

未校正カメラ画像による3次元位置推定の高精度化

木下 敬介 マーティン・トンコ

ATR 人間情報通信研究所

{kino, mtonko}@hip.atr.co.jp

<http://www.hip.atr.co.jp/~kino, ~mtonko>

あらすじ:

本研究は、対象の3次元位置情報と、その精度（共分散行列）が既知の場合に、その対象を撮影した画像を新たに一枚を付加することで、どのくらい、その3次元情報の精度を向上させることができるのかを定量的に導出するものである。従来から、3次元情報を推定する方法はいくつか提案されているが、本研究では、特に、撮影したカメラの位置・姿勢の推定精度や、3次元情報の間に相関が存在する場合を考慮して解析している。本手法を繰返し適用することで、逐次的に3次元情報の精度を高めていくことが可能になり、移動カメラによる3次元情報獲得などに利用できる。

Improving the Accuracy of 3D Information from Uncalibrated Image

Keisuke Kinoshita Martin Tonko

ATR Human Information Processing Research Labs.

Abstract:

This work analyzes how much an uncalibrated image can contribute to the improvement of the accuracy of 3D information. For example, when we might roughly know the 3D shape of an object, but want to improve the accuracy with an image taken from a camera whose pose or internal parameters are not exactly known. Many approaches that estimate 3D information from images have been proposed. But here in this paper, the accuracy of the estimated camera parameters as well as the correlation among the 3D information are well considered. It is clear that this method can be used for various applications, i.e., robot navigation and object recognition.

1 はじめに

画像情報から、3次元情報を復元する方法は、古い歴史もあり、多種多様なものが提案されてきた。その中で、特に、理論的に整備され、継続して研究されてきているのは、3次元空間と、画像との幾何学的な投影関係を利用した方法である。2枚の画像から3次元情報を復元するものは、ステレオと呼ばれ、3次元情報復元の基本である。最近では、校正されていないカメラで撮影した画像（未校正画像）を使った、3次元情報復元方法も注目されている。

しかし、多くは正確な3次元情報を得ることに注力しており、その精度を定量的に評価するものは多くはない。精度を評価することの重要性を示したものとして、Kanatani[1]が挙げられる。また、基礎行列や、射影復元における精度評価[2][3]も盛んになりつつある。また、ロボティクスへの応用としては、ロボットに搭載したステレオカメラによる3次元情報の復元精度を評価したもの[4]や、3次元復元精度の自己評価基準に幾何学的AICを用いた[5]が挙げられる。

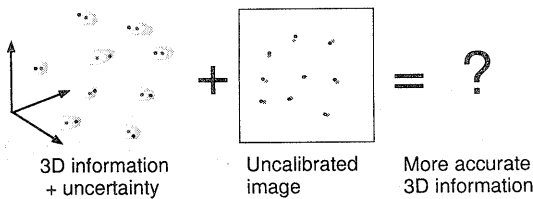


図1. 3次元位置情報とその精度（共分散行列）が既知であるとする。一枚の未校正画像という新たな情報を付け加えることにより、その精度をどのくらい向上させることができるのかを解析する。

本研究は、次のような問題を解決しようとしている。「3次元情報が、荒く分かっていると。その対象を撮影した画像が新たに一枚与えられた場合、どのくらい、その3次元情報の精度を向上させることができるのかを定量的に導出する(図1).」

たとえば、カメラを搭載したロボットで、対象物体の3次元形状を復元する場合を考える。なんらかの方法により、対象物体の3次元情報とその精度（共分散行列）を推定したとする。そこに、どこから、ど

のように撮影したのかわからない（あるいは、おおよそにしかわからない）新規の画像が与えられた場合、この対象物体の3次元情報の精度を更新したい。もちろん、精度が向上することが期待できる。この操作を繰り返すことで、逐次、精度を向上していくようなシステムに応用が可能である。

複数の画像から、3次元情報を推定するシステムを考えた場合、二つの方法が思い付く。それは、バッチ法と逐次法である[1]。バッチ法は、現時点までに収集した画像情報を一括して処理し、解を求めるものである[6][7][8][9]。解法は比較的簡単であるが、データ量が多くなるので、数値計算的に不安定になったり、時間がかかったりする。それに対して、逐次法は、中間的な変数を考え、画像を撮影する度に、その変数を更新していく方法である。一度に、画像一枚分のデータを処理するだけで良いので計算量は少なく、リアルタイム処理に向いている。その実装として、カルマンフィルタ(Kalman Filter, Extended Kalman filter, Iterated Extended Kalman filter)を使った研究が多い。基本的に、非線形なシステムを記述し、解かなくてはならないので、逐次法だと、最適な推定を維持していくのが容易ではない。たとえば、単純に、システムを線形近似して解くEKFでは、推定誤差が蓄積し、偏差が生じる。そのため、IEKFなどを用いる必要が出てくる。[9]は、3次元情報をIEKFを用いて推定している。また、[10]では、IEKFを用いて基礎行列を推定し、カメラ校正問題を解決している。また、逐次法と比較して、バッチ法の方が良い結果がでると結論づけている。しかし、本研究では、ロボット等に搭載したカメラを想定しているので、逐次的な方法を採用し、Kanataniの最適推定方法にのっつて、前述の問題を解析する。

ここで、解決すべき問題点は、

1. カメラの情報（内部パラメータや位置・姿勢）は未知である。あるいは、それを未校正画像から推定しなくてはならない。
2. もとの3次元情報に含まれる誤差に相関がある場合がある。
3. 最適な推定を試みたい（不偏・分散小）

である。

- 1は、未校正画像を使う上で避けるわけにはいか

ない。カメラの詳細な情報が得られているのであれば、3次元情報の推定は比較的容易である。古くは、[11]において、EKFを使って、3次元位置情報の精度を向上させている。しかし、カメラパラメータは画像から計算しているものの、その推定値には誤差が存在しないと仮定していた。本研究では、カメラの情報に推定誤差がある場合において、その誤差も考慮して3次元情報を更新していく。2に関しては、画像から3次元情報を更新する場合、仮に、もとの3次元情報や画像情報に乗っている誤差に相関がなくても、更新した3次元情報の間には相関が生じてしまうことが知られている。もし、繰り返し本手法を適用するのであれば、3次元情報に相関が存在する場合でも最適に推定、あるいは解析できる手法が望まれる。もちろん、3にあるように、最適な解を求めるのは必須である。

以降、まず2で、問題を定式化する。定式化自体は、難しくはないが、数式の導出は煩雑である。そのため、導出の多くを付録に記載した。その後、3で、シミュレーションと、実画像による実験結果を示す。

2 問題設定

2.1 カメラによる投影

3次元空間中に N 個の点群 $x_\alpha, \alpha = 1 \dots N$ が存在する。 x_α の座標を $X_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha, 1)^T$ とする。また、カメラによって、画像上で、 x_α に投影されたとし、その座標を $x_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 1)^T$ とする。これらの投影関係は、 3×4 のカメラ行列 $P = (p_{ij})$ を用いて、

$$x_\alpha \simeq P X_\alpha \quad (1)$$

と記述できる。(1)を、 P の要素を並べたの列ベクトル u と座標値 X_α や x_α を含む列ベクトルとの内積の形に書き直すと、 $\alpha = 1, \dots, N$ に関して、

$$(b^{(\alpha)}, u) = 0, \quad (2)$$

$$(c^{(\alpha)}, u) = 0 \quad (3)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} b^{(\alpha)} &= (X_\alpha^T \quad 0 \quad -x_\alpha X_\alpha^T)^T, \\ c^{(\alpha)} &= (0 \quad X_\alpha^T \quad -y_\alpha X_\alpha^T)^T, \\ u &= (p_{11} \quad \dots \quad p_{34})^T \end{aligned}$$

である。

$\alpha = 1, \dots, N$ に関して $a^{(\cdot)}$ を $a^{(2\alpha-1)} = b^{(\alpha)}$ $a^{(2\alpha)} = c^{(\alpha)}$ と定義すると、(2), (3) をまとめて、

$$(a^{(i)}, u) = 0, (i = 1, \dots, 2N) \quad (4)$$

と書ける。これが、3次元空間中の N 個の点群から、画像へのカメラによる投影の関係式である。

2.2 誤差が含まれる場合の関係

いま、 X_α および、 x_α の真の座標を、それぞれ、 $\bar{X}_\alpha, \bar{x}_\alpha$ とする。もし、はじめから $\bar{X}_\alpha, \bar{x}_\alpha$ が得られるのであれば苦労はないが、実際には、これらに誤差が付加され、推定値、あるいは、観測値となる。以降、 X_α, x_α を、

$$X_\alpha = \bar{X}_\alpha + \Delta \bar{X}_\alpha,$$

$$x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta \bar{x}_\alpha$$

とおく。 $\Delta \bar{X}_\alpha, \Delta \bar{x}_\alpha$ は誤差を表している (図2)。

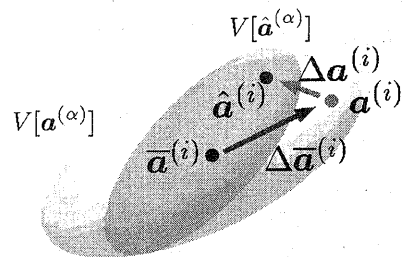


図2. 真値 $\bar{a}^{(i)}$ の推定値 $a^{(i)}$ から、より良い推定値 $\hat{a}^{(i)}$ を求める。 $\Delta \bar{a}^{(i)}$ は、最初の推定値に含まれていた誤差である。 $a^{(i)}$ に $\Delta a^{(i)}$ という補正を加え、 $\hat{a}^{(i)}$ を得る。

本論文が解決しようとしている問題は、「 $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ において、 \bar{X}_α の推定値 X_α と、その共分散行列 $V[X_\alpha, X_\beta]$ が与えられている。このとき、画

像上の点の座標 x_α が観測されたときに、よりよい推定値 \hat{X}_α とその共分散行列 $V[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]$ を求めよ。また、同時に、最適なカメラパラメータ \hat{u} も求めよである。

従来の一般的な仮定として、各点の誤差は独立で、相関がないというものがあつた。しかし、本研究では、必ずしも、この仮定を使うことができない。なぜなら、仮に、3次元位置の推定値の誤差、 $\Delta\bar{X}_\alpha, \Delta\bar{X}_\beta$ の間に相関が存在せず、共分散行列 $V[X_\alpha, X_\beta] = 0, \alpha \neq \beta$ であっても、カメラパラメータの誤差をも考慮した推定法では、更新後の共分散行列 $V[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]$ は必ずしも 0 とはならないからである。本手法を繰返し適用することを考えると、 $V[X_\alpha, X_\beta] \neq 0$ であると仮定することはできない。ただし、画像に含まれる誤差 Δx_α に関しては、各点、各座標に関して独立であると仮定した。それは、対応点を抽出する処理は、各画像間、各点間で相互の影響は少ないと考えられるからである。また、この共分散行列 $V[x_\alpha]$ は既知であるとした。一般には、 \bar{x}_α に含まれる誤差の大きさ(ノイズレベル)は事前には分からないが、たとえば、2枚の画像間で基礎行列を計算するならば、その副産物としてノイズレベルを推定する [1][12][8][13][14] ことができるからである。

以降、 X_α, x_α 等の代りに、 $a^{(i)}$ と (4) を使って解析を進める。先と同様に、初期の推定値および観測値を $a^{(i)}, a^{(i)}$ の真値を $\bar{a}^{(i)}$ と記述する。

$\bar{a}^{(i)}$ は (4) を必ず満たすはずなので、真のカメラパラメータを \bar{u} とするなら、

$$(\bar{a}^{(i)}, \bar{u}) = 0, (i = 1, \dots, 2N)$$

である。しかし、 $\bar{a}^{(i)}, \bar{u}$ は未知なので、推定値 $a^{(i)}$ と、その共分散行列 $V[a^{(i)}, a^{(j)}]$ から、(4) を正確に満たす、 $\hat{a}^{(i)}$ と $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(j)}]$ 、カメラパラメータ \hat{u} を計算しなくてはならない。そのため、Kanatani[1]の幾何学的当てはめ問題の解法を利用する。これは、(4) を満たす最適なパラメータ \hat{u} とその分散 $V[\hat{u}]$ を、データ $a^{(i)}$ とその共分散行列から求める手法である。本研究では一歩進んで、更新後のデータの共分散行列 $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(j)}]$ をも計算している。

本来は、(4) を解くだけで、最適な $\hat{a}^{(i)}$ と \hat{u} が得られるのであるが、説明のため、カメラ校正と、3次元位置の補正の二段階に分けて考える(図3)。

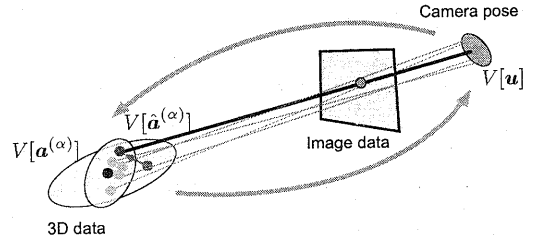


図3. 3次元空間中の点の推定値と未校正画像の観測値から、カメラパラメータおよび、より正確な3次元位置情報を得る。このとき、3次元位置情報とカメラパラメータの精度(共分散行列)も評価する。

まず、(4) を満たす、 \hat{u} の推定とその分散 $V[\hat{u}]$ を求める。そのためには、次の J を最小にするような u を求めれば良いことが知られている。

$$J[u] = \sum_{k,l}^{2N} W(u)^{(k,l)} (a^{(k)}, u) (a^{(l)}, u) \quad (5)$$

ただし、

$$(W(u)^{(k,l)}) = ((u, V[a^{(k)}, a^{(l)}]u))^{-1} \quad (6)$$

である ($V[a^{(k)}, a^{(l)}]$ の一部は、付録に記した)。ここまでは、3次元位置情報と画像情報を含むデータ $a^{(i)}$ から、カメラパラメータ u を求めるカメラ校正問題と同等である。

\hat{u} を得たならば、次に、最適な $\hat{a}^{(i)}$ を逆に計算する ([1] の (7.7) や (7.53) を参照)。 $a^{(i)}$ を初期の推定値とするならば、 $a^{(i)}$ に、 $\Delta a^{(i)}$ という補正を加えることで、 $\bar{a}^{(i)}$ により近い推定値 $\hat{a}^{(i)}$ が得られる。

$$\hat{a}^{(i)} = a^{(i)} - \Delta a^{(i)},$$

$$\Delta a^{(i)} = \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} (a^{(l)}, \hat{u}) V[a^{(i)}, a^{(k)}] \hat{u}. \quad (7)$$

この $\hat{a}^{(i)}$ は、 \hat{u} と対をなし、(4) を満たす。この操作は、誤差を含む3次元位置情報や画像情報を、投影関係を満たすように、補正したことと同等である。

$\hat{u}, \hat{a}^{(i)}$ の分散・共分散行列も計算することができ

る。まず、 \hat{u} の分散は、

$$V[\hat{u}] = (M)^{-1}, \quad (8)$$

$$M = \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} \bar{a}^{(k)} \bar{a}^{(l)T} \quad (9)$$

のように求めることができる。しかし、 $\Delta a^{(i)}$ や $V[\hat{u}]$ を求めるにも、 $\bar{a}^{(i)}$ や $\bar{W}^{(k,l)} = W(\bar{u})^{(k,l)}$ といった、真の値を含む量が登場する。もちろん、これらは知ることができないので、近似として、 $\hat{a}^{(i)}$ や \hat{u} を代替として用いる。

次に、 $\hat{a}^{(i)}$ の共分散行列 $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(i)}]$ を求める。この導出は煩雑なので、付録に記載している。大まかな流れとしては、 $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(i)}]$ を、既知の共分散行列である $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(i)}]$ の関数に帰着させて計算している。

$V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(i)}]$ が求まったなら、その 4×4 小行列を抜き出すことで、本来の目標であった、 $V[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]$ を得ることができる。

3 実験

シミュレーション実験と、実画像による実験により、本手法の優位性と有効性を検証する。

3.1 シミュレーション実験

3次元空間中に格子状に配置した32点に対して本手法を適用した。これらの位置情報に、あらかじめ与えた共分散行列に従って誤差を加え、最初の推定値としている。また、3次元位置の真値を、ある位置・姿勢からカメラで撮影した画像を生成し、この画像に標準偏差1ピクセルの正規分布に従う誤差を付加して、入力画像としている。たとえば、点番号1の点の共分散行列(4行目、4列目はすべて0であるので、 3×3 小行列だけを示す)が、初期は、

$$V[X_1]_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{pmatrix}$$

であったものが、更新後は、

$$V[X_1]_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 133.0 & 33.5 & 115.0 \\ 33.5 & 130.0 & 83.9 \\ 115.0 & 83.9 & 315.0 \end{pmatrix}$$

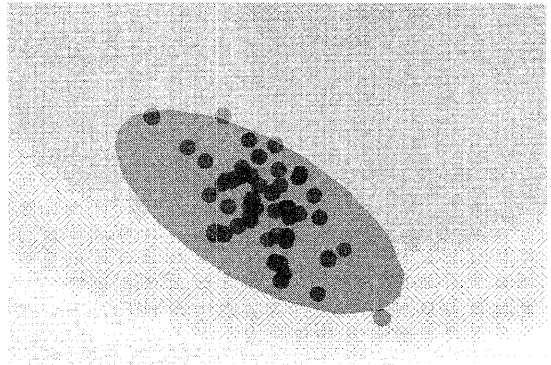


図4. シミュレーション実験による更新後の3次元位置情報と、その共分散。誤差を加えながら、50回試行したもの。小さな点は更新後の \hat{X}_1 の各試行を示し、大きな楕円体は計算によって求めた $V[\hat{X}_1]$ を示している($\sigma = 3$)。小さな点が、ほぼ楕円体の中に含まれ、それらがほぼ真値 \bar{X}_1 を中心として分布している。

と減少している。もし、この共分散行列を3次元楕円体と考えるなら、体積は、更新前の約21%になっている。

また、更新した共分散行列が正しいものであることを示すため、上記条件のもと、誤差を付加して、50回試行してプロットしたのが図4である。小さな点は、点番号1の、更新された3次元位置 \hat{X}_1 の各試行を示している。そして、大きな楕円体は、 $V[\hat{X}_1]_{3 \times 3}$ を3倍したもの($\sigma = 3$ に対応)を示している。 \hat{X}_1 の分布が、大きな楕円体の中に含まれているのが分かる。楕円体の中心は、真値 \bar{X}_1 に置いているが、 \hat{X}_1 がほぼ偏差のない推定であることが示されている。

3.2 実画像による実験

3次元復元システム[15][16]により復元された、3次元位置情報と、その共分散行列を用いて、実験した結果を図5に示す。箱状の対象物体上にとった31個の点群の3次元位置と共分散行列の推定値が図5(a)に示されている。この対象物体を撮影した画像(b)を用いて、より精度の高い3次元位置情報(c)が得ら

れている。明らかに、誤差が小さくなっているのがわかる。また、推定されたカメラ位置・姿勢を矢印で示している。

4 おわりに

3次元位置情報と、その共分散行列が既知である場合に、画像情報を付加して、より精度の高い3次元位置情報に更新する方法を示した。間接的に、カメラパラメータの推定が必要となるが、この推定の精度までも考慮し、3次元情報を更新している。その結果として、各点に乗る誤差に相関が生じてくるが、相関が存在する場合でも有効な方法を示した。

本手法を使うことにより、移動するカメラ（未知な運動であっても）から撮影した画像を使って、3次元情報の精度を逐次的に高めていくことが可能になる。また、共分散行列を計算することができるので、よりよく対象物体を観察するようなカメラの移動方法を決定できるようになる。ある特定の点の位置精度が高くなるようなカメラの運動や、対象形状の識別が最も有利になるようなカメラの配置といったものを導出できるようになるであろう。

今後解決すべき問題点として、各点間の誤差の相関の存在により、計算量が多いという点が挙げられる。現在、シミュレーション実験に用いた32点の場合、まだまだ改善の余地はあるものの、Dual構成のPentiumII 450MHzの計算機で、約3分かかっている。もし、誤差の相関の影響を無視できるような場合があるのなら、大幅に計算量を節約できるであろう。

参考文献

- [1] Kenichi Kanatani. *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*. Elsevier Science, 1996.
- [2] Gabriella Csurka, Cyril Zeller, Zhengyou Zhang, and O. D. Faugeras. Characterizing the uncertainty of the fundamental matrix. *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 68, No. 1, pp. 18-37, 1997.
- [3] N. Georgis, M. Petrou, and J. Kittler. Error guided design of a 3D vision system. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 20, No. 4, pp. 366-379, 1998.
- [4] Bradley J. Nelson and Pradeep K. Khosla. The resolvability ellipsoid for visual servoing. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 829-832, 1994.
- [5] 金谷健一. 自己評価を伴うアクティブビジョン. 画像の認識・理解シンポジウム (MIRU), pp. 1-91-96, 1996.
- [6] S. Bougnoux. From projective to euclidian space under any practical situation, a criticism of self-calibration. In *International Conference on Computer Vision*, pp. 790-796, 1998.
- [7] O. Faugeras, S. Laveau, L. Robert, G. Csurka, and C. Zeller. 3-D reconstruction of urban scenes from sequences of images. In *INRIA Research Report No.2572*, 1995.
- [8] Phil Torr, Andrew W. Fitzgibbon, and Andrew Zisserman. Maintaining multiple motion model hypotheses over many views to recover matching and structure. In *International Conference on Computer Vision*, pp. 485-491, 1998.
- [9] P. A. Beardsley, A. Zisserman, and D. W. Murray. Sequential updating of projective and affine structure from motion. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 23, No. 3, pp. 235-259, 1997.
- [10] Q. T. Luong and O. D. Faugeras. Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 22, No. 3, pp. 261-289, 1997.
- [11] 木下敬介, 出口光一郎. 能動視覚による3次元形状認識. 計測自動制御学会論文集, Vol. 28, No. 1, pp. 144-153, 1992.
- [12] Kenichi Kanatani. Statistical optimization and geometric inference in computer vision. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 356, No. 1740, pp. 1303-1320, 1998.
- [13] P.H.S. Torr. Geometric motion segmentation and model selection. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 356, No. 1740, pp. 1321-1340, 1998.
- [14] 木下敬介, M.Lindenbaum. 幾何学的 AIC によるカメラモデル選択. 情報処理学会研究報告 CVIM-114, pp. 57-64, 1999.
- [15] Martin Tonko and Keisuke Kinoshita. Metric reconstruction with an uncalibrated camera. 信学技報 PRMU98-205, pp. 101-108, 1999.
- [16] Martin Tonko. Unbiased estimation of the projective geometry and its uncertainty from point correspondences and point uncertainties. In *ATR Symposium on Face and Object Recognition*, pp. 17-22, 1999.

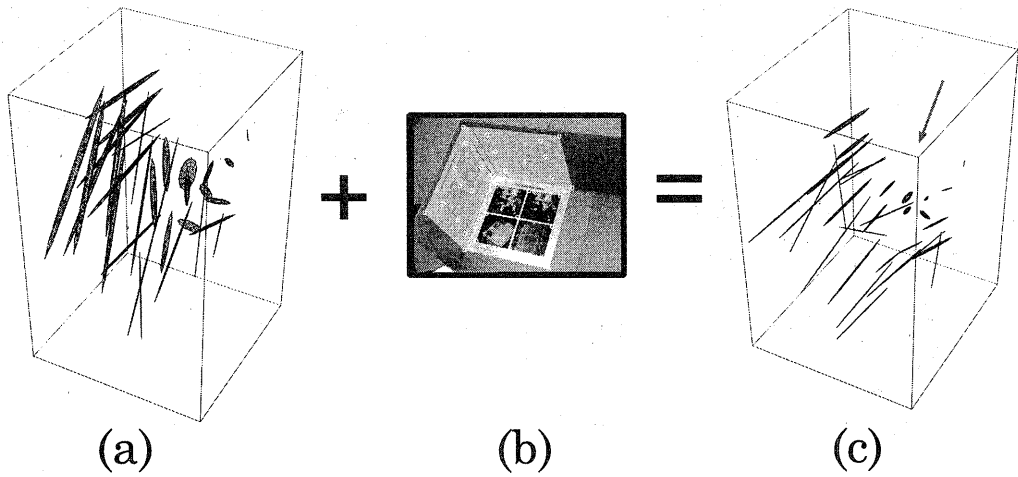


図 5. (a) もとの 3 次元位置情報とその共分散。全部で 31 点。(b) 新たに得られた未校正画像。この画像から抽出した点の座標を使って、(a) に示されている情報をより正確なものに更新する。(c) 更新後の 3 次元情報とその共分散。明らかに推定誤差が減少している。また、推定されたカメラ位置・姿勢を、矢印で記している。

A 付録

A.1 $V[a^{(i)}, a^{(j)}]$ の導出

i, j の値によって、8 通りの場合に別けられる。そのなかで、 $V[b^{(\alpha)}, b^{(\beta)}]$ を例にすると、 $\alpha \neq \beta$ の時は、

$$V[b^{(\alpha)}, b^{(\beta)}] = \begin{pmatrix} V[X_\alpha, X_\beta] & \mathbf{0}_4 & -\bar{x}_\beta V[X_\alpha, X_\beta] \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_4 \\ -\bar{x}_\alpha V[X_\alpha, X_\beta] & \mathbf{0}_4 & \bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta V[X_\alpha, X_\beta] \end{pmatrix},$$

$\alpha = \beta$ の時は、

$$V[b^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}] = \begin{pmatrix} V[X_\alpha] & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_4 \\ -\bar{x}_\alpha V[X_\alpha] & \mathbf{0}_4 \\ -\bar{x}_\alpha V[X_\alpha] & \mathbf{0}_4 \\ \bar{x}_\alpha^2 V[X_\alpha] + V[x_\alpha](\bar{X}_\alpha \bar{X}_\alpha^T + V[X_\alpha]) \end{pmatrix}$$

といったように計算する。ただし、 $\bar{X}_\alpha, \bar{x}_\alpha$ 等は、観測値 X_α, x_α 等で代替する。

$V[b^{(\alpha)}, c^{(\beta)}], V[c^{(\alpha)}, b^{(\beta)}], V[c^{(\alpha)}, c^{(\beta)}]$ についても同様に計算できる。

A.2 $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(j)}]$ の導出

更新後の共分散行列 $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(j)}]$ は、

$$\begin{aligned} V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(j)}] &= E[(a^{(i)} - \Delta a^{(i)})(a^{(j)} - \Delta a^{(j)})^T] \\ &= E[\Delta \bar{a}^{(i)} \Delta \bar{a}^{(j)T}] - E[\Delta \bar{a}^{(i)} \Delta a^{(j)T}] \\ &\quad - E[\Delta a^{(i)} \Delta \bar{a}^{(j)T}] + E[\Delta a^{(i)} \Delta a^{(j)T}] \quad (10) \end{aligned}$$

と展開できる。 $V[\hat{a}^{(i)}, \hat{a}^{(j)}]$ を計算するには、 $\Delta \bar{a}^{(\cdot)}$ と $\Delta a^{(\cdot)}$ の共分散行列を計算しなくてはならない。まず、 $a^{(\cdot)}$ を、統計的な性質が既知である $\Delta \bar{a}^{(\cdot)}$ で記述することを試みる。

$$\Delta a^{(i)} = \sum_{k,l} \bar{W}^{(k,l)}(a^{(l)}, \hat{u}) V[a^{(i)}, a^{(k)}] \hat{u}$$

であったが、 $\mathbf{a}^{(i)}$ と $\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(i)}$ は相関があるし、 $\hat{\mathbf{u}}$ との間接的に相関が存在する。ここに、

$$\mathbf{a}^{(i)} = \bar{\mathbf{a}}^{(i)} + \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(i)}, \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u} \quad (12)$$

を代入し、 $\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(i)}$ 、 $\Delta \mathbf{u}$ の一次の項までで近似し、 $(\bar{\mathbf{a}}^{(i)}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$ を利用して整理すると、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a}^{(i)} &\simeq \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} V[\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(k)}] \{(\bar{\mathbf{a}}^{(l)}, \bar{\mathbf{u}}) I_{12} + \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{a}}^{(l)T}\} \Delta \mathbf{u} \\ &\quad + \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} V[\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(k)}] \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(l)} \end{aligned}$$

と、 $\Delta \mathbf{a}^{(i)}$ を、 $\Delta \mathbf{u}$ と $\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(i)}$ で記述できる。さらに、[1] の (7.26) より、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= -\bar{M}^{-1} \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} \bar{M} \bar{M}^{-1} \bar{\mathbf{a}}^{(k)} \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(l)} \\ &= -V[\hat{\mathbf{u}}] \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} \bar{\mathbf{a}}^{(k)} \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(l)} \end{aligned}$$

が得られ、 $\Delta \mathbf{u}$ をも $\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(i)}$ で記述できる。よって、

$$\begin{aligned} G_1^{(i)} &= \sum_{k,l}^{2N} \bar{W}^{(k,l)} V[\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(k)}] \{(\bar{\mathbf{a}}^{(l)}, \hat{\mathbf{u}}) I_{12} + \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{a}}^{(l)T}\}, \\ G_2^{(i,l)} &= \left\{ \sum_k \bar{W}^{(k,l)} (-G_1^{(i)} V[\hat{\mathbf{u}}] \bar{\mathbf{a}}^{(k)} + V[\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(k)}] \bar{\mathbf{u}}) \right\} \bar{\mathbf{u}}^T \end{aligned}$$

と置くならば、

$$\Delta \mathbf{a}^{(i)} = \sum_l G_2^{(i,l)} \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(l)} \quad (13)$$

と $\Delta \mathbf{a}^{(i)}$ を $\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(l)}$ で表せる。

(13) を (10) に代入すると、最終的に、

$$\begin{aligned} V[\Delta \hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \Delta \hat{\mathbf{a}}^{(j)}] &= V[\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}] - \sum_l G_2^{(i,l)} V[\mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{a}^{(j)}] \\ &\quad - \left(\sum_n G_2^{(j,n)} V[\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(i)}] \right)^T \\ &\quad + \sum_{l,n} G_2^{(i,l)} V[\mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{a}^{(n)}] G_2^{(j,n)T} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $V[\mathbf{a}^{(l)}, \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(j)}] = V[\mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{a}^{(j)}]$ 、 $V[\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(l)}, \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(n)}] = V[\mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{a}^{(n)}]$ などの関係を使った。

これより、 $V[\Delta \hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \Delta \hat{\mathbf{a}}^{(j)}]$ は、 $V[\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}]$ 、 $V[\hat{\mathbf{u}}]$ 、 $\bar{\mathbf{a}}^{(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ から計算できる。もちろん、 $\bar{\mathbf{a}}^{(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ は知ることができないので、最適な推定値 $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ 、 $\hat{\mathbf{u}}$ で代用する。