 遮蔽境界が見えるので, 特異点の極大, 極小なものは, 特異点で鞍点であるものより一つ多いことが分かり, 特異点の種類組み合わせを大きく絞れる. 実際, s_1 と s_3 が極大, s_2 が鞍点であり, 拘束と一致する. ただし, 実画像では, 特異点を見つけることさえ困難なことが多く, 問題が残される.

5 まとめ

陰影からの大域的な形状復元問題の鍵である特異点の種類の同定を, 微分方程式を解くことなく行うことを考え, ホトメトリック不変性をもとにした特異点の拘束条件について考えた. 特異点の種類は, 形状の凹凸と直接関係しているから, 特異点の種類を同定することは, 大域的な形状を計算する前処理としてだけでなく, それ自体 (おおまかな) 形状を知るといえる. 過去の Shape from Shading の研究では, 画像のいた

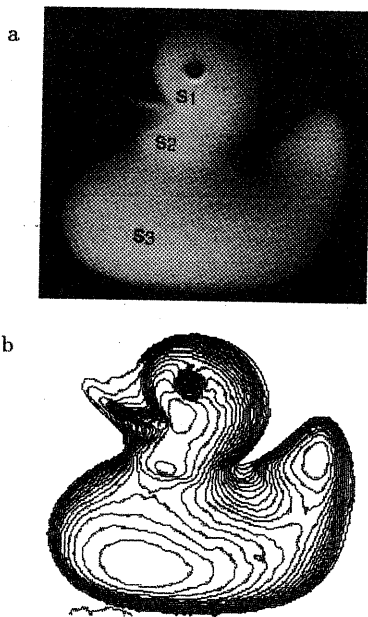


図 7. (a) 濃淡画像. (b) 等濃度線分布.

るところでの奥行きを計算することで、形状復元を行うことが考えられてきた。しかし、光源方向、反射特性に関する知識が不十分なとき、そのようなやり方は現実的でない。本研究は、知識が不十分なときに、凹凸のようなおおまかな形状を知ることを目指したもので、今後より発展させていきたい。

参考文献

- [1] M. S. Langer and S. W. Zucker, "Casting light on illumination: a computational model and dimensional analysis of sources," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 65, no. 2, pp. 322-335, 1997.
- [2] A. P. Pentland, "Finding the illuminant direction," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 72, no. 4, pp. 448-455, 1982.
- [3] A. P. Pentland, "Linear shape-from-shading," *Int. J. of Comput. Vision*, vol. 4, pp. 153-162, 1990.
- [4] Q. Zheng and R. Chellappa, "Estimation of illuminant direction, albedo, and shape from shading," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, no. 7, pp. 680-702, 1991.
- [5] W. Chojnacki and M. J. Brooks, "Can the sun's direction be estimated from an image prior to the computation of object shape?," *J. Mathematical Imaging and Vision*, vol. 7, pp. 139-147, 1997.
- [6] P. N. Belhumeur, D. J. Kriegman, and A. L. Yuille, "The bas-relief ambiguity," in *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 270-277, 1997.
- [7] J. J. Koenderink and A. J. van Doorn, "Photometric invariants related to solid shape," *Optica Acta*, vol. 27, no. 7, pp. 981-996, 1980.
- [8] A. L. Yuille, "Zero crossing on lines of curvature," *Comput. Vision. Graph. Image Process*, vol. 45, pp. 68-87, 1989.
- [9] P. H. Winston, ed., *The psychology of computer vision*, ch. Obtaining shape from shading information, pp. 115-155. New York: McGraw Hill, 1975.
- [10] B. K. P. Horn, *Robot Vision*. MIT Press: Cambridge, MA; and McGraw-Hill: New York, 1986.
- [11] B. K. P. Horn and M. J. Brooks, *Shape from shading*. Cambridge, MA: MIT Press, 1989.
- [12] J. Oliensis, "Shape from shading as a partially well-constrained problem," *Comput. Vision. Graph. Image Process*, vol. 54, no. 2, pp. 163-183, 1991.
- [13] J. Oliensis, "Uniqueness in shape from shading," *Int. J. of Comput. Vision*, vol. 6, no. 2, pp. 75-104, 1991.
- [14] J. Oliensis and P. Dupuis, "A global algorithm for shape from shading," in *4th ICCV Conference, Berlin*, pp. 692-701, 1993.
- [15] R. Kimmel and A. M. Bruckstein, "Tracking level sets by level sets: A method for solving the shape from shading problem," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 62, pp. 47-58, July 1995.