

## 消散性に基づく視覚による相対位置姿勢推定について

○丸山 章<sup>1,2</sup>, 阿部 亨<sup>2</sup>, 藤田 政之<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> (株) 不二越 ロボット開発部 〒930-8511

<sup>2</sup> 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 〒923-1291

<sup>3</sup> 金沢大学工学部 〒920-8667

{maru, beto, fujita}@jaist.ac.jp

環境との相対位置姿勢が変化するカメラからの情報を利用して、環境とカメラとの相対位置姿勢を実時間で再構築する問題を取り扱う。この相対位置姿勢推定問題は非線形ダイナミカルシステムで記述が可能であり、従来は拡張カルマンフィルタを利用し時間更新アルゴリズムによる解が与えられてきた。

本研究では視覚による相対位置姿勢推定問題の解として微分方程式で記述される非線形オブザーバを利用することを提案する。これにより、非線形システム制御理論で近年注目を浴びているシステムの消散性に関する議論を利用することが可能となる。そしてカメラや環境の未知な相対運動や量子化誤差などの外乱入力から推定誤差へのシステムが  $L_2$  ゲインの意味で準最適性を有していることが証明できる。また推定値の真値への収束速度は指数収束することも同時に示すことができた。以上の証明の際に、機械システムの制御での結果であるリー群  $SE(3)$  上のポテンシャル関数を、視覚システムの推定問題へ応用したことが本研究での重要なアイデアの一つである。

最後にシミュレーションにより提案する非線形オブザーバの有用性を確認した。

キーワード：相対位置姿勢推定, 消散性, 非線形オブザーバ,  $L_2$  ゲイン評価基準。

## Visual Pose Estimation based on Dissipative System Theory

○ Akira Maruyama<sup>1,2</sup>, Toru Abe<sup>2</sup> and Masayuki Fujita<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Nachi-Fujikoshi Corp., 930-8511, Japan.

<sup>2</sup> Japan Adv. Institute of Sci. Tech., School of Information Science, 923-1292, Japan.

<sup>3</sup> Kanazawa University, Faculty of Engineering, 920-8667, Japan.

This paper deals with the visual pose estimation problem: Given a sequence of images taken from a camera, reconstruct the relative pose between the camera and the environment. The visual pose estimation can be cast within the framework of nonlinear systems. The existing methods have applied the extended Kalman filtering algorithm to the pose estimation.

We propose a visual pose observer based on the dissipative system theory. The nonlinear observer is described by a vector field on the manifold  $SE(3)$  and has the optimality in the sense of the  $L_2$  gain. Further, we show the exponential convergence of the estimated value. It is important key role that the potential function on  $SE(3)$  which is exploited to the control of the mechanical systems.

Finally the effectiveness of the proposed observer and  $L_2$  gain performance is confirmed by the simulations.

**Keywords:** Visual pose estimation, Dissipativity, Nonlinear observer,  $L_2$  gain criterion.

## 1 はじめに

外界の情報を得る手段として、カメラ情報を利用して環境における幾何を把握する研究が非常に多く研究されている。このことは人間が行動を行うための基本的要求であるとともに、非線形システム理論において新しく活発な研究課題を提供している。とくに計算機の発展に伴い、実時間での視覚情報処理が可能となり、その情報を多くの制御システムへ実時間フィードバックを行うことも可能となってきた [1]。そのため近年では、視覚情報処理アルゴリズムの信頼性や性能を向上させるために、システム制御理論や推定理論を積極的に利用することが提案されている。

本研究では「カメラの画像列が与えられたときにカメラと環境との相対位置姿勢を実時間で再構築する」問題を扱う。この問題は非線形微分方程式を利用して記述されるために、多くの研究が拡張カルマンフィルタを利用してアルゴリズムを構成してきた [2][3][4][5]。これらの結果は時間更新アルゴリズムで与えられるために、実時間処理では非常に有効な手段となることが知られており、シミュレーションや実験を通じて有効性も確認されている。しかし実際値への収束を理論的に保証した研究はない。またカルマンフィルタのもつ最適性も拡張カルマンフィルタでは保証されていない。

そこで本稿では視覚情報を利用した実時間による相対位置姿勢推定問題の収束性とある種の最適性を補償するオブザーバを非線形システム理論における消散性の観点から議論することを提案する。非線形オブザーバの推定値と実際の真値との誤差を微分方程式で記述して、その安定性を議論することで真値への収束性を証明する。その証明の際、機械システムの3次元空間での姿勢制御に利用されるポテンシャル関数を応用して、推定誤差のエネルギーを評価した関数を利用する。なおその上、対象とカメラの相対運動を外乱とみなし、外乱信号からオブザーバの出力への入出力安定性を消散性の観点から議論する。これにより  $L_2$  ゲインの意味で準最適な非線形オブザーバの構成が可能となる。

本稿の意義は、実時間処理できる効率のよい推定アルゴリズムを与えることだけでなく、近年非線形システム理論の分野で注目を浴びている多様体上の機械システムの制御に関する結果 [6][7] を視覚による位置姿勢の推定問題に拡張し適用可能であることを示すことにある。

本稿の構成は次のとおりである。まずはじめに機械制御システムの3次元空間での位置姿勢の記述において、非常に強力なツールとなることが知られている可微分多様体上の幾何モデルを導入する。このモデルは視覚による3次元位置姿勢推定問題にも最近取り入れられてきている [5]。その幾何モ

デルを利用して構成した非線形オブザーバの入出力安定性などを考察してその解が真値へ収束することを証明する。最後にシミュレーション結果とまとめを示す。

## 2 数学的準備

### 2.1 消散システム理論

本稿では非線形システム制御において近年注目を浴びている消散システム理論 [8] に基づいて考察を進める。そこで非線形システムが消散性を有することの定義をここでは示す。

つぎの非線形システム  $\Sigma$  を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), & u &\in \mathcal{R}^m \\ z &= h(x, u), & z &\in \mathcal{R}^p \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $x \in \mathcal{R}^n$  は状態、 $u$  は入力、 $z$  は出力ベクトルである。このシステムに対して、供給率と呼ばれる関数  $s: \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}$  を考える。

**定義 1** システム  $\Sigma$  が供給率  $s$  に関して消散的であるとは、任意の初期状態  $x(t_0)$ 、任意の時刻  $t_1 \geq t_0$ 、任意の入力  $u$  に対して、蓄積関数  $S(x)$  が存在する場合である。ここで  $S(x)$  は  $x$  に関する正定関数で

$$S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), z(t)) dt \quad (2)$$

の消散不等式を満足する。

不等式 (2) の意味することは、時刻  $t_1$  のときの蓄積されたエネルギー  $S(x(t_1))$  は、初期状態のエネルギー  $S(x(t_0))$  と外部から供給されたエネルギー  $\int_{t_0}^{t_1} s(u(t), z(t)) dt$  の和よりも増加しないことをあらわしている。ここで  $S$  が連続かつ微分可能な関数ならば、つぎの補題が成立する。

**補題 1** 任意の状態  $x$  と入力  $u$  において連続かつ微分可能な正定関数  $S(x)$  が

$$\frac{\partial S}{\partial x} f(x, u) \leq s(u, h(x, u)) \quad (3)$$

なる微分消散不等式を満足するならば、システム  $\Sigma$  は  $s$  に関して消散的である。

### 2.2 剛体の運動のモデル

本節では3次元空間でのカメラ(基準)座標系から対象座標系の相対位置姿勢の運動を記述する微分方程式を導出する。3次元上の剛体の運動モデルをリー群  $SE(3)$  上のベクトル場を利用して記述す

る。剛体の運動をリー群  $SE(3)$  上で表現する手法は, underwater vehicle をはじめとした機械システムの位置姿勢制御の研究で近年非常に注目を浴びている [6].

カメラの座標系を見かけ上固定して基準フレーム  $\Sigma_c$  とする. また対象に適切なフレーム  $\Sigma_p$  を配置し, その相対位置姿勢を基準フレームについて表現したものを  $(R, p) \in SE(3) = SO(3) \times \mathcal{R}^3$  とする (以上 Figure 1 参照). ここで  $R \in SO(3)$  は特殊直行列の元として相対姿勢をあらわす回転行列,  $p \in \mathcal{R}^3$  は相対位置をあらわす 3 次元ベクトルとする. この微分運動学モデルは,

$$\dot{R} = R\hat{\omega}_d \quad (4)$$

$$\dot{p} = Rv_d \quad (5)$$

で与えられる. ここで  $(\hat{\omega}_d, v_d) \in se(3) = so(3) \times \mathcal{R}^3$ , は相対位置姿勢速度を, 観測対象に固定されたフレームで記述した量である. また  $so(3)$  は  $3 \times 3$  の歪対称行列の集合である.  $\wedge$  は  $\mathcal{R}^3 \rightarrow so(3)$  への写像で,  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T \in \mathcal{R}^3$  とすると,

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \in so(3)$$

となる.  $\vee$  は  $\wedge$  の逆変換とする.

あとで示すようにカメラからの情報は相対位置姿勢  $(R, p)$  の関数となる. そこで本稿ではそのカメラ情報を基準にして相対位置姿勢の推定値  $(\bar{R}, \bar{p})$  を時間更新過程により計算する方法を示し, その収束性, 最適性を考察する. 値が収束することなどを理論的に考察するためには, その値の大きさを具体的に示さなくてはならない. 相対位置  $p$  に関しては 3 次元ベクトルであるのでユークリッドノルムを利用すればよい. しかし回転  $R$  については簡単ではない. 従来はオイラー角などのパラメータベクトルを用意して計算を行うことが提案されていた. しかしパラメータベクトルを利用して, 式 (4) のような微分方程式を考えると非常に複雑な記述となり, 収束や最適性の解析が困難になる. そこで本研究では  $SO(3)$  上の大きさの概念を新しく定義することを以下では試みる.

まず 3 次元回転行列群  $SO(3)$  上のすべての元  $R$  に関してつぎの 2 つの補題を示しておく. なお証明は文献 [6] を参照のこと.

**補題 2** 要素すべてが時間の関数である行列  $R(t) \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  において任意の時刻に対して  $R \in SO(3)$  とすると,  $\dot{R}R^T \in so(3)$ ,  $R^T\dot{R} \in so(3)$  を満足する.

**補題 3** つぎの関数  $\phi: SO(3) \rightarrow \mathcal{R}_+$  を考える.

$$\phi(R) := \frac{1}{2} \text{tr}(I - R)$$

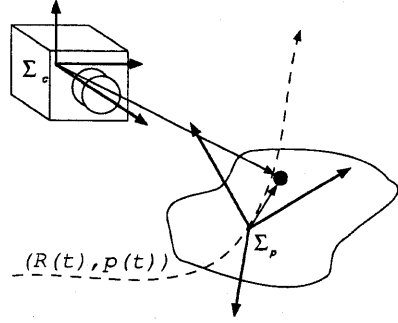


Figure 1: Simulation Results

また任意の  $3 \times 3$  行列  $A$  に対して  $\text{skew}(A) := \frac{1}{2}(A - A^T) \in so(3)$  とする. ここでつぎの性質が成り立つ.

1.  $\phi(R) = \phi(R^T) \geq 0$  であり,  $\phi(R) = 0$  が成り立つ必要十分条件は  $R = I$  である.
2.  $\dot{\phi} = -(\text{skew}(R)^\vee)^T (R^T \dot{R})^\vee$
3. すべての  $0 < \epsilon \leq 1$  に対して,  $\phi(R) \leq 1 - \epsilon$  なる  $SO(3)$  の部分集合の元  $R$  において

$$b_1 \|\text{skew}(R)^\vee\|^2 \geq \phi(R) \geq b_2 \|\text{skew}(R)^\vee\|^2$$

を満足する  $b_1 \geq b_2 > 0$  が存在する.

補題 3 で定義されている関数を利用して, 回転行列  $R$  と推定行列  $\bar{R}$  の誤差  $\psi(R, \bar{R})$  を次のように定義する.

$$\psi(R, \bar{R}) = \phi(R\bar{R}^T) \quad (6)$$

この回転群  $SO(3)$  上の誤差は, 機械システム为非線形制御において利用される回転運動のポテンシャル関数を推定誤差システムへ拡張したものである.

### 3 非線形オブザーバによる相対位置姿勢推定

本節ではまず透視変換に基づいたカメラモデルを示し, それを推定値  $(\bar{R}, \bar{p})$  に関しての一次近似モデルを導出する. つぎに相対位置姿勢の微分運動学モデル (4)(5) とカメラモデルを利用して, 相対位置姿勢を推定する非線形オブザーバを導出する. その導出したオブザーバを利用した誤差システムが消散性を満足することを示すことで,  $L_2$  ゲインの意味での最適性と解の真値への収束を証明する. なお消散性を示す際に重要となる蓄積関数としては前節で示した誤差ポテンシャル関数  $\psi$  を利用する.

### 3.1 カメラモデルの導出

Figure 2 よりカメラからえられる像は剛体の変換と透視変換によりつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} q_i &= g(R, p; s_i) = R s_i + p = [X_i \ Y_i \ Z_i]^T (7) \\ f_i &= \pi(q_i; \Lambda) = \Lambda \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ Z_i & Z_i \end{bmatrix}^T (8) \\ i &= 1 \dots N \end{aligned}$$

ここで  $q_i \in \mathcal{R}^3$ ,  $s_i \in \mathcal{R}^3$  は  $i$  番目の観測点のカメラ座標系および対象座標系における座標,  $\Lambda \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  はカメラの焦点距離, アスペクト比をあらわす対角正定行列,  $f_i \in \mathcal{R}^2$  は  $i$  番目の観測点の画像面上の座標をそれぞれあらわす。本稿では  $f = [f_1^T \dots f_N^T]^T$  を利用して  $(R, p)$  の推定値を与えることが目的である。そこでまずカメラモデル (7)(8) を推定値近傍での一次近似を考える。

$$\begin{aligned} q_i &= (R\bar{R}^T)\bar{R}s_i + (p - \bar{p}) + \bar{p} \\ &= (I + \text{skew}(R_e))\bar{R} + p_e + \bar{p} \\ &= g(\bar{R}, \bar{p}; s_i) - ((\bar{R}s_i)^\wedge) \text{skew}(R_e)^\vee + p_e \end{aligned}$$

またカメラの透視変換 (8) を  $\bar{q}_i := g(\bar{R}, \bar{p}; s_i)$  の回りで一次近似すると,

$$f_i = \bar{f}_i + \Lambda \begin{bmatrix} \frac{X_i}{Z_i} & 0 & -\frac{X_i}{Z_i^2} \\ 0 & \frac{Y_i}{Z_i} & -\frac{Y_i}{Z_i^2} \end{bmatrix} (q_i - \bar{q}_i)$$

ここで  $\bar{f}_i := \pi(\bar{q}_i)$ ,  $\bar{q}_i = [\bar{X}_i \ \bar{Y}_i \ \bar{Z}_i]^T$  とする。以上より,

$$f_i = \bar{f}_i + \Lambda L(\bar{R}, \bar{p}; s_i) \begin{bmatrix} \text{skew}(R_e)^\vee \\ p - \bar{p} \end{bmatrix} (9)$$

となる。

$$L(\bar{R}, \bar{p}; s_i) := \begin{bmatrix} \frac{X_i}{Z_i} & 0 & -\frac{X_i}{Z_i^2} \\ 0 & \frac{Y_i}{Z_i} & -\frac{Y_i}{Z_i^2} \\ -((\bar{R}s_i)^\wedge) & I \end{bmatrix} \times$$

とする。  $\bar{f} := [\bar{f}_1^T \dots \bar{f}_N^T]^T$  とすると

$$f = \bar{f} + \bar{\Lambda} J(\bar{R}, \bar{p}; s) e (10)$$

となる。ここで

$$e := [(\text{skew}(R_e)^\vee)^T \ p_e^T]^T,$$

$$J(\bar{R}, \bar{p}; s) := \begin{bmatrix} L(\bar{R}, \bar{p}; s_1) \\ L(\bar{R}, \bar{p}; s_1) \\ \vdots \\ L(\bar{R}, \bar{p}; s_1) \end{bmatrix} \mathcal{R}^{2N \times 6},$$

$$\bar{\Lambda} := \text{diag}(\Lambda, \dots, \Lambda) \in \mathcal{R}^{2N \times 2N},$$

$$s := [s_1^T \dots s_N^T]^T \in \mathcal{R}^{3N},$$

である。以下ではつぎのような仮定をおく。

仮定 1 行列  $J$  は任意の  $(\bar{R}, \bar{p})$  および  $s_i$  に対して, 列フルランクである。

この仮定は視覚による相対位置推定問題が可解であるために必要な条件である。また行列  $J$  は視覚フィードバック制御の研究では, 画像ヤコビアンと呼ばれる重要な行列であり, 同一直線上にない 4 つ以上の観測点が存在するならば,  $J$  のフルランク性が満たされることが知られている [9]。

この仮定のもとで画像処理の結果えられるデータとして

$$y = J^\dagger \Lambda^{-1} (f - \bar{f}) (11)$$

を採用すると, つぎの観測方程式がえられる。

$$y = e + w (12)$$

ここで  $\dagger$  は疑似逆行列,  $w \in \mathcal{R}^6$  は一次近似や画像の量子化誤差カメラのキャリブレーション誤差などから生じる外乱入力である。

### 3.2 視覚による相対位置姿勢推定問題

相対位置姿勢の微分運動学モデル (4)(5) を状態方程式, カメラモデル (12) を利用して, 視覚による相対位置姿勢推定問題はつぎのように定式化できる。

$L_2$  ゲイン準最適化相対位置姿勢推定問題:  $N$  個の画像点列  $f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  が与えられたとき, その観測入力をもとに  $(R, p) \in SE(3)$  の推定相対位置姿勢  $(\bar{R}, \bar{p}) \in SE(3)$  を以下の  $L_2$  ゲイン評価基準を満足するように設計せよ。

1. 適当な大きさの正の数  $\gamma > 0$  を与える。外生入力  $d = [\omega_d^T \ v_d^T \ w^T]^T$  から被制御量

$$z = e := \begin{bmatrix} e_R \\ e_p \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \text{skew}(R\bar{R}^T)^\vee \\ p - \bar{p} \end{bmatrix}$$

への  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下とする。システムの  $L_2$  ゲインが  $\gamma$  以下であるとは, 任意の入力  $d \in L_2$  と正の数  $\varepsilon$  に対して

$$\frac{1}{2} \|z\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|_2^2 + \varepsilon (13)$$

を満足する場合を意味する [8]。また  $L_2$  はエネルギー有界な信号の集合, そのノルムとして  $\|f(t)\|_2^2 := \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt$  が定義する。

2. 外生入力が存在しない  $d = 0$  の場合, 状態  $e$  を時間  $t \rightarrow \infty$  で 0 にする。

このような評価基準は非線形システムに対する  $H_\infty$  評価基準であり, 非線形システム制御の研究では, 外生入力に対するロバストな制御則を導出する有効な評価基準であることが知られている。本稿ではその基準を視覚による相対位置姿勢の推定問題へ応用可能であるかを検討する。

### 3.3 非線形 $H_\infty$ オブザーバ

本小節では設計仕様 1 を満足する非線形オブザーバを構成する。非線形オブザーバはつぎの  $SE(3)$  上のベクトル場により記述する。

$$\dot{\bar{R}} = -\hat{u}_\theta \bar{R} \quad (14)$$

$$\dot{\bar{p}} = u_p \quad (15)$$

$u = [u_\theta^T \ u_p]^T \in \mathcal{R}^6$  は設計目標 1 を達成するための入力ベクトルである。この  $u$  を  $f$  を利用して適切に決定することで視覚による位置姿勢推定問題を解く。式 (4) と (5) を利用して推定誤差のシステムを導出すると、

$$\dot{R}_e = \frac{d}{dt}(R\bar{R}^T) = \bar{R}\dot{\bar{R}}^T + R\dot{\bar{R}}^T$$

$$= R_e(\bar{R}\dot{\bar{R}}^T + \dot{\bar{R}}\bar{R}^T)$$

$$= R_e(\bar{R}\hat{\omega}_d\bar{R}^T + \hat{u}_\theta)$$

$$\dot{e}_p = \dot{p} - \dot{\bar{p}} = v_d - u_p$$

となる。まとめると

$$\dot{R}_e = R_e(\bar{R}\hat{\omega}_d\bar{R}^T + \hat{u}_\theta) \quad (16)$$

$$\dot{e}_p = v_d - u_p \quad (17)$$

となる。ここで入力として、

$$u = Ky = KJ^T\Lambda^{-1}(f - \bar{f}) \quad (18)$$

を考える。ゲイン  $K$  は正定対称行列とする。式 (16)(17) および (18) からなる系が式 (13) を満足しているか確認するために、まずその系がある供給率に対して消散性を満足していることを証明する。つぎの関数を考える。

$$V(R_e, e_p) = \psi(R, \bar{R}) + \frac{1}{2}e_p^T e_p \quad (19)$$

補題 3 より任意の  $R_e, e_p$  に対して正定行列となることは明らかである。この関数を時間で微分すると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\psi}(R, \bar{R}) + e_p^T \dot{e}_p \\ &= -(\text{skew}(R_e)^\vee)^T (R_e^T \dot{R}_e)^\vee + e_p^T \dot{e}_p \\ &= -e_\theta^T (\bar{R}\hat{\omega}_d + u_\theta) + e_p^T (v_d - u_p) \\ &= -e^T u + e^T \begin{bmatrix} -\bar{R} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_d \\ v_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。この関数を利用して次の補題が導出できる。

補題 4 式 (16)(17) および (18) からなる系を考える。行列  $K$  が

$$-\frac{1}{2\gamma^2}K^2 + K - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right)I > 0 \quad (20)$$

を満足するならば、系 (16)-(18) は供給率  $-\frac{1}{2}(\|e\|^2 - \gamma^2\|d\|^2)$  に対して消散的である。

証明:  $\dot{V}$  に入力 (18) を代入して、カメラモデル (12) を利用すると

$$\dot{V} = -e^T K e + e^T \begin{bmatrix} -\bar{R} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} -\bar{R} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} d \quad (21)$$

この式を平方完成を利用して、次のように変形する。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T K e + e^T \begin{bmatrix} -\bar{R} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} -\bar{R} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} d \\ &+ \frac{1}{2}\|e\|^2 - \frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\|d\|^2 - \frac{1}{2\gamma^2}\|d\|^2 \\ &+ \frac{1}{2\gamma^2}e^T(I + K^2)e - \frac{1}{2\gamma^2}e^T(I + K^2)e \\ &= -e^T(K - \frac{1}{2}I - \frac{1}{2\gamma^2}I - \frac{1}{2\gamma^2}K^2)e \\ &- \frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\|d\|^2 \\ &- \frac{1}{2}\gamma^2\|d - \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} -\bar{R}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} e\|^2 \end{aligned}$$

定理の条件 (20) が成立するならば、

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\|d\|^2 \quad (22)$$

となる。よって系 1 より供給率  $-\frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\|d\|^2$  に関して消散性を満足している。(Q.E.D.)

この補題を利用して提案する推定則 (14)(15) および (18) が設計仕様 1 を満足する条件を導出する。

定理 1 ゲイン  $K$  が条件 (20) を満足するならば、推定則 (14)(15) および (18) は、設計仕様 1 を満足する推定則である。

証明: 条件 (20) が成立するならば、つぎの消散不等式

$$V(T) \leq V(0) - \frac{1}{2} \int_0^T (\|e\|^2 - \gamma^2\|d\|^2) dt \quad (23)$$

が成立することは消散性の定義 1 から導出できる。ここで  $V(T)$  の正定性と  $T \rightarrow \infty$  の極限を考えると

$$\frac{1}{2}\|e\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\gamma^2\|d\|_2^2 + V(0) \quad (24)$$

ここで  $V(0) \leq \epsilon$  ならば、設計仕様 (13) を満足している。(Q.E.D.)

### 3.4 内部安定性解析

前小節では  $L_2$  ゲインを利用した評価関数を準最適にする推定則を導出した。本小節ではその推定則が外生信号が存在しない  $d = 0$  の場合の漸近特性

を考察する。つまり設計仕様 2 を提案する推定則 (14)(15) および (18) が満足しているかを確認する。

式 (21) において  $d = 0$  とすると

$$\dot{V} = -e^T K e \quad (25)$$

となる。  $K$  は正定行列なので

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(K) \|e\|^2 \quad (26)$$

である。ここで  $\lambda_{\min}(\cdot)$  は最小固有値をしめす。よって  $V$  をリアプノフ関数としてみなすと、以下の定理が導出できる。

**定理 2**  $0 < \epsilon \leq 1$  が与えられたとする。推定則は式 (14), (15), (18) で与えられ、そのゲイン  $K$  は正定対角行列とする。外生信号  $d = 0$  とすると、 $\psi(R, \bar{R}) \leq 1 - \epsilon$  の領域において  $t \rightarrow \infty$  において  $e \rightarrow 0$  を満足する。またその収束速度は指数関数的に収束することが保証される。

**証明:**  $\psi(R, \bar{R}) \leq 1 - \epsilon$  を満足する領域では補題 3 より

$$\lambda_{v2} \|e\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{v1} \|e\|^2$$

を満足する正の定数  $\lambda_{v1} > 0$ ,  $\lambda_{v2} > 0$  が存在する。よって

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(K) \|e\|^2}{\lambda_{v1} \|e\|^2} = -\eta \quad (27)$$

となるような正の定数  $\eta$  が存在する。この両辺を 0 から  $t$  まで積分すると

$$\ln \frac{V(t)}{V(0)} = \int_0^t \frac{\dot{V}}{V} dt \leq -\eta t$$

となる。つまり

$$V(t) \leq V(0) e^{-\eta t} \quad (28)$$

である。補題 3 の 3 より

$$\lambda_{v2} \|e(t)\|^2 \leq V(t) \leq V(0) e^{-\eta t} \leq \lambda_{v1} \|e(0)\|^2 e^{-\eta t}$$

であるので、

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{v2}}{\lambda_{v1}}} \|e(0)\| e^{-\frac{\eta}{2} t} \quad (29)$$

となる。

(Q.E.D.)

条件 (20) より、

$$K > \frac{1}{2\gamma^2} K^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) I > 0$$

であるので、定理 1 および 2 からつぎの本稿の主結果がえられる。

**定理 3** もしゲイン条件 (20) が成立するならば、推定則 (14)(15) および (18) は、 $L_2$  ゲイン準最適化相対位置姿勢推定問題の解である。

#### 4 拡大系に対する非線形オブザーバ

前節では消散システム理論を元に  $L_2$  ゲインの意味で準最適化である非線形オブザーバを設計した。しかしながら、外乱入力に対象とカメラの相対運動  $[\omega_d^T \ v_d^T]^T$  と量子化誤差による外乱  $w$  を同等に扱ってきた。本節ではそれぞれの外乱にそれぞれ重み付けを行い、より実際に近くなるように問題設定を拡大する。

重み付けされた外乱はつぎのように与えられるとする。

$$\begin{bmatrix} \omega_d \\ v_d \end{bmatrix} = V^{1/2} n_v \quad (30)$$

$$w = W^{1/2} n_w \quad (31)$$

ここで、 $V, W$  は外乱の重みをあらわす正定行列、 $n := [n_v^T \ n_w^T]^T$  は  $L_2$  ノルムが 1 以下の外生信号である。 $V, W$  はその信号エネルギーの最大値や確率信号ならばその分散などを利用して与えられる。この重み付けされた外乱を利用して、設計指標 1 の評価関数 (13) を

$$\frac{1}{2} \|e\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \|n\|_2^2 + \epsilon \quad (32)$$

に置き換えた推定問題を考える。

この推定問題の解はつぎの定理で与えられる。

**定理 4** 行列  $K$  が

$$-\frac{1}{2\gamma^2} W^{1/2} K^2 W^{1/2} + K - \frac{1}{2} \left(V + \frac{1}{\gamma^2}\right) I > 0 \quad (33)$$

を満足するならば、非線形オブザーバ (14)(15) および (18) は評価関数 (32) とした  $L_2$  ゲイン準最適化相対位置姿勢推定問題の解である。

証明は定理 1 および 2 と同様にできるので省略。

#### 5 シミュレーション

本節では提案するオブザーバと  $L_2$  ゲインによる評価基準の妥当性をシミュレーションにより検証する。カメラは焦点距離などのスケールングファクタが  $\Lambda = 2180I$  である。またカメラは 1/60 秒のサンプリング時間により観測点の重心位置を計算できるものとした。なお観測する対象のは 9 点とし、任意の時刻においてすべての点が観測可能であるとした。

カメラと対象との相対位置姿勢の時間変化は以下のようなものである。

1.  $R_1(t) = I, p_1(t) = [0, 0, 1.25]^T$  (m).
2.  $R_2(t) = \exp(\hat{\omega}_2(t)),$   
 $p_2(t) = [0 \ 0 \ 1.0 + 0.25 \sin(2\pi \frac{t}{5})]^T$  (m),  
 $\omega_2(t) = \frac{\pi}{8} [\sin(\frac{2\pi t}{5}) \ \cos(\frac{2\pi t}{5}) \ \cos(\frac{2\pi t}{5})]^T.$

1. は相対位置姿勢が変化しない場合, 2. は相対位置姿勢が変化する場合のそれぞれについて推定則の特性をみるために選んだ.

最後に推定則の初期状態は  $\bar{R}(0) = I, \bar{p}(0) = [0 \ 0 \ 1.0]^T$  として, ゲインとしては  $K_1 = I, K_2 = 25I, K_3 = 100I$  の4つを利用する. このゲインを利用すると, 設計指標で重みを  $V = I, W = 10^{-3}I$  と選んだときに  $\gamma$  をそれぞれ  $\gamma_1 = 1.005, \gamma_2 = 0.1821, \gamma_3 = 0.2351$  と選ぶことが可能である.

まず相対位置姿勢が変化しない  $(R_1, p_1)$  の結果を Figure 2 に示す. ここではとくに初期推定値と真値が大きく違う  $z$  方向の並進位置の推定値を Figure 2 に示した. また結果を見やすくするために0秒から2秒までを拡大し, 実線で推定値, 破線で実際の値の軌跡を表示した. 十分時間が経過した場合の真値への収束がすべてのゲインで確認できた. しかしそれぞれ収束の速度が異なっている. これは定理2の証明の式(29)から, 収束の速度を示す  $\eta$  がゲイン  $K$  の固有値の大きさに依存していることから生じている.

つぎに Figure 3 から Figure 8 に  $(R_2, p_2)$  のシミュレーション結果を示した. Figure 3 から Figure 5 には推定値 (実線) と真値 (破線) の軌跡を左には相対位置  $p$  に右には相対姿勢  $\omega$  に関するものを図示した. Figure 6 から Figure 8 には推定誤差で左には相対位置  $p$  に右には相対姿勢  $\omega$  に関するものを図示した. 結果は  $L_2$  ゲインの評価関数の  $\gamma$  の値を小さくできる  $K_2$  の場合が振動もない良好な推定値がえられている. ゲインが低い場合は相対運動  $(\omega_d, v_d)$  の影響により, 推定値の誤差が非常に大きい. ゲインが高い場合には量子化誤差などの影響による外乱  $w$  により推定値が振動的になっているのがわかる.

よって本シミュレーション結果は  $L_2$  ゲイン評価基準で推定性能評価を行なう有効性を示している.

## 6 おわりに

本稿では視覚情報を利用した相対位置姿勢の推定問題を取り扱った. 特に可微分多様体  $SE(3)$  上のベクトル場により相対位置姿勢の変化をモデル化することと  $L_2$  ゲインによる性能解析を行なうことで, 従来証明が困難であった非線形オブザーバの収束の証明と推定性能の解析を行なうことができた.

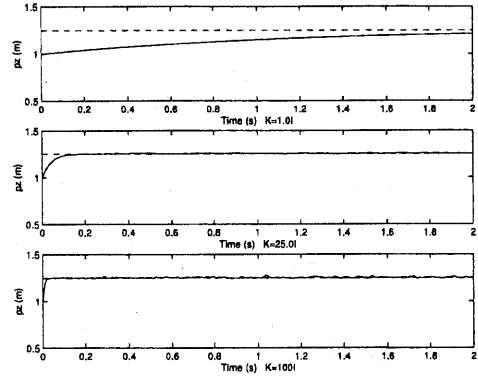
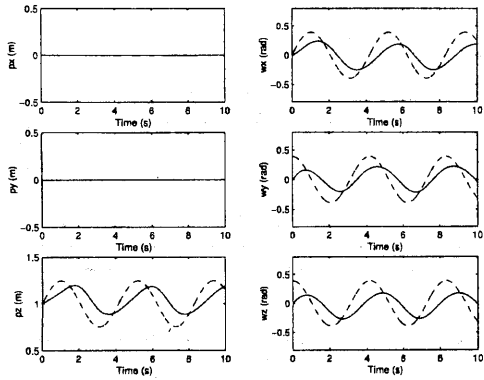


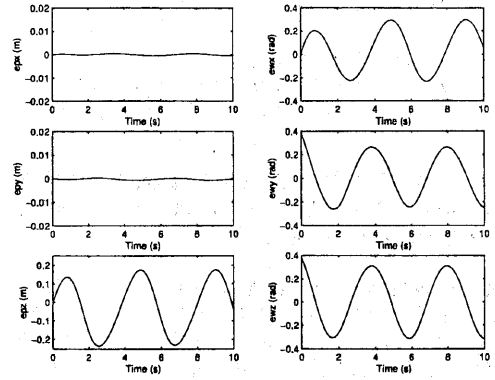
Figure 2: Simulation Results of  $(R_1(t), p_1(t))$  Case  
Upper :  $K_1$ , Middle :  $K_2$ , Lower :  $K_3$

## References

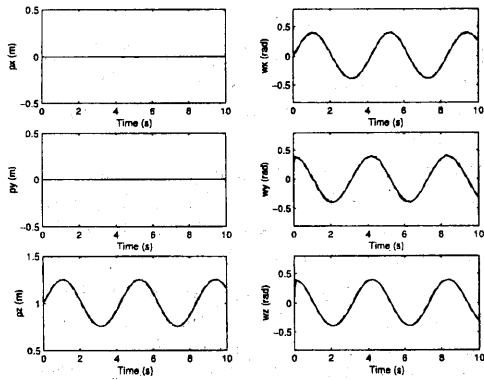
- [1] S. Hutchinson, G. Hager and P. Corke, "A Tutorial on Visual Servo Control," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 5, pp. 651-670, 1996.
- [2] T. Broida and P. Chellappa, "Estimation of Object Motion Parameters from Noisy Images," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Mach. Intel.*, Vol. PAMI-8, No. 1, pp. 90-99, 1986.
- [3] L. Matthies, R. Szeliski and T. Kanade, "Kalman Filter-based Algorithms for Estimating Depth from Image Sequences," *Int. J. of Computer Vision*, Vol. 3, No. 3, pp. 209-236, 1989.
- [4] D. Gennery, "Visual Tracking of Known Three-Dimensional Objects," *Int. J. of Computer Vision*, Vol. 7, No. 3, pp. 243-270, 1992.
- [5] S. Soatto, R. Frezza and P. Perona, "Motion Estimation via Dynamic Vision," *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 393-413, 1996.
- [6] F. Bullo and R. Murray, "Tracking for Fully Actuated Mechanical Systems : A Geometric Framework," 1997, preprint.
- [7] R. Murray, Z. Li and S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1994.
- [8] A. van der Schaft, *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, LNCIS 218, Springer, 1996.
- [9] H. Michel and P. Rives, "Singularities in the determination of the situation of a robot effector from the perspective view of 3 points," Tech. Rep., INRIA, 1993.



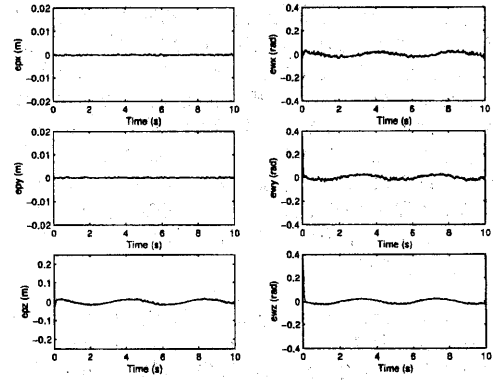
**Figure 3:** Simulation Results of Estimation Trajectories  $(R_2, p_2)$  and  $K_1$  Case



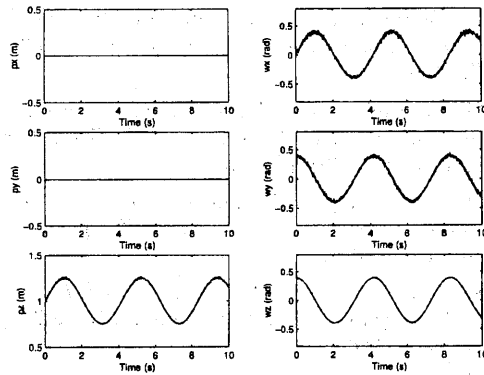
**Figure 6:** Simulation Results of Estimation Errors  $(R_2, p_2)$  and  $K_1$  Case



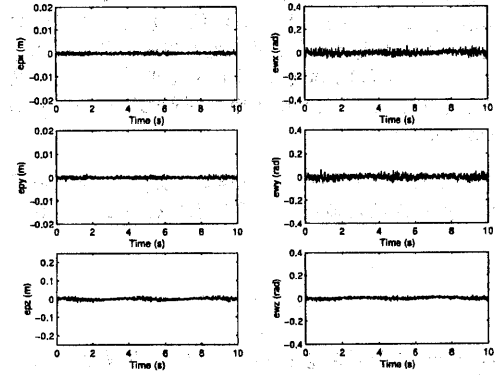
**Figure 4:** Simulation Results of Estimation Trajectories  $(R_2, p_2)$  and  $K_2$  Case



**Figure 7:** Simulation Results of Estimation Errors  $(R_2, p_2)$  and  $K_2$  Case



**Figure 5:** Simulation Results of Estimation Trajectories  $(R_2, p_2)$  and  $K_3$  Case



**Figure 8:** Simulation Results of Estimation Errors  $(R_2, p_2)$  and  $K_3$  Case