

## 3枚の中心射影画像による カメラ内部変数・3次元形状・3次元運動の復元

杉本 典子 徐 剛

立命館大学理工学部情報学科コンピュータビジョン研究室, 草津市

Email: xu@cs.ritsumei.ac.jp

http://www.cv.cs.ritsumei.ac.jp

あらまし 本研究では、中心射影画像を3枚使用し、カメラの内部変数、3次元形状と3次元運動の復元を行う。3枚の画像において8点以上の特徴点の対応が与えられ、それぞれの2枚の画像間でエピポラ方程式 (F 行列) を求める。Kruppa 方程式を線形代数のみを用いて導き、F 行列からカメラの内部行列を求める。F 行列とカメラの内部行列から E 行列を求め、更に並進ベクトル  $t$  と回転行列  $R$  を計算する。最後に特徴点の3次元座標を計算する。

## Recovering Camera Intrinsic Parameters, Structure and Motion from Three Perspective Images

Noriko Sugimoto Gang Xu

Computer Vision Laboratory, Department of Computer Science, Ritsumeikan  
University, Kusatsu-shi, 525-8577, Japan

**Abstract** In this paper, we show a purely algebraic derivation of Kruppa's equations, and propose a new algorithm for camera self-calibration. We further show that once the camera intrinsic parameters are determined, the 3D structure and motions can also be determined. We use 3 perspective images. Implementation details and experimental results are described.

### 1 はじめに

2次元画像からの3次元運動と形状の復元はコンピュータビジョンの重要な課題の1つである。我々は3枚の弱中心射影画像を使用した3次元運動と形状の復元を提案したがその場合はカメラ校正を必要としなかった [1]。本研究では、中心射影画像を3枚使用し、3次元運動と形状の復元を行う。この場合はカメラの内部変数を知る必要がある。3枚の画像には8点以上の特徴点とその対応がとれていればそれぞれのエピポラ方程式を求めることができ、さらに Kruppa 方程式を用いてカメラ校正を行なうことができる。従来 Kruppa 方程式は絶対円錐曲線などの射影幾何学の概念を用いる必要があり、難解であった [2] [3] [4] [5]。本研究では、線形代数のみを利用して Kruppa 方

程式を導出し、それによるカメラ校正の新しいアルゴリズムを示す。また、カメラの内部変数が分かっていた場合の3次元運動と形状を復元する手法の詳細を述べる。

### 2 アルゴリズムの流れ

アルゴリズムの流れを図2に示す。まず、3枚の中心射影画像間で対応のとれた特徴点を入力とする。カメラの内部変数と外部変数の双方を含んだ F 行列 (fundamental matrix) を求める。F 行列からはエピポラを求めることができる。F 行列とエピポラを利用した Kruppa 方程式を線形代数のみを用いて導出し、カメラ内部行列を求める。カメラ内部行列から外部変数のみを含む E 行

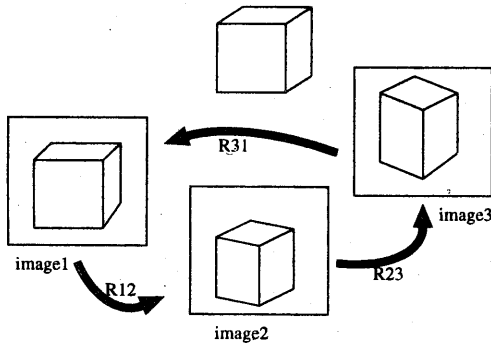


図 1: ある物体を写した三枚の画像の関係

列 (essential matrix) を求め、E 行列から回転行列  $\mathbf{R}$  と並進ベクトル  $\mathbf{t}$  を求める。最後に特徴点の 3 次元座標を求める。

### 3 カメラ内部行列と中心射影におけるエピポーラ幾何

我々が普段見る画像はデジタル画像である。デジタル画像の座標系は、ほとんどの場合座標原点は左上にあり右方向が水平軸、下方向が縦軸である。デジタル画像座標系は実画像を記述するには便利であるが、射影関係を記述するには正規化画像座標系が便利である。正規化画像は焦点から単位長のところにある画像であり、座標原点はレンズ中心から画像平面まで垂線を引いた交点 (principal point) である。

デジタル画像座標と正規化画像座標との変換は

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \quad (1)$$

によって決まる。 $\tilde{\mathbf{m}} = [u, v, 1]^T$ 、 $\tilde{\mathbf{x}} = [x, y, 1]^T$  はそれぞれデジタル画像座標  $(u, v)$  と正規化画像座標  $(x, y)$  の拡張ベクトルである。行列  $\mathbf{A}$  はカメラ内部行列と呼ばれ次のように与えられる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_u & b & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

行列  $\mathbf{A}$  はカメラの内部変数のみによって構成され、 $\alpha_u$ 、 $\alpha_v$ 、 $b$ 、 $u_0$ 、 $v_0$  という 5 つのパラメータ

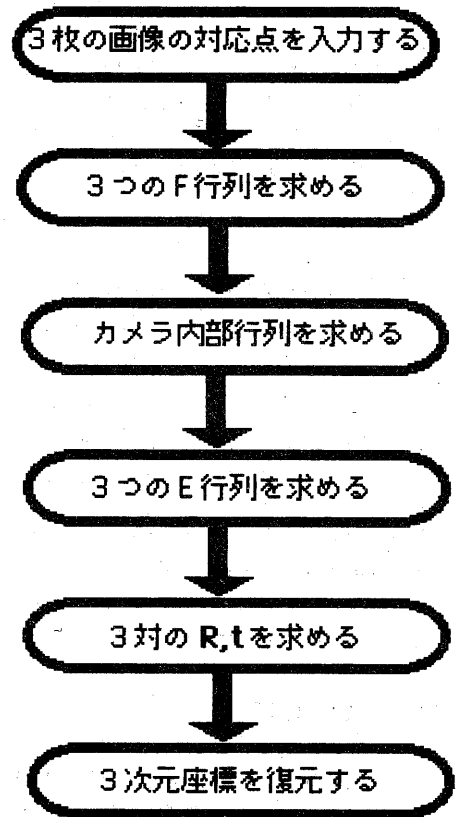


図 2: アルゴリズムの流れ

はカメラ固有のものである。カメラの内部変数がわかれば、どのカメラを用いても、デジタル画像座標から正規化画像座標に変換できるので、それぞれのカメラの特性を考慮せず、正規化カメラを用いてビジョン問題を考えることができる。

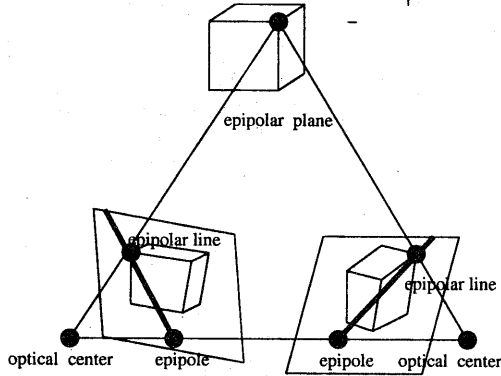


図 3: エピポーラ幾何学

2枚の画像の対応点のデジタル座標 ( $\mathbf{m}$  と  $\mathbf{m}'$ ) が与えられたときエピポーラ方程式は

$$\tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}' = 0 \quad (3)$$

となる。2枚の画像の対応点の正規化座標 ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$ ) が与えられるとエピポーラ方程式は

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (4)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad (5)$$

となり、両カメラ間の並進ベクトル  $\mathbf{t}$  と回転行列  $\mathbf{R}$  によって表現される。式(1)を(3)に代入すれば

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^T \mathbf{F} \mathbf{A}' = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad (6)$$

が得られる。よって

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-T} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{A}'^{-1} \quad (7)$$

が成り立つ。F 行列は 8 点以上の対応点を与えられればデジタル座標から求めることができる。F 行列を求める線形の方法については [6]、非線形の方法については [7] を参照されたい。本研究で

は、線形の方法を採用した。詳細は付録を参照されたい。

画像 1 におけるエピポール  $\mathbf{e}$  は式

$$\mathbf{F}^T \mathbf{e} = 0 \quad (8)$$

から求めることができる。

## 4 Kruppa 方程式の代数的導出

式(7)の F 行列から  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{t}$  を消去し、カメラ内部行列  $\mathbf{A}$  のみに関する Kruppa 方程式を導出することができる [4] [5]。式(7)と式(8)より

$$\mathbf{A}'^{-T} \mathbf{R}^T [\mathbf{t}]_{\times}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e} = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。よって次式が得られる。

$$\mathbf{t} = s'' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e} \quad (10)$$

ここで、 $s''$  はスカラーである。式(10)は並進ベクトル  $\mathbf{t}$  が  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}$  と同じ方向であることを意味する。式(10)を式(7)に代入すると式

$$\mathbf{F} \mathbf{A}' = s'' \mathbf{A}^{-T} [\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}]_{\times} \mathbf{R} \quad (11)$$

が得られる。

一般的に正則行列  $\mathbf{M}$  と任意の 3 次元ベクトル  $\mathbf{v}$  について次式が成り立つ。

$$[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{v}]_{\times} = \det(\mathbf{M}) \mathbf{M}^{-T} [\mathbf{v}]_{\times} \mathbf{M}^{-1} \quad (12)$$

よって式

$$[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}]_{\times} = \frac{1}{\alpha_u \alpha_v} \mathbf{A}^T [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{A} \quad (13)$$

が成り立つ。式(13)を式(11)に代入すると

$$\mathbf{F} \mathbf{A}' = s' [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{A} \mathbf{R} \quad (14)$$

が得られる。ここで  $s'$  はスカラーである。

式(14)における未知の回転行列  $\mathbf{R}$  を消すと

$$\mathbf{F} \mathbf{C}' \mathbf{F}^T = s [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{C} [\mathbf{e}]_{\times}^T \quad (15)$$

となる。ただし、 $s = s'^2$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{C}' = \mathbf{A}' \mathbf{A}'^T$ 。式(15)の左と右の行列の  $i$  行  $j$  列の要素をそれぞれ  $K'_{ij}$ ,  $K_{ij}$  とすると、

$$K'_{ij} = s K_{ij}, (i, j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

が得られる。 $\mathbf{FC}'\mathbf{F}^T$ も $[\mathbf{e}]_x \times \mathbf{C}[\mathbf{e}]_x^T$ も対称行列で、しかも以下の拘束

$$\mathbf{FC}'\mathbf{F}^T\mathbf{e} = s[\mathbf{e}]_x \times \mathbf{C}[\mathbf{e}]_x^T\mathbf{e} = 0 \quad (17)$$

があるので、 $K'_{ij} = sK_{ij}$ の中は独立した式は3つしかない。 $s$ を消去すると、 $\mathbf{C}$ に関する拘束は2つしかない。よって内部変数の2つのみが未知の場合は2枚の画像から解くことができるが、3つ以上の内部変数が存在する場合には、2枚の画像のみでは解くことができない。5つの内部変数がともに未知の場合、同じカメラで撮った3枚の画像が必要である。

## 5 カメラ内部行列を求めるアルゴリズム

式(16)において、3つしか独立した式がないが、どの3つを選ばよいかという問題がある。 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T$  ( $\|\mathbf{e}\| = 1$ )とおくと式(17)から

$$\begin{aligned} K_{i1}e_1 + K_{i2}e_2 + K_{i3}e_3 = \\ s(K'_{i1}e_1 + K'_{i2}e_2 + K'_{i3}e_3) \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる。 $K_{11} - sK'_{11} = 0$ と $K_{12} - sK'_{12} = 0$ を選ぶと、式(18)より自動的に $e_3(K_{13} - sK'_{13}) = 0$ から得られる。もし、 $e_3 \gg 0$ ならば $K_{13} - sK'_{13}$ は0に近い値にならなければならない。しかし $e_3$ が0に近い場合は $K_{13} - sK'_{13}$ は0から離れる可能性がある。よって $e_1, e_2, e_3$ の中の小さい方と掛け算する $K_{ij}$ と $K'_{ij}$ を選ぶ方が精度が良い。表1は選び方をまとめたものである。

3枚の画像からはF行列を3つ求められる。 $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ は対称行列なので6つの変数しかない。 $\mathbf{C} = [C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}]^T$  ( $C_{ij}$ は行列 $\mathbf{C}$ の*i*行*j*列の要素)とすると $K'_{ij}$ と $K_{ij}$ を $g^T\mathbf{c}$ と $h^T\mathbf{c}$ の形で表せる。式(16)から以下のエネルギー関数を定義する。

$$E = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{c}^T (\mathbf{g}_{lk} - s_k \mathbf{h}_{lk}) (\mathbf{g}_{lk} - s_k \mathbf{h}_{lk})^T \mathbf{c} \quad (19)$$

ここで、 $l$ は選ばれた3つの $K_{ij}$ につけた順序、 $k$ は3つのF行列の順序を示す。

表1: 3つ独立した式の選び方

|                   |  |
|-------------------|--|
| $e_1 < e_2 < e_3$ | $K'_{11} - sK_{11} = 0$<br>$K'_{12} - sK_{12} = 0$ |
| $e_2 < e_1 < e_3$ | $K'_{22} - sK_{22} = 0$                            |
| $e_1 < e_3 < e_2$ | $K'_{11} - sK_{11} = 0$<br>$K'_{13} - sK_{13} = 0$ |
| $e_3 < e_1 < e_2$ | $K'_{33} - sK_{33} = 0$                            |
| $e_2 < e_3 < e_1$ | $K'_{22} - sK_{22} = 0$<br>$K'_{23} - sK_{23} = 0$ |
| $e_3 < e_2 < e_1$ | $K'_{33} - sK_{33} = 0$                            |

$E$ を $s_k$ について微分して0となる式から $s_k$ が求まる。

$$s_k = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{M}_k \mathbf{c}}{2\mathbf{c}^T \mathbf{N}_k \mathbf{c}} \quad (20)$$

ただし、 $\mathbf{M}_k = \sum_{l=1}^3 (\mathbf{g}_{lk} \mathbf{h}_{lk}^T + \mathbf{h}_{lk} \mathbf{g}_{lk}^T)$ と $\mathbf{N}_k = \sum_{l=1}^3 \mathbf{h}_{lk} \mathbf{h}_{lk}^T$ 。

式(19)へ $s_k$ を戻すと、以下の式を得る。

$$E = \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{c}^T \mathbf{L}_k \mathbf{c} - \frac{(\mathbf{c}^T \mathbf{M}_k \mathbf{c})^2}{4\mathbf{c}^T \mathbf{N}_k \mathbf{c}} \right) \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{L}_k = \sum_{l=1}^3 \mathbf{g}_{lk} \mathbf{g}_{lk}^T$ 。この式を解くために、最急降下法を利用する。初期値として $\mathbf{c}_0$ を定め、以下の式で更新していく。

$$\mathbf{c}_{t+1} = \mathbf{c}_t - \lambda \sum_{k=1}^3 \left( 2\mathbf{L}_k - \gamma_t \mathbf{M}_k + \frac{\gamma_t^2}{2} \mathbf{N}_k \right) \mathbf{c}_t \quad (22)$$

ここで $\gamma_t = \frac{\mathbf{c}_t^T \mathbf{M}_k \mathbf{c}_t}{\mathbf{c}_t^T \mathbf{N}_k \mathbf{c}_t}$ 、 $t = 1, 2, \dots$ 。A =

$$\begin{bmatrix} f & 0 & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{として、} f \text{を解いたものを初期値} \mathbf{c}_0$$

とした。 $u_0, v_0$ は画像の中心、つまり画像の縦と横のサイズの半分である。

## 6 運動と形状の復元

A行列がわかれば、式(6)からE行列を求めることができる。E行列とtの間には

$$\mathbf{E}^T \mathbf{t} = 0 \quad (23)$$

が成り立つ。 $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ の最小固有値に対応する固有ベクトルとして $\mathbf{t}$ の方向をさす単位ベクトル $\bar{\mathbf{t}}$ を求めることができる。 $\bar{\mathbf{t}}$ にスケールをあわせた $\mathbf{E}$ を $\bar{\mathbf{E}}$ とすると $\bar{\mathbf{E}} = [\bar{\mathbf{t}}]_x \mathbf{R}$ より $\mathbf{R}$ を求めることができる。式(23)より次式が得られる。

$$\mathbf{R}\bar{\mathbf{E}}^T = [\bar{\mathbf{t}}]_x \quad (24)$$

式(24)を以下のように置き換える。

$$\mathbf{R}[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3] \quad (25)$$

$\sum_{i=1}^3 \mathbf{q}_i \mathbf{e}_i^T$ を次のように特異値分解すると

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{q}_i \mathbf{e}_i^T = \mathbf{V}\Sigma\mathbf{U}^T \quad (26)$$

ただし、 $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_3]$ 、 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_3]$ 、 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。 $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\text{diag}(1, 1, \det(\mathbf{V}\mathbf{U}^T))\mathbf{U}^T \quad (27)$$

で決まる [8]。

また、3つのカメラ間の並進ベクトルを $\mathbf{t}_{12}$ 、 $\mathbf{t}_{23}$ 、 $\mathbf{t}_{31}$ とするとそれらの長さ $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ は以下の式を解くことで求める。

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{R}_{12}\mathbf{X}_2 + p_1\bar{\mathbf{t}}_{12} \quad (28)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{R}_{23}\mathbf{X}_3 + p_2\bar{\mathbf{t}}_{23} \quad (29)$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{R}_{31}\mathbf{X}_1 + p_3\bar{\mathbf{t}}_{31} \quad (30)$$

ここで、 $\mathbf{X}_1$ 、 $\mathbf{X}_2$ 、 $\mathbf{X}_3$ は対応点の3つのカメラ座標における3次元座標である。式(28)(29)(30)より

$$[\bar{\mathbf{t}}_{12} \ \mathbf{R}_{12}\bar{\mathbf{t}}_{23} \ \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}\bar{\mathbf{t}}_{31}] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (31)$$

が得られる。式(31)から $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ を $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ の下で求めることができる。すなわち、3つの並進ベクトルは相対的な長さを求めることができる。よって移動ベクトル $\mathbf{t}$ は

$$\mathbf{t}_{12} = p_1\bar{\mathbf{t}}_{12} \quad (32)$$

$$\mathbf{t}_{23} = p_2\bar{\mathbf{t}}_{23} \quad (33)$$

$$\mathbf{t}_{31} = p_3\bar{\mathbf{t}}_{31} \quad (34)$$

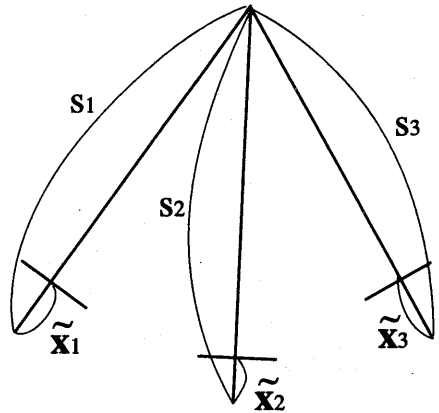


図4:  $\bar{\mathbf{x}}$ とスケールの概念図

から得られる。並進ベクトルの絶対的なスケールは求められないことに注意されたい。

運動が復元されれば、形状も復元される。図4は $\bar{\mathbf{x}}$ とスケールの概念図である。 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 、 $\bar{\mathbf{x}}_3$ は3枚の画像におけるそれぞれの対応点の正規化画像座標の拡張ベクトルである。 $s_1$ 、 $s_2$ 、 $s_3$ はそれぞれベクトル $\bar{\mathbf{x}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 、 $\bar{\mathbf{x}}_3$ の長さである。1枚目の画像を基準として点の3次元座標を $\mathbf{X}$ とすると次のエネルギー関数を立てることができる。

$$E = \|\mathbf{X} - s_1\bar{\mathbf{x}}_1\|^2 + \|\mathbf{X} - s_2\mathbf{R}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{t}_{12}\|^2 + \|\mathbf{X} - s_3\mathbf{R}_{31}^T\bar{\mathbf{x}}_3 - \mathbf{R}_{31}^T\mathbf{t}_{31}\|^2 \quad (35)$$

が成り立つ。式(35)から $E$ をそれぞれ $s_1$ 、 $s_2$ 、 $s_3$ について微分したものを0とすると $s_1, s_2, s_3$ は次のようになる。

$$s_1 = \frac{\bar{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{X}}{\bar{\mathbf{x}}_1^T \bar{\mathbf{x}}_1} \quad (36)$$

$$s_2 = \frac{\bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{R}_{12}^T (\mathbf{X} - \mathbf{t}_{12})}{\bar{\mathbf{x}}_2^T \bar{\mathbf{x}}_2} \quad (37)$$

$$s_3 = \frac{\bar{\mathbf{x}}_3^T \mathbf{R}_{13}^T (\mathbf{X} - \mathbf{t}_{13})}{\bar{\mathbf{x}}_3^T \bar{\mathbf{x}}_3} \quad (38)$$

式(36)(37)(38)を式(35)に代入して次式が得られる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{b} \quad (39)$$

$$\text{ただし、} \mathbf{B} = 3\mathbf{I} - \frac{\bar{\mathbf{x}}_1^T \bar{\mathbf{x}}_1}{\bar{\mathbf{x}}_1^T \bar{\mathbf{x}}_1} - \frac{\mathbf{R}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{R}_{12}^T}{\bar{\mathbf{x}}_2^T \bar{\mathbf{x}}_2} - \frac{\mathbf{R}_{13}\bar{\mathbf{x}}_3\bar{\mathbf{x}}_3^T \mathbf{R}_{13}^T}{\bar{\mathbf{x}}_3^T \bar{\mathbf{x}}_3}$$

$$\mathbf{b} = -\frac{\mathbf{R}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2\tilde{\mathbf{x}}_2^T\mathbf{R}_{12}^T\mathbf{t}_{12}}{\tilde{\mathbf{x}}_2^T\tilde{\mathbf{x}}_2} + \mathbf{t}_{12}$$

$$-\frac{\mathbf{R}_{13}\tilde{\mathbf{x}}_3\tilde{\mathbf{x}}_3^T\mathbf{R}_{13}^T\mathbf{t}_{13}}{\tilde{\mathbf{x}}_3^T\tilde{\mathbf{x}}_3} + \mathbf{t}_{13}$$

式(39)より

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (40)$$

として、各点の3次元座標が計算される。

## 7 実験結果

実験はデジタルカメラ EPSON-CP-500 を使用し画像を取り込んだ。図5、6、7と図9、10、11の2つの組の画像を入力データとした。それぞれの画像から対応する特徴点を20点づつ手動でとり、これを入力とした。本論文のアルゴリズムを使い、3次元座標を計算した。その結果をもとに三角パッチを貼りテクスチャマッピングを施し、VRMLにて表示した(図8と図12)。長方形の建物が台形に見えるなどのゆがみが見られるが、全体をみると正しい3次元形状に近い形が得られていることがわかる。

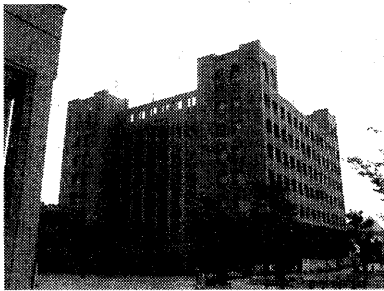


図 5: building image 1



図 6: building image 2

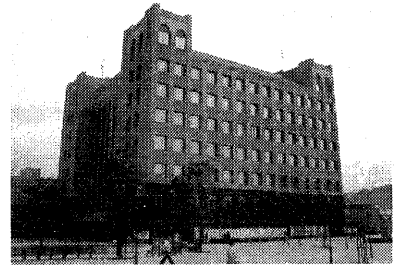


図 7: building image 3

## 8 むすび

本論文のソフトウェアは財団法人ソフトウェア工学研究財団の援助を受け、ホームページ上で公開予定である。また、この実験結果も同様にVRMLで公開する。  
(<http://www.cv.cs.ritsumei.ac.jp/noriko/>)



図 8: recovered building shown by VRML

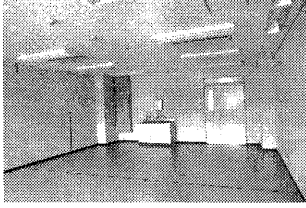


図 9: room image 1

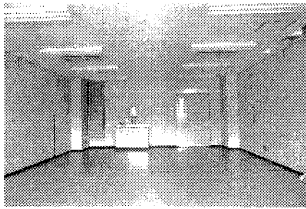


図 10: room image 2

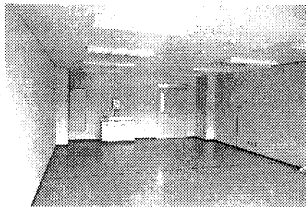


図 11: room image 3

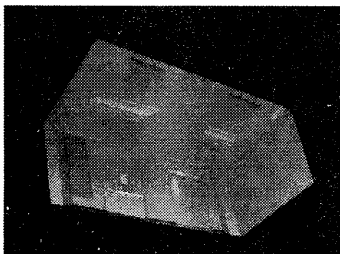


図 12: recovered room shown by VRML

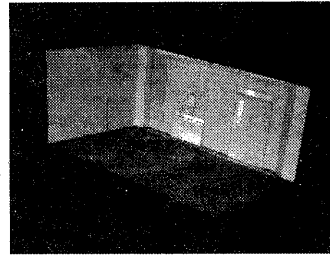


図 13: recovered room shown by VRML

## 参考文献

- [1] 杉本典子, 徐 剛, “弱中心射影画像からオイラー角を利用したモーション復元の線形アルゴリズム”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J81-D-II, No.4-pp.681-688, 1998
- [2] 徐剛, 辻三郎, 「3次元ビジョン」(教科書, 共立出版, 1998年4月20日初版), ISBN:4-320-08522-1
- [3] 徐剛, 「第6章 コンピュータビジョンにおけるエピポラ幾何」, 「コンピュータビジョン: 技術評論と将来展望」(松山, 久野, 井宮編集), 新技術コミュニケーションズ出版, pp.80-96, 1998
- [4] S.J.Maybank and O.D.Faugeras. A theory of self-calibration of a moving camera. *Int'l J. Comput. Vision*, 8(2):123-152, August 1992.
- [5] Q.T.Luong and O.Faugers. Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices. *Int'l J. Comput. Vision*, 22(3):261-289, 1997.
- [6] R.Hartley. In defense of the eight-point algorithm. *IEEE Trans. PAMI*, 19(6):580-593, 1997.
- [7] G.Xu and Z.Zhang. Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A *Unified Approach*. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[8] Kanatani, Geometric computation for Machine Vision, Oxford Universit Press, 1993

## A 中心射影における点対応によるエピポーラ方程式の線形推定

点対応が与えられたときの中心射影のエピポーラ方程式の線形推定方法について述べる。

画像1における点  $\mathbf{m}_i = [u_i, v_i]^T$  と画像2における対応点  $\mathbf{m}'_i = [u'_i, v'_i]^T$  はエピポーラ方程式  $\tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}' = 0$  を満たす。F 行列の要素をベクトルに並べ、上記の式を次式

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{f} = 0 \quad (41)$$

に変形できる。ここで、

$$\mathbf{u}_i = [u_i u'_i, u_i v'_i, u_i, v_i u'_i, v_i v'_i, v_i, u'_i, v'_i, 1]^T \quad (42)$$

$$\mathbf{f} = [f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33}]^T \quad (43)$$

$f_{ij}$  は F 行列の i 行 j 列の要素である。n 点の対応が与えられたとき、式 (41) を積み重ねて、次式

$$\mathbf{U} \mathbf{f} = 0 \quad (44)$$

を解けばよい。ここで

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \quad (45)$$

$\mathbf{U}^T \mathbf{U}$  の最小固有値に対応する固有ベクトルとして  $\mathbf{f}$  を求めることができる。しかし、この方法で求められた  $\mathbf{F}$  はランクが 2 であることを保証されない。そのため  $\mathbf{F}$  に最も近いランク 2 の行列を次のように求める。 $\mathbf{F}$  を特異値分解すると

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \quad (46)$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ 、 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ 、 $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。そこで  $\sigma_3$  を 0 にした行列  $\mathbf{\Sigma}$  を  $\mathbf{\Sigma}'$  とし新しい  $\mathbf{F}$  行列が次式で得られる。

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}' \mathbf{U}^T \quad (47)$$

行列  $\tilde{\mathbf{F}}$  は  $\mathbf{F}$  に最も近いランク 2 の行列である

式 (45) の  $\mathbf{U}$  のままでは数値計算誤差が大きくなるので、画像の正規化を先に行う [6]。物体の中心を  $(u_0, v_0)$  とすると次式で計算できる。

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (48)$$

さらに、 $u$  と  $v$  の分散を次式で計算する。

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_i - u_0)^2} \quad (49)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_i - v_0)^2} \quad (50)$$

正規化したあとの座標を  $\tilde{\mathbf{m}}$  とすると、 $\tilde{\mathbf{m}}$  は次式で計算される。

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{m}} \quad (51)$$

ここで、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_u} & 0 & -\frac{u_0}{\sigma_u} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_v} & -\frac{v_0}{\sigma_v} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

1 枚目と 2 枚目の画像の正規化変換行列をそれぞれ  $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{H}'$  とし、式 (51) を式 (3) に代入すると、

$$\tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{F} \mathbf{H}'^{-1} \tilde{\mathbf{m}}' = 0 \quad (53)$$

が得られる。

$$\mathbf{F}' = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{F} \mathbf{H}'^{-1} \quad (54)$$

とすると、正規化された画像座標から式 (41) より  $\mathbf{F}'$  を求めることができる。 $\mathbf{F}'$  を先に求めて、 $\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}' \mathbf{H}'$  で本来の  $\mathbf{F}$  行列を求めると、数値計算の誤差が小さい。