

## パラメトリック数理模型の形状評価手法の開発

増田 智仁  
東京大学 情報理工学系研究科

倉爪 亮  
科学技術振興事業団

池水 美都  
東京大学 文学部美術史学専修

西野 嘉章  
東京大学 総合研究博物館

池内 克史  
東京大学 生産技術研究所

### 概要

Kuen 曲面や Dini 曲面など数種類のパラメタで定義される曲面を模して、およそ百年前にドイツで教育目的に作られた、石膏模型の三次元データをレーザースキャナから取得し、その設計パラメタの推定と理想モデル—計測形状間の位置合わせを同時に行う手法を開発した。本論文では、当時の工作技術水準を知る一つの手がかりとして、この手法を用いて数理模型の工作精度を評価した経緯を報告する。

キーワード: 同時位置合わせ, パラメトリック曲面, 誤差評価

## Simultaneous Parameter Estimation and Error Detection of Parametric Mathematical Model by using Simultaneous Alignment

Tomohito Masuda  
Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

Ryo Kurazume  
Japan Science and Technology Corporation

Mito Ikemizu  
Department of History of Art, Faculty of Letters, University of Tokyo

Yoshiaki Nishino  
The University Museum, University of Tokyo

Katsushi Ikeuchi  
Institute of Industrial Science, University of Tokyo

### Abstract

We developed the simultaneous parameter estimation and registration method between 3D ideal data and 3D measured data for these parametric mathematical models. Parametric mathematical models, stored at the Graduate school of mathematical sciences at the University of Tokyo, were plaster models which were made an about hundred years ago, and were used in education as actual representation of parametric surfaces defined by some parameters, such as Kuen surface, Dini surface, and so on to evaluate the manufacturing accuracy of these models and manufacturing skill level of those days.

**Keywords:** simultaenous alignment, parametric surface, error detection

# 1 はじめに

東京大学大学院数理科学研究科には、数種類のパラメータを含む数式で決定される曲面を三次元の物理モデルとして表現した、石膏製の数理模型が数百点収蔵されている。これらの数理模型は、19世紀末から20世紀初頭にドイツで教材目的で製作されたものであり、数値計算に基づいて精密に製作されていることが知られているが、具体的な製作手順に関しては文献も少なく、詳細は不明とされている。

我々は当時の工作水準を知る一つの手がかりとして、これらの模型の三次元データをレーザー計測し、製作精度を調べを試みた。しかしこの数理模型に対応する数式のパラメータは未知であるため、本研究では、数理模型から数式の最尤パラメータを推定し、そのパラメータのもとで数理模型の製作精度を調査することにした。

レーザー計測された三次元形状データと数式から導かれる理想形状の差を比較するには、まず両者の三次元空間内での位置と姿勢を正確に合わせる必要がある。しかし数理模型の多くは、三次元形状を決定するパラメータが未知であるため、これを推定するためには通常の平行・回転以外にパラメータの変化を加えた位置合わせ手法を開発する必要がある。

本論文では、我々の研究室でこれまでに提案された同時位置合わせ手法 [2] を拡張することによって、パラメータを動的に変えて、数式から計算される三次元の理想形状データを変化させながら、同時に、対応する数理模型の計測形状データを平行・回転移動することにより形状評価を行うパラメータ同時推定位置合わせの手法を提案する。

また、開発した手法を用い、実際に数種類の数理模型に対し、最終的に形状マッチングがとれた状態で、理想形状と計測形状の誤差を評価できることを示す。

以降、2章では同時位置合わせアルゴリズムを説明し、3章ではこのアルゴリズムの拡張としてパラメータを同時に推定する手法について述べる。4章では実験で用いた数理模型の形状評価について説明し、三次元データの取得方法と実験結果を示す。また、最後にこのアルゴリズムの問題点について言及し、全体の結論を述べてまとめとする。

## 2 同時位置合わせ

### 2.1 距離画像間の位置合わせ戦略と提案手法

我々がこれまでに開発した位置合わせ手法は、以下の特徴を有する。

位置合わせ順序 同時実行

対応要素 三次元点

誤差尺度 点と点間の三次元距離

位置合わせ順序

複数枚の距離画像の位置合わせ手法には逐次実行と同時実行の二つが考えられる。逐次実行とは、一度の位置合わせで対応する2枚の距離画像を使って部分的に位置合わせをし、これを繰り返して全体の位置合わせをする方法である [3]。この手法はCPU資源が少なくすむが、全体の位置合わせが完了した際に誤差が局所的に蓄積される可能性がある (図1参照)。この誤差は、部分位置合わせの際の誤差が、その後の部分位置合わせで伝播していくことにより発生する。より高精度な位置合わせを行うためにはこれらの誤差を理論的に分散させる必要があるため、最終的な位置合わせは同時に行うことが必要である。

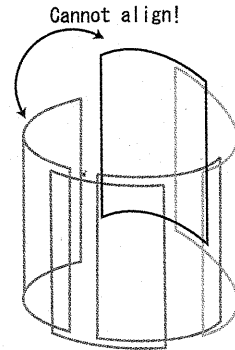


Figure 1: 誤差蓄積の例

#### 対応要素

距離画像の位置合わせは、誤差関数を繰り返し計算によって最小化することにより行うのが一般的である [7] が、この誤差関数の対象として、特徴点を用いる方法と距離画像の三次元点を用いる方法がある。特徴点を用いる位置合わせは、三次元点から何らかの特徴量を計算し、各特徴点間の距離を最小化することで行われる [4]。この方法は、各距離画像から計算される全ての特徴点に一对一対応が得られることを前提とし、得られた特徴点の対応を変化させずに距離の最小化を行うため、常に正しい対応が得られない場合には正確な位置合わせができない。一方、三次元点を用いる場合は、位置合わせが収束する各段階に応じて点の対応関係を動的に変化させていくので、よりロバストな位置合わせが可能である。

#### 誤差尺度

各対応点の誤差尺度として、点と面の距離あるいは点と点の距離を用いる方法がある。点と面の距離を使用する方法として、点と、それに対応する点の接平面間の距離を用いる手法が提案されている [5][6]。この手法は、物体表面の形状に関する情報が、接平面の向きとして誤差尺度に含まれるため、収束が早く局所解に陥りにくいが、点と点の距離を計算する場合に比べて計算量が多くなる。また、レーザーレンジセンサーから得られる距離画像データには誤差があるため、誤差を含む点群の座標からの面の法線を計算した場合、それにはさらに誤差を

含む可能性がある。

以上の考察から我々は、三次元点を対応要素とし、対応点間の距離を誤差尺度として、同時位置合わせを行う手法を開発した。

## 2.2 アルゴリズム

同時位置合わせのアルゴリズムを、以下に示す。

Input : 距離画像群

Output : 位置合わせされた距離画像群

- 
1. 全ての距離画像に対し kd-tree を構築
  2. 一つの距離画像を選択し、平行・回転移動を求め、他の全ての距離画像に対して各対応点間の距離の総和を最小化する
  3. 最小化する移動量を記録したあと元の位置に戻し 2へ
  4. 全ての距離画像を記録した移動量にしたがって、実際に移動させる
- 

### 2.2.1 kd-tree を用いた対応点探索 (アルゴリズム 1)

選択された距離画像の各点に対して、それ以外の各距離画像との対応点を探索するとき、もっとも総当たりのな方法でのこの対応点探索を行った場合の計算量は、 $n_i$  を  $i$  番目の距離画像中の点数とすると、

$$\sum_i (n_i \times \sum_{j \neq i} n_j)$$

と非常に大きくなり、探索点数が多い場合には非現実的である。そこで我々は kd-tree を用いて効率的に対応点探索を行うことにした [8]。

kd-tree は二分探索の  $k$  次元空間への一般化であり、分散が最大となる次元を選択し、その次元での中間値でデータを分割していく。これを、各葉ノードが保持するデータ数が閾値以下になるまで繰り返す。 $N$  個の点数を含む距離画像の kd-tree の深さは  $\log N$  であるから、kd-tree を使った場合の近傍点探索の計算量は、

$$\sum_i (n_i \times \sum_{j \neq i} \log n_j)$$

と改善される。

### 2.2.2 誤差関数の最小化 (アルゴリズム 2)

選択された距離画像は、それ以外の距離画像との対応点間の距離が最小になるように最適な平行・回転移動が計算される。対応点ペア集合  $(x_i, y_i) (i = 0, \dots, N-1)$  が与え

られたときの誤差関数は、回転行列  $\mathbf{R}$  と三次元ベクトル  $\mathbf{t}$  を用いて以下のように表される。

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \sum_i \|\mathbf{R}x_i + \mathbf{t} - y_i\|$$

回転行列  $\mathbf{R}$  の代わりに四元数を使って回転量を表すと移動量  $\mathbf{p}$  は、

$$\mathbf{p} = [\mathbf{t}^T \mathbf{q}^T]^T, \mathbf{q} = [uvw]s^T$$

となる。

この誤差関数  $f$  を最小化する平行・回転運動を求め、この 7 変数に対し共役勾配法を用いて勾配を決め、黄金分割法による囲い込みで移動量を決定する。

## 3 パラメタ同時推定位置あわせ

以上の同時位置合わせに追加して、数理模型のパラメタを推定するアルゴリズムを実装した。これは上で述べた平行・回転移動の 7 変数による誤差関数の最小化に数式のパラメタを加え、これらを同時に共役勾配法と黄金分割法を用いて誤差関数を最小化するパラメタを求めるものである。以下に拡張したパラメタ同時推定位置あわせのアルゴリズムを示す。

Input : 距離画像群、

初期パラメタに基づき計算された理想三次元データ

Output : 位置合わせされた距離画像、数式のパラメタ

- 
1. 全ての距離画像に対し kd-tree を構築
  2. 一つの距離画像を選択し、
    - 2' . 計測データなら、平行・回転移動を求め、他の全ての距離画像に対し各対応点間の距離の総和を最小化する
    - 2'' . 理想データなら、平行・回転移動をせずにパラメタを共役勾配法と黄金分割法を用いて他の全ての距離画像に対し各対応点間の距離の総和を最小化する
  3. 最小化する移動量とパラメタを記録したあと元の位置に戻し 2へ
  4. 全ての距離画像を
    - 4' . 計測データは記録した移動量にしたがって、実際に移動させる
    - 4'' . 理想データは記録したパラメタにしたがって、形状を再構成する
- 

同時位置あわせと異なる部分はアルゴリズム 2、4 で、計測された距離画像は他の距離画像に対して平行・回転移動をすることによって誤差関数を最小化するのに対し、理想データは平行・回転移動は行わずにパラメタのみを変化させることで誤差関数を最小化している。これは、理想データはパラメタを変えるごとに三次元点を再計算しており、この後にさらに平行・回転移動による再計算を行うと、計算量が大きくなってしまいうためである。

## 4 実験

### 4.1 形状評価の対象にした数式

今回の実験では、以下の4つ数式を形状評価の対象にした。

#### 4.1.1 回転面として得られる円錐形の負の定曲率曲面

$$X(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \sin u, \psi(v))$$

ただし、

$$\phi(v) = b \cosh\left(\frac{v}{a}\right),$$

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sinh^{-2}\left(\frac{t}{a}\right)} dt,$$

$$0 < b \leq a, 0 \leq u \leq 2\pi,$$

$$-a \sinh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \leq v \leq a \sinh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

パラメタ  $a, b$ , スケール

この曲面は、懸垂線 (catenary) を回転させることによって得られる (図2)。

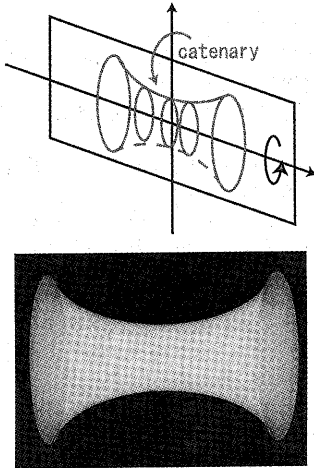


Figure 2: 懸垂線の回転面

#### 4.1.2 Dini 曲面

$$X(s, t) = \left( \frac{\cos t}{\cosh s}, \frac{\sin t}{\cosh s}, s - \tanh s + bt \right),$$

$$|s| \leq a, 0 \leq t \leq \theta$$

パラメタ  $a, b, \theta$ , スケール

この曲面は、牽引曲線 (tractrix) を螺旋状に回転させて得られる (図3)。

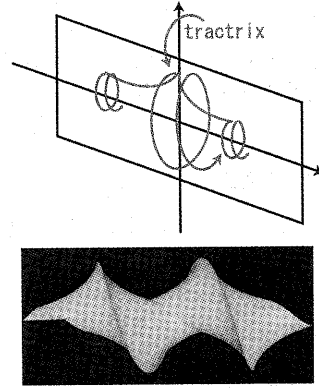


Figure 3: 牽引曲線の螺旋状回転面

#### 4.1.3 Kuen 曲面

$$X(u, v) = \left( \frac{2(\cos u + u \sin u) \sin v}{1 + u^2 \sin^2 v}, \right.$$

$$\left. \frac{2(\sin u - u \cos u) \sin v}{1 + u^2 \sin^2 v}, \right.$$

$$\left. \log\left(\tan \frac{v}{2}\right) + \frac{2 \cos v}{1 + u^2 \sin^2 v} \right),$$

$$0 \leq v \leq \pi - 2\theta$$

パラメタ  $u, \theta$ , スケール

この曲面は、面の向きが一部逆転しているという特徴をもつ (図4)。

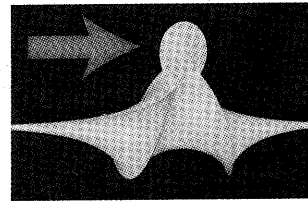


Figure 4: Kuen 曲面 (矢印の部分は、それ以外の部分の面の向きと逆)

以上3つの曲面は、ガウス曲率が全ての場所で負の一定値を取る曲面である。

#### 4.1.4 ヤコビの第1種楕円積分の逆関数

$$u = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

の逆関数である振動関数

$$\phi = am(u, k)$$

$$|u| \leq a$$

パラメタ  $k, \phi$ , スケール

この曲面は、ヤコビの第1種楕円積分の式の逆関数である。この逆関数は、 $k=0$ のとき直線、 $|k| < 1$ のとき単調増加関数、 $|k| > 1$ の範囲では振動関数となる(図5)。以上を統合すると、図6のような曲面になる。

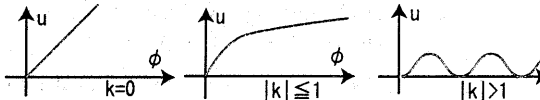


Figure 5: 楕円積分の逆関数

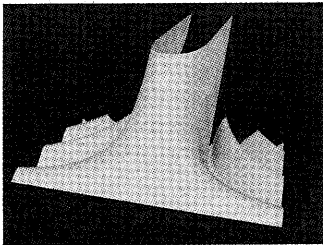


Figure 6: 楕円積分の逆関数

## 4.2 数理模型の三次元データの取得

今回数理模型の計測で使用したレーザーレンジセンサーは、MINOLTA製のVIVID900(分解能約0.2mm、奥行き誤差0.1mm)で、スリット光を用いた光切断法により三次元距離画像を得るものである。

実験では複数視点から得られた複数の部分距離画像を同時位置合わせした後に、数式から計算された理想データとの間でパラメタ同時推定位置合わせを行い、数理模型の形状誤差を評価した。

## 4.3 形状評価と実験結果

### 4.3.1 回転面とし得られる円錐形の負の定曲率曲面

推定されたパラメタ

$$a = 5.68 \times 10^{-2}, \quad b = 2.37 \times 10^{-2}, \quad \text{スケール } 9.96 \times 10^{-1} \text{ 倍}$$

平均誤差  $7.76 \times 10^{-1} \text{ mm}$  2mm以上の誤差 4.02%

### 4.3.2 Dini 曲面

推定されたパラメタ

$$a = 1.94, \quad b = 3.14 \times 10^{-1}, \quad \theta = 5.11 \times \pi, \quad \text{スケール } 5.96 \times 10^{-2} \text{ 倍}$$

平均誤差 1.07mm 2mm以上の誤差 7.53%

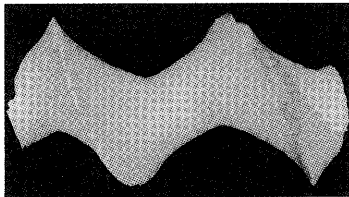


Figure 8: Dini 曲面の誤差検出

### 4.3.3 Kuen 曲面

推定されたパラメタ

$$u = 4.60, \quad \theta = 5.18 \times 10^{-5}, \quad \text{スケール } 4.92 \times 10^{-2} \text{ 倍}$$

平均誤差 1.25mm 2mm以上の誤差  $1.13 \times 10\%$

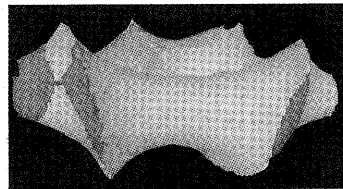


Figure 9: Kuen 曲面の誤差検出

### 4.3.4 ヤコビの第1種楕円積分の逆関数である振動関数

推定されたパラメタ

$$k = 4.11, \quad \phi = 3.67, \quad \text{スケール } 4.22 \times 10^{-2} \text{ 倍 平均誤差}$$

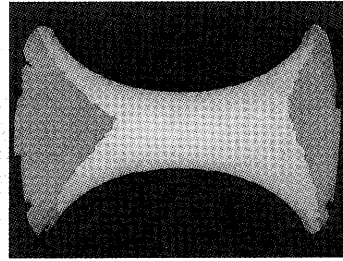


Figure 7: 懸垂線の回転面の誤差検出

差 1.25mm 2mm 以上の誤差 2.13 × 10%  
 $|k| \leq 1$  の幅が大きいことが分かる。 $|k| > 1$  の部分を独

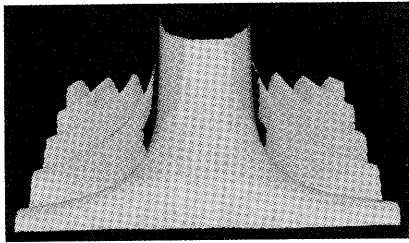


Figure 10: 振動関数の誤差検出

立に調べたところ、2mm 以上の誤差は 4.82% であった。



Figure 11: 振動関数 ( $|k| > 1$  の部分) の誤差検出

## 5 まとめ

本論文では、約 100 年前に東京大学数理科学研究科に保管されている四種類のパラメトリック数理模型のレーザー計測されたデータから、数理模型の製作パラメータを推定し、当時の製作精度を知る一つの手がかりとしてこれらの誤差量を調査した。そこで、我々の研究室で提案された同時位置合わせ手法に追加して、パラメトリック数式のパラメータを、共役勾配法と黄金分割による囲い込み手法を用いて誤差関数を最小化する手法を開発した。また、数理模型の計測形状データと理想形状データの位置合わせが完了した状態で比較し、誤差の検出を行った。

本手法では、同時位置合わせする理想形状データの初期パラメータに敏感であり、例えばスケールパラメータが計測形状よりも非常に小さく設定されたときなど、対応点

探索において全ての理想形状のデータ点が計測されたデータのごく一部分としか対応せず、縮退してしまうことがある。このようなことを防ぐためにはデータ間の対応点探索に何らかの制約を設ける必要があり、今後は初期パラメータによらないロバストなアルゴリズムを開発する予定である。

## References

- [1] Taku Nishikawa, Ko Nishino, Yoichi Sato, and Katsushi Ikeuchi, "Constructing a 3D Model Using a High Resolution Range Sensor", Proceedings of the Virtual Reality Society of Japan Fourth Annual Conference, pp199-202, September, 1999.
- [2] K. Nishino and K. Ikeuchi "Robust Simultaneous Registration of Multiple Range Images", Proceedings of the 5th Asian Conference on Computer Vision, vol.2, No.4, pp.454-461, January, 2002.
- [3] G.Turk and M. Levoy, "Zippered polygon meshes from range images", Proceedings of SIGGRAPH 94, pp.311-318, July, 1994.
- [4] A. Johnson and M.Herbert, "Surface registration by matching oriented points", Proceedings of International Conference on Recent Advances in 3-D Digital Imaging and Modeling, pp.121-128, May, 1997.
- [5] Y.Chen and G.Medioni, "Object modeling by registration of multiple range images", Image and Vision Computing, vol.10, No.3, pp.145-155, April, 1992.
- [6] P.Neugebauer, "Geometrical cloning of 3D objects via simultaneous registration of multiple range images", Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Application, pp.130-139, March, 1997.
- [7] P.J.Besl and N.D.McKay, "A method for registration of 3-D shapes", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.14, No.2, pp.239-256, February, 1992.
- [8] J. H. Friedman, J. L. Bentley and R. A. Finkel: "An Algorithm for Finding Best Matches in Logarithmic Expected Time" ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 3, No. 3, pp.209-226, September 1977.