解　説

様相論理とその情報処理への応用

（I） 様 相 論 理†

堂 下 修 司†† 西 田 豊 明†† 三 浦 欽 也††

1. は じ め に

元来，論理学は，自然言語の意味や内容，及びその上での思考や推論を，あいまいさを排して形式的に表現することを目的として発展してきた．

このため，情報処理の分野でも，「意味」や「推論」を形式的に扱う場合には，論理を利用できることも少なくない．実際，古典論理の利用としては，論理設計における命題論理や，プログラムの検証や論理型プログラミング言語における第一階述語論理の利用などがよく知られている．

様相論理は，古典論理の拡張であり，古典論理では表現しきれなかったある種の「意味」や「推論」を形式的に扱うことができる．したがって，応用範囲も古典論理に比べて広くなり，情報処理のさまざまな分野で利用されるに至っている．また，応用分野で要求された表現能力を満たすために，新たに種々の様相論理が提案されるという，逆の動きも起こっている．

本稿では，様相論理の基礎を概説し，種々の様相論理体系と，その情報処理への応用について，概観する．

2. 様 相 概 念

論理とは，ある意味では自然言語の近似であると見なすことができるが，その意味において，第一階述語論理などの古典論理は，自然言語のなかなかよい近似であると言える．ところが，自然言語の表現においては，古典論理では表現しきれないような内容をもったものが存在する．たとえば，次のような文である．

（1） 市民権を有するものは，必然的に納税義務を有する．

（2） あしたは，雨かもしれない．

（3） 何人もこの橋を渡ってはならない．

（4） この橋を渡ってもよい．

これらの文のうち，「必然的に～」「～かもしれない」「～してはならない」「～してもよい」といった表現は，古典論理の枠内では，自然な表現ができない．たとえば，（1）の文の，「必然的に～」という言葉は，「市民権を有するものは，納税義務を有する．」という文全体にかかって，新たに文を生成するものと考えられるから，これを一つの演算子と考えて，□で表すことにすると，（1）の文は，

（1） $\Box(\forall x)(\mathrm{Citizen}(x) \supset \mathrm{Must\text{-}pay\text{-}tax}(x))$

というような論理式に翻訳される筈である．

このような演算子□のもつ意味は，次のように考えられる．すなわち，$\Box p$ が真であるとは，p が「必然的」に真である，ということで，仮に p が真であっても，p が「偶然的」に真であるだけなら，$\Box p$ は，真とはならない，ということである．

ここで，「必然的」真と，「偶然的」真を区別したわけであるが，この考え方が，様相論理（厳密には真理様相論理）において，本質的なものである．つまり，従来の古典論理では一つのものと見なしていた「真」の概念を，「必然的」，「偶然的」の二つに分け，（当然「偽」も同様に二つに分けられる．）別のものとして，扱うということである．

この考え方の背後には，なんらかの「状況」の変化によって，真から偽へ，偽から真へと，変化する命題と，「状況」の変化によらず，普遍的に真（あるいは偽）なる命題を区別すべきである，という態度が潜んでいる．この「状況」というものをどのように考え，形式化するかが，様相論理の大きな問題であるが，これらについては，**3.2** で詳しく議論する．

以上の考察から，演算子□の取るべき振舞いを考察すると，これは，古典論理の枠組みでは不可能であるということが，明らかになる．なぜなら，古典論理においては，このような演算子は4通りしかなく（それ

† Modal Logic and its Applications to Information Processing, Part 1: Modal Logic by Shuji DOSHITA, Toyoaki NISHIDA and Kinya MIURA (Department of Information Science, Kyoto University).

†† 京都大学情報工学教室

ぞれ，真・偽の入力に対する応答が，真・真，真・偽，偽・真，偽・偽，となるもの)，□がそのいずれであると仮定しても，不自然だからである．すなわち，p が偽であれば，$\Box p$ は，明らかに偽であるが，p が真であっても，$\Box p$ は，真であるか偽であるかが（それだけでは）確定しないからである．このような演算子を様相演算子と呼ぶ．

(2)の文の「〜かもしれない」という表現は，先に述べた「偶然的」真を表す表現であり，「必然的」真とは，双対的な概念となる．「〜かもしれない」を◇という演算子を用いて表すとすると，これも，当然，真理関数的に表すことはできないが，直観的に考えると，

$\Diamond p \Leftarrow \sim\Box\sim p.$

が成り立つと，考えられる．この□と◇のような様相演算子の組を，双対であるという．

同じようなことは，(3)(4)の，「〜してはならない」「〜してもよい」についても成り立ち，これらは双対な様相演算子の組となる．

これらのような，双対な（非真理関数的な）様相演算子の組を含む論理が，様相論理である．特に(1)(2)のように，「必然性」に関する様相を真理様相と呼び，狭義の様相論理は，これを指す．

3. 様相命題論理

この章では，様相論理のうちの様相命題論理を扱う．様相命題論理には種々の体系が存在するが，以下の節では，代表的なものとして，K，T，S4，S5，を扱う．その他の体系とそれらの間の関係については，文献 3)，12)，13) などを参照されたい．

3.1 種々の様相の公理系

この節では，様相命題論理の種々の公理系（K，T，S4，S5）の証明論的な定義について簡単に触れる．これらの公理系の解釈については，次の節で厳密に扱う．なお，この章における種々の定義などは，おおむね文献 3) による．

まず記号を定義する．様相命題論理の論理式は，以下のような記号によって生成される．

1) 命題変数　　$p, q, r, \ldots$
2) 論理演算子　　$\vee, \sim, \Box$.
3) その他の記号　　(,).

これらのうち，□以外の記号は，通常の命題論理で用いられるものである．この□は，様相演算子と呼ばれ，様相命題を表現するのに用いられる．

次に，これらの記号を用いて，論理式を定義する．

［定義 3.1］（様相命題論理の論理式）

1) 命題変数は，論理式である．

2) α，β が論理式ならば，$(\alpha\vee\beta)$，$\sim\alpha$ は論理式である．

3) α が論理式ならば，$\Box\alpha$ は論理式である．（「α が必然である」と読む．）

この定義のうち，1)，2) で定義されるものが通常の命題論理の論理式であり，3) で定義されるものが，様相命題である．

以上のような定義で，様相命題論理の論理式が表現できるが，より見やすくするために，次のような記号を定義して用いることがある．

［定義 3.2］

論理式 α，β について，

1) $\alpha\cdot\beta \Leftarrow \sim(\sim\alpha\vee\sim\beta)$.
2) $\alpha\supset\beta \Leftarrow (\sim\alpha\vee\beta)$.
3) $\alpha\equiv\beta \Leftarrow ((\alpha\supset\beta)\cdot(\beta\supset\alpha))$.
4) $\Diamond\alpha \Leftarrow \sim\Box\sim\alpha$.
5) $\alpha\dashv\beta \Leftarrow \Box(\alpha\supset\beta)$.
6) $\alpha=\beta \Leftarrow ((\alpha\dashv\beta)\cdot(\beta\dashv\alpha))$.

1)〜3) については，通常の命題論理でおなじみのものであるが，4)〜6) については様相論理特有のものである．これらはそれぞれ，「α が可能である」($\Diamond\alpha$)，「β は α を厳密に含意する」($(\alpha\dashv\beta)$)，「α と β は厳密に等値である」($(\alpha=\beta)$) と読む．また，誤解を招く恐れのないときは，括弧を省略することがある．

これらの準備をもとに，様相命題論理の公理系を定義することができる．様相命題論理は，通常の命題論理を様相命題も扱えるように拡張したものであるから，通常の命題論理の公理系に，新たに公理と変換規則（推論規則）を付加したものとなる．ここでは，その付加される公理と変換規則を示す．

［公理型］（様相に関する公理型）[13)]

A1：$\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$.

A2：$\Box p\supset q$,（必然性の公理）.

A3：$\Box p\supset\Box\Box p$.

A4：$p\supset\Box\Diamond p$.

［変換規則］（様相命題に関する変換規則）

R1：$\vdash\alpha$ ならば $\vdash\Box\alpha$.

なお，公理型とは，その中の命題変数にどのような論理式を代入しても公理になるような，公理を作る枠組みのことで，公理スキーマとも呼ばれる．したがっ

て，一つの公理型は無数の公理に対応する．また，$\vdash \alpha$ は，α が証明可能であることを表す．

様相論理には，なにを「必然」と捉え，なにを「可能」と捉えるかによって，異なった種々の体系が考えられるが，それらの相違は，通常の命題論理の公理系に，どのような公理(型)（及び変換規則）を付加するかによって定まる．

上の A1～A4，R1のすべてを含む公理系は，S5と呼ばれる．また，S5から A4を除いたものは S4，A4と A3を除いたものは T と呼ばれる．さらに，Tから A2を除いたものは，K または T(C) と呼ばれ，正規様相の体系とも呼ばれる．

[定義 3.3]（様相命題論理の公理系）

K　：PC+A1+R1．

T　：PC+A1～A2+R1．

S4：PC+A1～A3+R1．

S5：PC+A1～A4+R1．

ただし，PC は通常の命題論理を表す．

この様相に関する公理型のうち，A2～A4 は，次の節でこれらの公理系に解釈を与えるときにモデルの構造と深い関わりをもつことを示す．

3.2 可能世界意味論的な解釈

前の節で定義したような様相命題論理の体系（K, T, S4, S5 など）は，古典的な論理と同様の方法では，その解釈が不可能である．その主たる理由は，様相演算子□は，その引数のみに依存して値が定まるわけではなく，非真理値関数的な性質をもっているからである．

このような様相命題論理の体系の解釈には，代数を用いるなどの方法もあるが[12),13)]，ここでは，可能世界を用いた解釈を考える[13)]．これは，論理式の解釈に「場合」という概念をもちこみ，「$\Box\alpha$」の解釈を，「いかなる場合においても α である．」とするものである．この「場合」のことを，「可能世界」と呼ぶ．

正則モデル構造（解釈を行うための枠組み）を，以下のように定義する[13)]．（正則でないモデル構造も考えられるが，本解説では正則なもののみを扱う．非正則なものについては，たとえば文献 12) などを参照されたい．）

[定義 3.4]（正則モデル構造）

正則モデル構造 Σ は，二つ組 $\langle$K, R$\rangle$ で表される．ただし，

K：可能世界の集合，

R：Kの要素（可能世界）間の二項関係，（到達可能関係：accessibility relation），

である．

このモデル構造をもとに，付値関数を用いて，様相命題論理の解釈を与えることができる．

[定義 3.5]（付値関数）

（モデル構造 Σ の上の）付値関数 V は，命題変数と可能世界の二つの引数をとり，真理値（0，または 1）を値として取る関数である．

$V(p, w)=t$,　p：命題変数，

$w \in K$,

t：真理値．

様相命題論理のモデルは，モデル構造 Σ と，付値関数Vの対で表すことができる．

[定義 3.6]（モデル）

（様相命題論理の）モデル M は以下のように定義される．

$M=\langle \Sigma,\ V \rangle$,

Σ：モデル構造，

V：（Σ 上の）付値関数．

ある論理式の解釈（真偽）は，付値関数Vを拡張することにより，モデルと可能世界（Kの要素）に依存して決定される．

[定義 3.7]（付値関数の拡張）

以下の規則により，付値関数Vは，その第一引数を論理式まで拡張できる．（$V*$）

1）$V*(p, w)\ =V(p, w)$,

p：命題変数．

2）$V*(\sim\alpha, w)=1-V*(\alpha, w)$.

3）$V*(\alpha\vee\beta, w)$

$=\max\ (V*(\alpha, w),\ V*(\beta, w))$.

4）$V*(\Box\alpha, w)=\min\ (V*(\alpha, w'))$,

$\forall w'$

s.t. wRw'.

この定義より明らかなように，可能世界的な解釈と，通常の論理の解釈との相違は，前者においては，その解釈を行っている可能世界（付値関数の第二引数）に真理値が依存することである．

以上のように付値関数を定義することにより，妥当性に関する定義の準備が整った．上で定義した付値関数は，ある正則モデル構造に依存しているわけであるから，妥当性に関しても，あるモデル構造の上で議論することが必要である．

[定義 3.8]

ある論理式 α が，モデル構造 Σ $(=\langle$K, R$\rangle)$ にお

いて妥当であるとは，Σ 上のいかなるモデル $M=\langle\Sigma, V\rangle$，及び，いかなる可能世界 $w(\in K)$ に対しても $V*(\alpha, w)=1$ となることである．

［定義 3.9］(妥当性)

ある論理式 α が，妥当であるとは，α が，いかなるモデル構造 Σ においても妥当であるということである☆．

さて，ここで，前の節で扱った種々の体系における定理（証明可能な論理式）と，妥当な論理式の関係を考えてみたい．このとき，証明は省略するが，以下のような結果が得られる[13]．

［定理 3.10］

任意の論理式 α について，α が妥当であるならば，α は K において証明可能である．

T，S4，S5 は，いずれも K の体系を含んでいるから，K において証明可能な論理式は，T，S4，S5 においても証明可能となる．ゆえに，定理 3.10 と同様の結果は，T，S4，S5 においても得られる．一方，この定理の逆はK以外の体系では成り立たない．

このため，T，S4，S5 などについて，逆が成り立つためには，妥当性を議論するときのモデルに対して制約を加える必要がある．これについて，もう一度，前の節で示した様相に関する公理型の A2～A4 のもつ意味を考察してみると，これらは，モデル構造における二項関係Rの性質を表していることがわかる．すなわち，

A2：$\Box p \supset p$，　←Rにおける反射律．

A3：$\Box p \supset \Box\Box p$，←Rにおける推移律．

A4：$p \supset \Box\Diamond p$，　←Rにおける対称律．

結局，次のような定理が成り立つ[3]．

［定理 3.11］

任意の論理式 α について，

1）α が反射的なRをもつ任意のモデル構造において妥当であるならば，そのときに限り，α はTにおいて証明可能である．

2）α が，反射的かつ推移的なRをもつ任意のモデル構造において妥当であるならば，そのときに限り，α は S4 において証明可能である．

3）α が，反射的，推移的かつ対称的なRをもつ任意のモデル構造において妥当であるならば，そのときに限り，α は S5 において証明可能である．

この定理におけるおのおのの妥当性は，T妥当，S4 妥当，S5 妥当と呼ばれる．この定理 3.10，11 は，様相命題論理の完全性を表している．なお，これらの様相命題論理における決定手続きが存在するが，詳しくは，文献 3）の第5章，第6章を参照されたい．

4. 様相一階述語論理

この章では，主に文献 3）に基づき，様相一階述語論理について述べる．様相一階述語論理は，様相命題論理の拡張となっているが，述語論理のプリミティブである限量子の扱いにおいて種々の問題がある．情報処理への応用としては，プログラム検証などがあげられる．

4.1 様相命題論理との相違点

述語論理とは，命題に，内部構造を考え，述語と個体変数を取り入れたもので，その結果，限量子（∀，∃）という新しい要素が加わったものである．様相一階述語論理は，通常の第一階述語論理を，様相演算子を含むように拡張したものであり，様相命題論理の場合と同じように，第一階述語論理の公理系に，様相に関する公理を追加することで得られる．（なお，通常の第一階述語論理の公理系は，命題論理の公理系にいくつかの公理(型)と，推論規則を付け加えたものであるが，ここでは，本題から離れるので，これ以上は触れない．）

このようにして得られる様相一階述語論理には，次のようなものがある．

［定義 4.1］(様相一階述語論理の公理系)

LPC+K　：LPC+A1+R1．

LPC+T　：LPC+A1～A2+R1．

LPC+S4：LPC+A1～A3+R1．

LPC+S5：LPC+A1～A4+R1．

ただし，LPC は通常の第一階述語論理を表す．

様相一階述語論理における問題点の一つは，命題論理から拡張されたときに持ち込まれた限量子（ある種の単項演算子とみなせる．）と，様相演算子の関わりに関するものである．これは，次の論理式を公理型に含めるか否かの問題である．

［公理型］(Barcan 式：BF)

A5：$(\forall x)\Box F[x] \supset \Box(\forall x)F[x]$．

これは，限量子と様相演算子との可換性を表すもので，これが成り立つか否かは，その論理が扱うべきモデルに依存する問題である．このことは，次の節にお

☆ 本解説においては，モデル構造として正則なもののみを考慮しているが，本来の妥当性の定義では，非正則なものも含めて，いかなるモデル構造に対しても妥当であることが必要十分条件となる．この定義による妥当性（正則なモデル構造のみを考えたもの）は，K 妥当（または，T (C) 妥当）と呼ばれる[13]．

いて考察する.

この BF は, LPC+S5 においては定理として導くことが可能であるが, それ以外の LPC+T, LPC+S4 においては, 他の公理型と独立に付け加えることができる. それゆえ, 結局 BF が成り立つ公理系としては, (LPC+)T+BF, (LPC+)S4+BF, LPC+S5 などが考えられる.

4.2 モデル論と Barcan 式の意味

様相一階述語論理のモデルは, 前章で扱ったようなモデル構造と,「個体」というカテゴリの事物の領域, すなわち個体領域, 及び付値関数によって定義することができる. このモデルの付値関数は, 様相命題論理の付値関数の拡張になっており, 個体変数に対しては, 個体領域中の要素を割り当てる.

当然予想されるように, この付値関数による個体変数への割り当ては,「可能世界」に依存して定まるが, 個体領域そのものが,「可能世界」に依存するかどうかは直観的には明らかではない. すなわち,

「想像しうる (到達しうる) いかなる世界であっても, その世界を構成している『もの』の集合は共通のものである. ある『もの』が, ある世界においては存在し, 他の世界においては存在しないというようなことはありえない.」

という主張が正しいかどうかは, どのような「必然性」を考えているかに依存する.

したがって, 様相一階述語論理においては, 個体領域が可能世界に依存するようなモデル化と, 逆に, 個体領域が唯一で, 可能世界とは独立であるようなモデル化が可能である.

前の節で述べたように, 様相一階述語論理の種々の体系には, BF (Barcan 式) が成り立つもの (T+BF, S4+BF, LPC+S5 など) と, そうでないもの (LPC+T, LPC+S4 など) があるが, 実は, これらの体系の差異は, 上に述べたようなモデルの差異となって現れる. このことを明らかにするために, ここで, BF:

$$(\forall x)\Box F[x] \supset \Box(\forall x)F[x]$$

の表す意味を考察してみると, これの主張している内容は,

「(現実世界の) すべてのものが必然的にもっている性質は, (到達しうる) いかなる世界においても, (その世界の) すべてのものがもっている.」

と言い変えることができる. しかしこれは, 暗黙に「現実世界のすべてのもの以外のものは, 他の世界においても存在しない」ということを仮定している. なぜなら,「現実世界においてはすべてのものがもっている性質F」をもたないようなものの存在を他の世界において許すと, BF が主張している内容は, もはや成り立たないからである. したがって, BF が成り立つような公理系は, 個体領域が, どの可能世界においても不変であるようなモデル化をするのが妥当である. また, 他方, BF が成り立たない公理系は, 可能世界ごとに個体領域が異なる (もちろん共通の要素も存在する) ようなモデル化をするべきである.

この BF の前件と後件の意味の差は, de re 様相, de dicto 様相と呼ばれる. これは, 前件においては, 必然性が, ある個体 (res) がある性質をもつかどうかに関わっているのに対し, 後件においては, 特定の個体にではなく, もっと一般的な言明 (dicto) に必然性が関わっているからである. なお, 前件の全称限量子は, 現在の可能世界における個体領域の上を動くのであって, 全可能世界の個体領域すべての上を動くわけではない, ということに注意すべきである.

この節では様相一階述語論理のモデル化において, Barcan 式が, どのような意味をもつかについて述べた. モデル化の具体的な方法などは, 文献 3), 及びその参考文献を参照されたい. また, 等号を含むような様相一階述語論理も考えることができ, その公理系やモデルについて, さまざまな問題点があるが, 詳しくは文献 3) などを参照されたい.

5. 時間を扱う様相論理

様相論理で時間を扱うにはいくつかの方法があるが, ここでは, 時制論理, 時相論理, 及び通常の様相論理とは, 少し異なるが, McDermott の時間論理を紹介する. 時制論理とは, 通常の論理に, 未来時制と過去時制に対応する2組の様相演算子を導入したものである. 形式化の方法にはいくつかの種類があるが, ここでは, 未来に対する必然性の演算子Gと, 過去に対する必然性の演算子 H を基礎としたものを考える. この二つの演算子 G, H は, それぞれ「未来において常に…である.」,「過去において常に…であった.」ということを表すもので, 単純な様相論理における到達可能関係を時間の順序関係 (G: 順方向; H; 逆方向) とみなしたときの必然性の演算子□に対応するものである. 当然, G, H に対して, 可能性の演算子も考えることができるが, これは, F, P と表し, 以下のように定義される.

$Fp \Leftarrow \sim G \sim p.$

$Pp \Leftarrow \sim H \sim p.$

この，F, P は，単純未来，単純過去を表し，「未来のある時点で…である.」,「過去のある時点で…であった.」という意味をもっている．このような時制論理の公理化やモデル化においては，時間というものの構造をどういうふうに捉えるかが問題となってくる．時間というもののもつ性質をどう選ぶかによって公理の選択や到達可能関係の性質の決定がなされるべきである☆.

最も単純な公理化は，G, H のおのおのについては正規様相(K)の体系と見なし，GとHの関係は，次のような公理型を用いるものである．

$PGp \supset p.$

$FHp \supset p.$

この公理型の意味は,「過去のある時点以後，常にpであるならば，(現在は) pである.」,「将来のある時点以前，常にpであるならば，(現在は) pである.」ということである．このような体系を最小時間体系と呼ぶ．これに，推移律を表す公理 ($Gp \supset GGp$) や，直線性を表す公理などを付け加えることにより，特定の構造をもった時間に対応する時制論理が構成できる[13].

次に，時相論理であるが，これは，時制論理が過去や未来のある時点での状態を問題にするのに対し，ある現象の生起や完了を問題にする論理である．たとえば，生起，完了を表す様相演算子を，おのおの I, J で表すとすると，Ip という論理式は，p という状況が始まった時点以後には，常に真となり，Jp という論理式は，p という状況が終了した時点以後には，常に真となる．このような様相論理は，**3.** の A 1の形の公理 ($I(p \supset q) \supset (Ip \supset Iq)$ など.) を満たさないので，非正規な系となる．

McDermott の時間論理[6] は，「ステート」というものを基礎に時間構造のモデルを構成し，その記号表現を陽に論理表現のなかに取り入れたものである．このステートというのは，対象世界のスナップショットに対応しており，ステート全体の集合の上には，時間的な前後関係を表す半順序関係が定義されている．したがって，このモデルによる時間構造は，一直線のみではなく分岐をも許すようなものになっている．

また，対象世界の完全な履歴の一つ一つをクロニクルと呼び，ステートの集合の全順序部分集合に対応している．このクロニクルは全順序集合であるから，一本の線状のものとみなすことができる．このクロニクルの一部を切り取ったもの (ステートの全順序凸部分集合) をインターバルと呼び，始点と終点のステートの対で表す．

このような時間構造の上で，論理系を構成するわけであるが，まず，ファクトとイベントを定義する．ファクトとは時間によって真理値の変化するようなもので，それが真であるようなステートの集合で表す．また，イベントは，そのイベントの表している動作が生起して完了するまでのインターバルの集合で表す．論理式としての表現においては，ステートを表す変数を陽に持ち込み，それを扱う述語をいくつか用意している．たとえば，以下のようなものがある．(述語，引数の書き方は，文献 6) に従って，Lisp の記法を用いる.)

(⇐ s 1 s 2) :

ステート s 1 の後にステート s 2 がくる．

(T s p) :

ファクト p は，ステート s で真である．

(Occ s 1 s 2 e) :

インターバル [s 1, s 2] にイベント e が起こる．

(result s 1 e s 2) :

ステート s 1 に始まるイベント e の結果，ステート s 2 となりうる．

これらを用いて，時間に関わるさまざまな現象を記述，推論するわけである．

以上に述べてきたような体系のほかにも，時間を扱う種々の論理系があり，離散的な時間を想定して next, until などの演算子をもつものや，ダイナミックロジックと組み合わせたり[5]，非単調論理を組み合わせたりしたもの[11]も存在するが，ここでは割愛させていただく．この分野の概観としては文献 1) がよくまとまっている．

このような時間を扱う論理は，時間とともに変化する種々のシステムの挙動を記述するのに向いており，論理回路，プロセス，データベースなどの，種々のシステムの形式的記述や検証などに応用されている．

☆ 本来，この時制論理のように，2組の様相演算子をもつ体系のモデルを考える場合，到達可能関係(R)も2種類用意するのが妥当であるが，時制論理の場合は，この到達可能関係が時間の順序関係に対応するので，GとHに対する到達可能関係は，同じ二項関係の順方向と逆方向と考えることにより，1種類のRで済ませる場合が多い．

6. ダイナミックロジック

ダイナミックロジックは，計算機のプログラムを様相演算子として扱う多様相体系で，プログラムの検証などに有効であるため，さまざまな研究がなされている．ダイナミックロジックにおけるモデルは，**3.** で扱った可能世界的な解釈を想定するとわかりやすい．ダイナミックロジックにおける可能世界は，プログラムが操作の対象としているもの（たとえば変数など）の「状態」であり，様相演算子（プログラム）のおのおのに対応する二項関係（到達可能関係）は，その状態間の遷移関係となる．なお，プログラムとしては，非決定的なものを想定するので，ある状態（可能世界）w と，あるプログラムに対応する二項関係 R について，$w\mathrm{R}w'$ となる w' は，一般に複数でありうる．

ダイナミックロジックとしては，命題論理，解釈されない一階述語論理，解釈された一階述語論理など，種々の体系があるが[8]，ここでは，最も基本的なものである命題論理（PDL：Propositional Dynamic Logic）について，簡単に解説する．

まず，プログラムというものを定義する．PDL においては，プログラムとは，原子プログラムを，プログラム結合子を用いて組み合わせたものである．ここでは，原子プログラムを $a, b, c, \cdots$ で表すものとし，プログラム結合子としては，∪，；，＊ を用意する．

［定義 6.1］（プログラム）

1）原子プログラム $(a, b, c, \cdots)$ は，プログラムである．

2）α, β がプログラムなら，$\alpha \cup \beta$ はプログラムである．

3）α, β がプログラムなら，$\alpha ; \beta$ はプログラムである．

4）α がプログラムなら，$*\alpha$ はプログラムである．

各プログラム結合子の意味は，$\alpha \cup \beta$ が，α が β を非決定的に実行するようなプログラムを表し，$\alpha ; \beta$ が，α を実行した後に β を実行するようなプログラムを表し，$*\alpha$ は，α を 0 回以上任意回非決定的に実行するようなプログラムを表す．

ダイナミックロジックにおける様相演算子は，上の定義によるプログラムに対応して作られる．すなわち，任意のプログラム α に対して，$[\alpha]$ が，一つの様相演算子として定義される．

PDL において，□（必然性）に対応するのは，$[\alpha]$ であるから，$\langle\alpha\rangle$ を，□に対する◇と同様に定義する．すなわち，

$$\langle\alpha\rangle p \Leftarrow \sim[\alpha]\sim p.$$

様相演算子 $[\alpha]$ の直観的な意味は，「（現在の状態において）プログラム α を（非決定的に）実行したとき，その結果の状態において，必ず…である．」というものである．同様に，$\langle\alpha\rangle$ の意味は，「（現在の状態において）プログラム α を（非決定的に）実行したとき，その結果の状態において，…となることがある．」というものである．

この PDL におけるおのおののプログラム α に対応する様相は，通常，K様相となる．このことは，K における公理（型）：

$$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q), \quad \text{(A1)}$$

と同様に，公理（型）：

$$[\alpha](p \supset q) \supset ([\alpha]p \supset [\alpha]q).$$

が成り立つことが，プログラムの性質より容易に期待できるし，また，おのおののプログラムに対応する状態遷移（到達可能関係）においては，反射律，推移律，対称律は期待できないことからも，明らかである．

このような論理系において，次のような命題はプログラム検証の観点から，興味ある内容を含んでいる[8]．

1）$P \supset [\alpha]Q$.

2）$P \supset \langle\alpha\rangle(R \vee \sim R)$，（$R \vee \sim R$ は恒等式）．

3）$P \supset \langle\alpha\rangle Q$.

この 1）が表している内容は，入力条件 P の下にプログラム α を（非決定的に）実行したとき，（停止すれば）常に出力条件 Q を満たす，ということである．これは，α の部分的正当性に相当する．同様に，2）は α の停止性を，また，3）は，α が決定的であるならば，α の正当性（停止性と部分的正当性の両立）に相当する．

このように，ダイナミックロジックは，プログラムによる計算の世界において，様相論理を展開したもので，プログラムやプロセスの形式的記述や検証に有効である．また，最近時相論理との融合なども試みられている[5]．

7. 内包論理

ここでは，様相の概念に関係の深い，内包と外延を陽に扱う内包論理について，文献 10）に基づき，述べる．内包論理は，データベースの方面などで応用されている．また，内包論理を，型付の λ 論理をもとに

して高階論理まで拡張したものは，自然言語のモンタギュ意味論（文法）の基礎となっている．

これまでの通常の論理においては，論理式の意味付け（モデル化）は，論理式中の各名辞にそれが指示するものを対応づけることによりなされるが，これは，ある意味では，おのおのの名辞に対して，その外延のみを考えることになる．しかしながら，このモデル化では不都合な局面がありうる．たとえば，宵の明星と明けの明星は外延的には同じものであるが，内包的には異なる．「私は昨夜宵の明星を見た．」が正しいからといって「私は昨夜明けの明星を見た．」が正しいとは言えない．したがって，内包と外延を陽に扱うために，外延化と内包化の演算子（$^\vee$, $^\wedge$）を導入した論理を考える．以下の例では[10]，大文字で始まる名辞は内包を，小文字で始まる名辞は外延を表すものとする．また便宜上，個体定数や関数を用いる．

たとえば，「良夫は太郎の電話番号を知っている．」ということを，命題中に現れる名辞が表す概念が内包であると考えて，

（1） Know (Yoshio, Telephone (Taro)).

と書くものとする．もし「太郎の電話番号」と「愛子の電話番号」が同じ「〇〇〇-××××」であるとしても，通常（1）から次の命題は帰結されない．

（2） Know (Yoshio, Telephone (Aiko)).

したがって，外延化の演算子を $^\vee$ とすると，

（3） $^\vee$Telephone (Taro) = telephone (taro).
= telephone (aiko).
= $^\vee$Telephone (Aiko).

が成り立つにも関わらず，

（4） $^\vee$Know (Yoshio, Telephone (Taro))
≠ $^\vee$Know (Yoshio, Telephone (Aiko)).

が成り立たないということである．（$^\vee$Know(...) は，Know(...) の外延（真理値）を表す.）すなわち，多くの述語においては，

（5） $^\vee P(A1, A2, \ldots, An)$
$= [^\vee P](^\vee A1, {}^\vee A2, \cdots, {}^\vee An)$.

が成り立つが，Know に関しては，そうではなく，

（6） $^\vee$Know (Yoshio, Telephone (Taro)).
= know (Yoshio, Telephone (Taro)).

が成り立つということである．この Know のような述語を内包的述語と呼ぶ．内包的述語には，他に believe, realize, understand などがある．

内包とその外延との対応関係は，一般には多対多と成り得るが，このうち，前者の「多」（複数の内包に一つの外延が対応する）の例が先の電話番号についてのものである．また，後者の「多」（一つの内包に複数の外延が対応する）は，複数の可能世界を考えた場合に問題になるわけで，様相論理ときわめて関係が深い．

このような論理をモデル化するには，可能世界（指標と呼ぶこともある．）の集合を考え，ある名辞の内包は，その可能世界から，その外延への関数であると捉えることにより可能になる．この考え方をさらに拡張したものが高階内包論理である．

高階内包論理は，基本的な型として，真理値，個体，可能世界，の三つをもち，それらの間の写像を高位の型としてもつような，ω オーダの型付の λ 論理である．ただし，可能世界は，それのみでは型とは見なされず，高位の型を構成するものとしてのみ用いられる．

複数の引数をもつ述語を扱う場合は，一般にカリー化を行うが，カリー化をしないで，扱う体系も構成することは困難ではない．

この高階内包論理は，モンタギュの意味論の構成の基礎となっており，自然言語理解の分野で，応用されている．

詳細は，文献2）を参照されたい．

8. その他の論理系

その他，様相に関係する論理系には，含意の違和の解決を目的として構成された，限定含意や厳密含意の体系[12]，「～してもよい」，「～すべきである」などの様相概念を扱う規範様相の体系，「～を知っている」，「～を信じている」などの様相概念を扱う認識様相の体系[13]などがある．

一方，前提と結論の間の単調性が成り立たない非単調論理のある種のものも，様相演算子を含むという点で，広義の様相論理といえよう[7),9)]．さらには，直観主義の論理や，量子力学におけるような非共立的な命題を扱う量子論理の体系も，様相論理と深い関わりがある[12]．

また，**4.** までに扱ったような標準的な様相体系のさらなる拡張として，記述（「…であるところの…(物)」というような表現）や，集合に関する述語(∈)を導入することができる[3]．特に，この記述という概念は，自然言語における名詞句の扱いに関わりがあり，自然言語処理においても用いられることがある．

9. 結 び

以上，様相論理の一端について概説を試み，種々の体系のいくつかを紹介した．紙面の都合上，割愛した部分もかなりあるが，より詳しくは，参考文献などで補っていただきたい．

なお，ここで，様相論理と，従来の古典論理との計算機構としての比較に，少し触れておく．様相論理といえども，その公理系は，単なる記号操作であるから，従来の述語論理で，模倣することは，多くの場合可能である．より具体的には，たとえば，述語の引数に，可能世界を表す引数を付け加えるなどの手法が考えられる．しかしながら，様相論理の存在意義は，その表現の仕方にあるのであって，同じことを表現するのに，ある場合には，より簡便に表現できる，ということが重要なのである．

様相論理は，現在でも，かなり活発に研究されている分野であり，多くの新しい体系が，次々と提案され，また，さまざまな方面に応用が広がっている．これらについても，紙面ではあまり詳しく紹介する余裕がなかったが，この一文をきっかけに，様相論理に興味をもっていただければ，望外の喜びである．

参 考 文 献

1) Bentham, J.: A Manual of Intensional Logic, Center for the Study of Language and Information, Stanford (1985).
2) Gallin, D.: Intensional and Higher-Order Modal Logic, North-Holland, Amsterdam (1975).
3) Huges, G. E. et al.: An Introduction to Modal Logic, Methuen, London (1968).（三浦聰他訳：様相論理入門，恒星社厚生閣 (1981).
4) 井関清志：記号論理学(命題論理)，槇書店(1968)(第3章).
5) 岩沼宏治他：時空間様相論理 ETSL の完全・無矛盾な公理系，電子通信学会論文誌，Vol. J 69-D, No. 4, pp. 491-501 (1986).
6) McDermott, D.: A Temporal Logic for Reasoning about Process and Plans, Cognitive Sci., 6, pp. 101-155 (1982).
7) McDermott, D. et al.: Nonmonotonic Logic II, J. ACM, Vol. 29, No. 1, pp. 33-57 (1982).
8) 三浦 聰：Modal Logic vs Dynamic Logic, Survey.
9) Moor, R. C.: Semantic Considerations on Nonmonotonic Logic, Artif. Intell., Vol. 25, pp. 75-94 (1985).
10) 長尾 真他：論理と意味，岩波書店 (1983) (岩波講座情報科学，7).
11) 佐伯元司：非単調命題時間論理とその形式的仕様記述への応用，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 6, pp. 547-557 (1987).
12) 杉原丈夫：非古典論理学，槇書店 (1975).
13) 内田種臣：様相の論理，早稲田大学出版部 (1978)
14) Yonezaki, N. et al.: Database System Based on Intensional Logic, Proc. of 8th COLING (1980).
15) 数理科学，No. 275 (May, 1986)，(特集 様相論理).

（昭和 62 年 7 月 16 日受付）