

隠れマルコフモデルを応用した交差点における事故検出

上條俊介 松下康之 池内克史 坂内正夫

東京大学生産技術研究所 電子情報系

〒 106-8558 東京都港区六本木 7-22-1

Tel : 03-3402-6231 (Ext.2645) E-mail : kamijo@sak.iis.u-tokyo.ac.jp

あらまし 近年、交通事故による死傷者の数が急速に増えつつあるが、この交通事故の大半は交差点で起きている。事故を自動的に瞬時に発見することができれば、早期に救急などの対応が可能となり、このことは死者削減や事故渋滞の緩和につながる。そこで、我々の研究室では、事故をはじめとする交差点での様々な事象を解析するために駿河台下交差点に隣接するビルの屋上へビデオカメラを設置し、交差点の交通事象を 24 時間記録している。本論文では、交通監視システム、車両の追跡アルゴリズムおよび隠れマルコフモデルを用いた事故検出アルゴリズムについて述べ、異なる交差点で起きた 2 件の事故へ適用した実験結果に基づきその有用性を議論する。さらにその結果をもとに、隠れマルコフモデルの状態と事故のシーケンスとの対応を考察する。

Accident Detection at Intersection Utilizing Hidden Markov Model

Shunsuke Kamijo Yasuyuki Matsushita Katsushi Ikeuchi Masao Sakauchi

Institute of Industrial Science

University of Tokyo

7-22-1 Roppongi, Minato-ku, Tokyo JAPAN 106-8558

Tel : 03-3402-6231(Ext.2645) E-mail : kamijo@sak.iis.u-tokyo.ac.jp

Abstract The number of deaths and injuries from traffic accidents has been rapidly increasing. Most of those accidents occur at and nearby intersections. It is very important to detect accidents automatically, and to rescue injuries quickly. This effort will be effective to decrease deaths and to ease traffic jams. In order to analyze those accident events, we set up a video camera and recorded those traffic activities all day. In this paper, we describe this traffic monitoring system, the method for tracking vehicles, and the method for detecting accidents by using the Hidden Markov model. Then, we will demonstrate our success by presenting the experimental results achieved by applying this method to video sequences of two different real accidents. And according to the result, we discuss about correspondence between the state of HMM and sequential mechanism of accidents.

1 まえがき

近年、交通事故による死傷者の数が急速に増えつつあるが、その大半は交差点で起きている。このため、交差点で起きる様々な交通事象を監視することは重要である。すでに成果を上げているいくつかの交通監視システムでは、コンピュータ・ビジョン以外の技術を導入しているものがある。例えば Gangisetty 等 [1] は、誘導コイルセンサーを高速道路に埋め込む方式を用いた IDS (Incident Detection System) を開発し、成果を上げている。しかし、このシステムは有効であるけれども、こういったビジョンを用いないセンサーは固有の地点しか観測できないため、用途が限られてしまう。

コンピュータ・ビジョンを応用したセンサーの最も有用な点の一つは、一つのセンサーから駐車車両、交通渋滞、交通規則違反などの豊富な情報を取得できることにある。ビジョン技術を応用した代表的なシステムの例として [2][3][4][5][6][7][8] が挙げられるが、これらは車載向け技術とインフラ向け技術に大別される。[2][3] は車載技術で、先行車両を後続車両からトラックする方法について述べている。これに対し、[4][5][6][7][8] はインフラ技術である。[4][5] は、高速道路上に固定したカメラから車両をトラックするものである。Lai 等 [6] は、交差点において赤信号無視を検出するシステムを開発し、すでに香港で実用的に稼動している。

上記インフラ技術のなかでも、[7][8] は一般道または交差点における状態観察を目的としている点で興味深い。Grimson 等 [7] は、"Forest of sensors" とよぶビジョンセンサー群を一般道に設置し、観測された動きベクトルをクラスタリングすることにより、交通状態の分類や異常事象領域の検出に成功している。また、Kettner 等 [8] は、交差点全体でブロックごとに動きベクトルを求め、それらを全体としてベクトル量子化することにより、信号の変化など交差点全体のリズムを隠れマルコフモデルで学習・認識させている。

これに対し、我々の研究は、一般道の交差点で起きる交通事象を理解することを焦点としている点では、Grimson 等、Kettner 等と同様である。しかし、我々の研究の特徴は、個々の車両をトラックした結果を時系列化することにより、事故のミクロなシーケンスを認識しようとする点にある。この目的のため、駿河台下交差点に面するビルの屋上にビデオカメラを設置し、24時間リアルタイム映像を取得している。この交通監視システムおよび背景画像の取得については、2で紹介

する。3ではロバストな車両追跡アルゴリズムについて、4では車両を追跡した結果に基づいた時系列特徴量の抽出について述べる。その時系列特徴量に対して隠れマルコフモデルを適用した、事故の認識手法および実験結果について5で述べたのち、6では事故のシーケンスの解釈を試みる。

2 交通監視システム

2.1 交通監視環境

図1は、我々の交通監視システムを示している。我々は、交通を監視するために駿河台下交差点に面するビルの屋上にビデオカメラを設置した。ここで撮影された NTSC 映像は、NTT の第一種映像回線（アナログ、光ファイバー）を通じて六本木にある研究室に送られる。転送された映像は、研究室内で2チャンネルに分岐し、一方は S-VHS ビデオに常時録画し、他方は、SGI の Video Capture Board を介してデジタル化し、目視チェックとリアルタイムの交通監視プログラムの両面で使用されている。現状では後述する事故検出アルゴリズムがリアルタイムで処理できていないため、背景更新と、駐車や事故・故障などで長時間一ヶ所に存在する車両検出のみをリアルタイムで処理している。

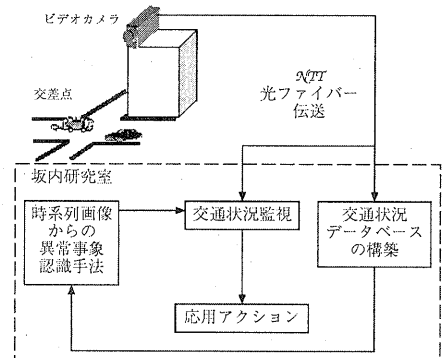


図1: 交差点監視システム

2.2 背景画像の取得

背景画像は、移動物体の抽出やトラックの基礎となる。背景画像は20分間の画像シーケンスから、次の要領で構成される。

1. 各画素の画素値について、時間方向に頻度を蓄積

したヒストグラムを作成する。

2. 各画素について、上記ヒストグラム中最も頻度が高いものを、背景画像の各画素値とする。

鮮明な背景画像を合成するには、ヒストグラムを蓄積する時間範囲が長いほうが良い。これにたいし、背景画像の変化を観測することにより異常事象を検出するには、この時間範囲は短いほうがよい。このトレードオフから、ヒストグラムを蓄積する時間範囲を20分とした。これにより、駐車や事故・故障などによる10分以上の停車を検出できる。この20分という長い時間を、ヒストグラム蓄積の時間範囲として選んだのは、赤信号や右折待ちなどで1分程度停車している車両を背景画像から除去するためである。また、古い背景画像を新しい背景画像へ更新する時間間隔は10分とした。大きな事故の場合、事故が起きてから警察や救急車が登場して処理が終わるまでに、通常30分以上は要するものである。この現象を背景画像の変化として捉えるには、20分の蓄積時間と10分の更新間隔が妥当である。

この背景画像の取得は、画像シーケンス中のゆっくりとした変化を検出することができるため、駐車車両や路面上への落下物を検出するのに有用である。これらの物体が、時間的に隣接する背景画像間に変化として現れるためである。さらに、背景画像の取得は、事故をリアルタイムではなく、長時間の観測から検出するには有用である。一般に事故を起こした車両は、その付近あるいは付近の路側に長時間留まり、事故からしばらくすると警察や救急車が到着し、これらが10分ごとに更新される背景画像中に現れることになる。これにより、データ収集の目的レベルでの異常事象検出が可能となる。

また、背景画像は、3で述べる移動物体のトラッキングの演算量を削減するのに有効である。動きベクトルの算出は、背景画像と異なり、何らかの物体が存在する領域についてのみ行えば十分である。

3 移動物体のトラッキング

異常事象を効果的に検出するためには、車両などの個々の移動物体をトラッキングする必要がある。交差点で起きる異常事象は、2.2で述べたような長時間の現象ばかりでなく、むしろ短時間の現象が多いためである。

しかし、このトラッキングに際し、以下のような問題が生じる。これらの問題は、カメラが交差点の縁に交差点を斜めに見下ろすようなアングルで設置されている

ことによる。

1. 右左折などで回転することにより、移動物体の一部が自分自身により見え隠れるため、その部分では動きベクトルが正しく算出できない。また、複数の移動物体が画像上で重なったときに、移動物体の一部が隠れてしまう。この場合、動きベクトルが正しく算出できないだけでなく、複数の移動物体を混同する恐れがある。
2. 同一の移動物体でも、カメラとの遠近により画像上での大きさが異なる。

事故を効果的に検出するためには、個々の移動物体の動きを算出する必要がある。上記の問題点を解決し、移動物体をロバストにトラッキングするために、以下のようなアルゴリズムを開発した。

まず、640x480ピクセルの画像を8x8ピクセルからなるブロックで分割し、80x60ブロックで画像を構成する。各ブロックには、それぞれ属する移動物体のIDが振られる。典型的には、一つの移動物体に5~30程度のブロックが属する。移動物体としては、バイクや車などがある。上記の画像にたいし、以下の5ステップからなるアルゴリズムを適用する。

1. 初期化
交差点への出入り口にスリットを設ける。
2. 移動物体IDの生成(図2)
それぞれのスリットにおいて、現画像と背景画像との画素値の差分が閾値より大きいブロックを検出する。検出されたブロック同志で隣接するブロックをクラスタリングして、新たな移動物体IDを割り当てる。新たな移動物体が、すでに存在する移動物体と重なっているときは、すでに存在する移動物体のIDに融合させる。
3. 移動物体の動きベクトルの推定
移動物体に属する複数のブロックそれぞれに、Block Matchingを適用して動きベクトルを求める。求められた動きベクトルのうち、最多頻度のものをその移動物体の動きベクトルとして推定する。
4. 移動物体の更新(図3)
ステップ3で推定した動きベクトルをもとに、現画像上の移動物体を次画像上で移動させる。移動した先では、移動物体の画像上での大きさや形状が変化するため、背景画像との差分が閾値以下であるブロックから移動物体IDが削除され、近傍ブ

ロックのうち背景画像との差分が閾値を超えるものには移動物体 ID が与えられる。

5. 移動物体の分割

同一のスリット内を同時に通過する複数の移動物体が画像上で重なっているときなどは、単一の移動物体として生成される。この移動物体内で著しく動きベクトルが異なるクラスターや、背景画像で分離されるクラスターが存在するとき、クラスターごとに移動物体として分割される。

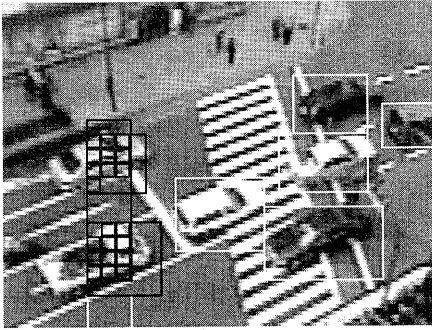


図 2: 移動物体の生成

4 事故検出アルゴリズムの前処理

4.1 特徴量の抽出

交差点の形状やカメラの設置位置およびアングルなどの地理的条件に依存する特徴量を用いると、HMM などの事故認識モデルをトレーニングするために莫大な学習データが必要となる。例えば、画像の画素値そのものを認識に用いると [9], 地理的条件だけでなく色合いにも依存してしまい、学習データは膨大なものとなる。これに対し移動物体の動きベクトルを用いる場合 [8] でも、単純に絶対量を使用すると、やはり地理的条件に依存してしまう。

そこで、我々は下記のように、地理的条件や色条件に依存しないような特徴量 (図 4) を導入し、事故認識システムへの入力とした。以下のアルゴリズムは全ての 2 つの移動物体の組み合わせに対して適用される。

1. 2 つの移動物体の移動ベクトルについて差分を求める。

$$\vec{V}_d = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad (1)$$

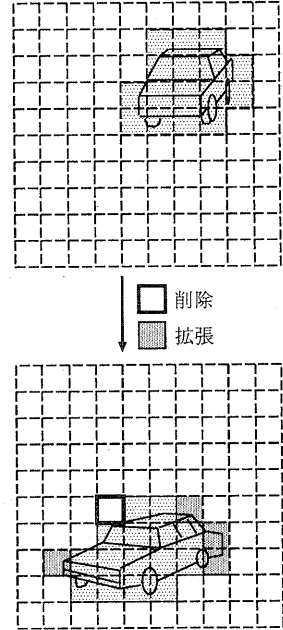


図 3: 移動物体の移動と更新

2. 上記差分ベクトルを回転し、ベクトル 1 が X 軸の正の向きになるように回転させる。

$$\vec{V}_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \vec{V}_d \quad (2)$$

3. 回転された差分ベクトルを 2 つの移動物体の距離で割る。ここで距離は、それぞれの移動物体に属するブロックのうち、最も近いブロック間の距離とする。なぜなら、2 つの移動物体間で最も近い部分の距離が衝突危険性に直接関わるからである。ちなみに、2 つの移動物体の重心間で距離を測ると、乗用車とバスとでは、衝突している時でさえ、距離が大きく異なってしまい、衝突危険性の指標にならない。

$$\vec{V}_n = \vec{V}_r / d_{12} \quad (3)$$

4. ステップ 3 で正規化されたベクトル \vec{V}_n を 0-12 の観測量として量子化する。ここで、 \vec{V}_n が距離の逆数に比例していることから、その絶対値が大きいほど危険状態であることを示している。したがって、量子化された観測量として 3,6,9,12 が現れる

と危険状態の可能性がある。ただし、危険状態であると断言できないことについては後述する。

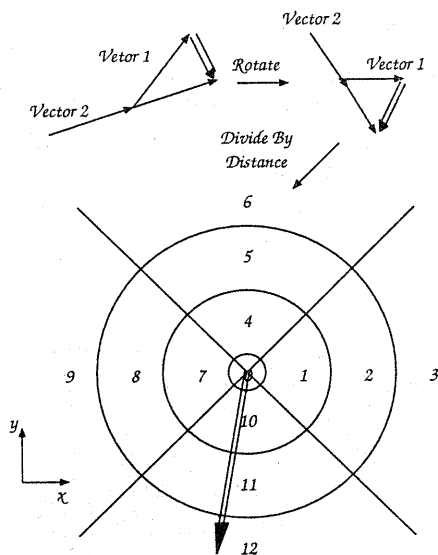


図 4: 特徴量の抽出

4.2 認識手法について

このように、事故認識の問題は時系列データの認識、分類の問題である。時系列データの認識手法としては、DP マッチング (DPM) や隠れマルコフモデル (HMM) などが代表的である。本論文が対象とする事象については、確率モデルである HMM がより有効であろうと思われる。シーケンス中に現れる観測量は、常に同じパターンで現れるわけではなく、ある誤差をもって現れるため、これを吸収するには確率モデルが適しているからである。また、ニューラル・ネットワーク (NN) も一種の確率モデルと考えられ、本認識目的に有効であると考えられるが、時間軸方向の伸縮に対してロバストでないと考えられるため、ここでは HMM を使用した。

5 HMM による事故認識

事故の時系列シーケンスを認識するための手法として、代表的な確率モデルである HMM の適用を試みた。この章では、HMM の基本的なアルゴリズムと実際の

認識実験について述べる。

5.1 HMM のアルゴリズム

実験結果について説明する前に、HMM のアルゴリズムについて説明しておく。ここでは、最も単純な Left-to-Right HMM (図 5) を適用し、そのパラメータは以下のように定義される。

a_{ij} : 状態 i から状態 j への遷移確率。

ただし、 $a_{ij} = 0 (j \neq i, i + 1)$

$b_{ij}(k)$: 状態 i から状態 j へ遷移するとき観測量 k を出力する確率。

ただし、 $b_{ij}(k) = 0 (j \neq i, i + 1)$

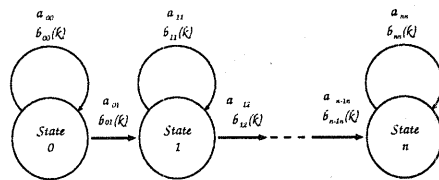


図 5: Left-to-Right HMM

パラメータ $a_{ij}, b_{ij}(k)$ は、Baum-Welch algorithm [10][11] によってトレーニングした。ここで、前向き変数 $\alpha_t(i)$ と後向き変数 $\beta_t(i)$ を定義する。 $\alpha_t(i)$ は、時刻 t までの部分観測列が $o_1 o_2 \dots o_t$ であったときに時刻 t において状態 i にいる確率であり、前向きアルゴリズムでトレリスを計算することにより得られる。 $\beta_t(i)$ は、時刻 t に状態 i にあるときに $t+1$ から T までの部分観測列 $o_{t+1} o_{t+2} \dots o_T$ が得られる確率であり、後向きアルゴリズムによって計算される。さらに、観測列とモデルが与えられた時に、時刻 t に状態 i から状態 j へ遷移する事後確率を $\gamma_t(i, j)$ と定義する。

[Baum-Welch algorithm]

1. $a_{ij}, b_{ij}(k)$ に初期値を与える。
2. 事後確率 $\gamma_t(i, j)$ を計算する。

$$\gamma_t(i, j) = \frac{\alpha_{t-1}(i) a_{ij} b_{ij}(o_t) \beta_t(j)}{\sum_i \alpha_t(i) \beta_t(i)} \quad (4)$$

$$\alpha_t(i) = P(o_1 o_2 \dots o_t, q_t = S_i | \lambda)$$

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1} o_{t+2} \dots o_T, q_t = S_i | \lambda)$$

3. $a_{ij}, b_{ij}(k)$ を計算しなおす.

$$a_{ij} = \frac{\sum_t \gamma_t(i, j)}{\sum_t \sum_j \gamma_t(i, j)} \quad (5)$$

$$b_{ij}(k) = \frac{\sum_{t: o_t=k} \gamma_t(i, j)}{\sum_t \gamma_t(i, j)} \quad (6)$$

上記のステップ 1,2 を繰り返すと、極小解に収束することが証明されている [11]. このようにトレーニングされた HMM のモデルが λ で与えられたとすると、 $\alpha_t(i)$ は次の式で表される.

$$\alpha_t(i) = P(o_1 o_2 \cdots o_t, q_t = S_i | \lambda) \quad (7)$$

認識の過程において、トレリスの値 $\alpha_t(i)$ は以下に示すように帰納的に求められる.

[HMM のトレリス計算]

1. 初期化

$$\alpha_1(j) = a_{0j} b_{0j}(o_1) \quad j = 0, 1 \quad (8)$$

2. 帰納ステップ

$$\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \alpha_{ij} \right) b_{ij}(o_{t+1}) \quad j = 0, 1 \quad (9)$$

3. 帰結

$$P(o_1 o_2 \cdots o_T | \lambda) = \sum_{j=1}^N \alpha_T(j) \quad (10)$$

この結果求められた $P(o_1 o_2 \cdots o_T | \lambda)$ は、認識しようとする観測シーケンス $o_1 o_2 \cdots o_T$ がモデル λ と一致する確率を表している. 従って、モデルを様々なカテゴリごとに用意して、各々について計算された $P(o_1 o_2 \cdots o_T | \lambda)$ を比較することにより、最も類似したカテゴリに分類できる. また、認識確率の計算には最終状態を固定して、そこにたどり着くパスのうち最も確率の高いパスを求める Viterbi algorithm があるが、確率の値にして 1 割程度の違いしかなく、ほぼ同様の結果が得られている.

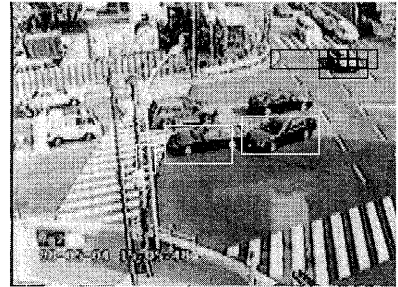
5.2 HMM による事故の認識実験

この実験では、以下のような 3 つの事象を考えた. これら 3 つの事象は、互いに似た観測量を持ち、HMM アルゴリズムがこれらを正確に分類できるかが主眼である.

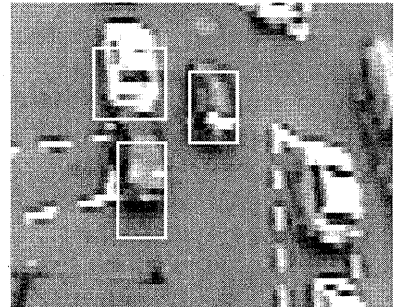
[事象 1] 追突事故 (図 6)

[事象 2] タンデム 後続車両が停止するときに先行車両が走り出し、それに追従して後続車両が再び走り出す場合である. 事故とシーケンスが似ているが、最接近したときの距離が追突の場合より大きいことが特徴.

[事象 3] 通過 停止またはゆっくり動いている車の隣の車線を車が通過していく場合である. 画面上で 2 台の車が重なってしまうと危険度の高い観測量が現れるため、最接近までの観測シーケンスが消灯の場合と同様であるが、その後の観測シーケンスが異なる.



(a) 横浜：原宿交差点 (AHS 組合提供)



(b) 神田：駿河台下交差点

図 6: 追突事故

典型的な 3 つの事象について、観測シーケンスを以下に示す. それぞれの観測シーケンスは、20 の観測量からなり、それぞれの観測量は 1 枚の画像フレームに

相当する。この実験では、10 フレーム/秒の画像を用いている。また、ここでは事故2件について認識実験を行った。

[事象1] O^{1-1} (図6(a))

00011333000877700000

[事象1] O^{1-2} (図6(b))

00001231000777700000

[事象2] O^2

00000122110787000000

[事象3] O^3

00112333333332211000

HMMは事象1,2,3のそれぞれについてトレーニングされ、パラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が得られる。HMMのトレーニングには、一般に多くの学習データを必要とする。実際の事故によるデータが少ないため、実際のデータに適当な外乱を与えて学習データと作成した。この実験では3種類のHMMに、それぞれ40の学習データを与えてトレーニングした。また、これらの学習データのいくつかは、簡易シミュレーションにより作成している。

表1は、上記のようにトレーニングされたモデルパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を用いて、観測シーケンス $O^{1-1}, O^{1-2}, O^2, O^3$ を認識した実験結果を示している。結果は $P(O^i|\lambda_j)$ の指数で表されているので、全ての数値は負であり、その絶対が小さいほど良い適合度を示している。 O^{1-1}, O^{1-2} は異なる交差点における事故データであるが、表1からわかるように正しく認識されている。また、タンデムや通過も正しく分類されている。

	λ_1	λ_2	λ_3
O^{1-1}	-13.7	-53.3	-98.2
O^{1-2}	-13.2	-28.4	-87.9
O^2	-24.1	-15.1	-51.5
O^3	-37.8	-126.0	-9.5

O: 認識すべき観測列 λ : 学習されたモデル

表1: 隠れマルコフモデルによる認識結果

6 HMMによる事故の状態観察

もともと、HMMの状態*i*には明示的な意味がないが、実際には学習した結果で出現確率の高い部分観測列が一つの状態に割り当てられることになる。その様

子を観察することにより、事故のメカニズムの理解および将来的な事故の予測手法の開発の手がかりになることが考えられる。

そこで、Baum-Welch algorithmで学習されたモデルをもとに、各状態遷移における出力確率分布を事故とタンデムの場合とで比較する。まず、事故の認識実験においてHMMの状態数を条件振りした認識結果を図7に示す。縦軸は、事故について40の学習データをもとに学習モデル用いて、事故とタンデムについての40の学習データを認識させた結果である。横軸はHMMの状態数、縦軸は表1の要領で求めた数値の絶対値を40データについて和をとった数値である。結果は、状態数が6,7以上の場合で事故とタンデムを良く区別できていることが見られる。したがって、状態数が6,7のときに事故の時系列状態を良く現していると考えられる。

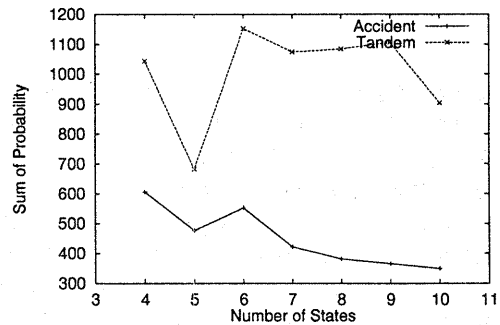


図7: Number of State vs. Probability

図8は、状態数7のHMMについてBaum-Welch algorithmで学習されたパラメータを表している。このグラフで、確率の高くなっている箇所が特徴的な状態であり、以下のように解釈される。

1. 無干渉 (State 0,1): 観測量 0
2. 接近 (State 2): 観測量 1,2
3. 急接近 (State 3): 観測量 3
4. 衝突の瞬間 (State 4): 観測量 0
5. 反動 (State 5): 観測量 7,8
6. 停止 (State 6): 観測量 0

現状では本当の事故の件数が少ないために、目視で確認できることに比べてあまり進歩性がない様に見える。しかし、今後事故データが増えていけば、複雑な事

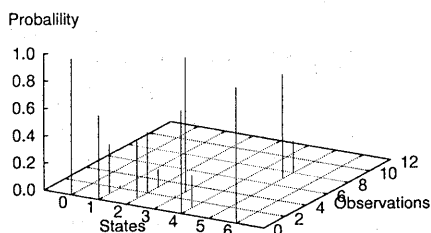


図 8: Probability vs. States and Observations

故シーケンスの場合でも、その特徴を解析するのに役立つと思われる。

7 まとめ

我々は、交差点において、事故を中心とする様々な交通事象を把握する交通監視システムのために、駿河台下交差点にカメラを設置している。

我々の開発した事故検出手法は、2台の車を追跡した結果の動きベクトルの差分を量子化し、時系列化した観測列をHMMにより認識するものである。本手法を実際の事故映像に適用したところ、異なる交差点における事故データを正しく認識され、本手法が交差点形状などの地理的要因に依存しないことが確認された。

今後は、さらに事故例を増やし、様々な事故の検出を可能としたい。そして最終的には、様々な事故のシーケンスを解析することにより、事故の予測へと発展させていきたい。

8 謝辞

貴重な事故映像を提供していただいたAHS組合に感謝いたします。また、駿河台下交差点のカメラ設置にご協力いただいたヴィクトリア様に感謝いたします。最後に、交差点の選定、カメラの設置など様々な場面でご協力いただいた警察庁の杉本様に感謝いたします。

参考文献

[1] Ramesh Gangisetty, "Advanced Traffic Management System on I-476 in Pennsylvania," Proc. of IEEE ITSCConf '97.

- [2] M. Wener and W. von Seelen, "Using Order Statistics for Object Tracking," Proc. of IEEE ITSCConf '97.
- [3] Parag H. Batavia, Dean A. Pomerleau and Cakles E. Thrope, "Overtaking Vehicle Detection Using Implicit Optical Flow," Proc. of IEEE ITSCConf '97.
- [4] Juan Carlos Rojas and Jill D. Crisman, "Vehicle Detection In Color Images," Proc. of IEEE ITSCConf '97.
- [5] Nan Zeng and Jill D. Crisman, "Vehicle Matching Using Color," Proc. of IEEE ITSCConf '97.
- [6] Andrew H. S. Lai and Nelson H. C. Yung, "A Video-Based System Methodology for Detecting Red Light Runners," Proc. of IAPR Workshop on MVA '98, pp23-26.
- [7] W.E.L. Grimson, C. Stauffer, R. Romano and L. Lee, "Using adaptive tracking to classify and monitor activities in a site," Proc. of Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Jan 1998, pp22-29.
- [8] V. Kettner and M. Brand, "Minimum-entropy models of scene activity," Proc. of CVPR 1999, pp281-286
- [9] Junji Yamato, Jun Ohya and Kenichiro Ishii, "Recognizing Human Action in Time-Sequential Images using Hidden Markov Model," Proc. of CVPR 1992, pp379-385.
- [10] Lawrence R. Rabiner, "A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition," Proc. of the IEEE, Vol.77, No.2, Feb 1989, pp257-286.
- [11] S.E. Levinson, L.R. Rabiner and M.M. Sondhi, "An Introduction to the Application of the Theory of Probabilistic Functions of a Markov Process to Automatic Speech Recognition", Bell Syst. Tech. J. Vol.62 No.4, 1983, pp1035-1074.