2003－CVIM－139　(5)
2003／7／3

くりこみ法その後：波紋と発展

金谷 健一

岡山大学工学部情報工学科

筆者がコンピュータビジョンの幾何学的問題の最適計算法として「くりこみ法」を発表して10年経った機会に，その歴史的経過，その後の発展および最新の結果をまとめる．まず「幾何学的当てはめ」の一般論を述べ，次に拘束条件が線形の場合の「最小二乗法」,「FNS法」,「HEIV法」,「くりこみ法」を説明し，それらの背景や比較を述べる．そして関連する「最適補正」の原理,「平衡法（白色化法）」，および「セミパラメトリックモデル」に触れる．

After Renormalization: Influence and Progress

Kenichi Kanatani

Department of Information Technology, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

On the occasion of the tenth year after the author first proposed the "renormalization method" for statistical optimization of geometric computations for computer vision, this paper reviews its history and recent developments. First, we describe the general framework of "geometric fitting" . Then, we describe, as numerical schemes for linear constraints, the "least-squares method", the "FNS method", the "HEIV method", and the "renormalization method" along with their backgrounds and comparisons. We also comment on the principle of "optimal correction", the "equilibration (or whitening) method" and the "semi-parametric model".

1. まえがき

1988年のある日，私は英国Oxford大学から一通のメールを受け取った．Oxfordは元来文系の大学で少数の理系はあったが，工学系はなかった．そこに米国から戻ったMichael Bradyがビジョンとロボット工学を中心とする学科を立ち上げた．当初は当時流行の画像処理（低レベルビジョン）や形状認識（一般化円筒モデルなど）を課題としていたが，元物理学者のAndrew Zissermanや米国GEからの客員研究員のJoe Mundyが中心となって，幾何学理論に基づくビジョン研究を始めようとしていた．そして，その手始めとして私が当時出版予定の著書Group-Theoretical Methods in Image Understanding (1990年にSpringerから出版[10])を勉強したいから，原稿を送ってくれというものであった．

この本は私が1985–1986年に米国Maryland大学に滞在中に研究した内容が中心で，種々の数学理論をコンピュータビジョンに応用したものである．その中の画像の変換を"Lie群"とみなして，その"既約表現"から不変量を導く方法論がOxfordの人々に注目された．当時の私の研究は批判され，著名な研究者が，コンピュータビジョンは実用的であるべきだという論説を盛んに発表し[1]，日本でも同様であった．このため，私の研究に関心を持つOxfordからの要請に非常に驚いた．もちろんすぐに原稿を送った．

その後1991年に私自身がOxfordに招聘され4ヶ月間滞在し，幾何学的計算に関する著書を執筆した（1993年にOxford大学出版局から出版[11]）．しかし，彼らは不変量のみに関心があり，ヨーロッパの研究者を組織してアイスランドで不変量に関するワークショップを計画していた(後にその成果が出版された[28])．一方，当時私は誤差のあるデータからの計算の精度向上に関心があり，統計的最適化の研究を始めていた．彼らの誤差のない代数的な解析と私の誤差のある統計的な解析とは"直交"し，議論がすれ違うことが多かった．

その後Oxfordグループの不変量の理論は射影幾何学の代数理論に発展し，フランスやスエーデンやベルギーに広がり，今日のヨーロッパの幾何学的なビジョン研究となった．一方，私の統計的方法は批判され，私の論文のほとんどが不採録になった．日本では当時，分散・協調ビジョンが提唱され，やはり私の研究が批判された．私がその成果をまとめた著書Statistical Optimization in Geometric Computation: Theory and PracticeをOxford大学出版局から出版しようとしたところ，Oxford大学のグループの査読で却下され，1996年にようやくElsevierから出版された[2][15]．

しかし，次第に私の研究が世界中で認められ，特に幾何学的当てはめ問題に対して提唱した「くりこみ法」に関心が集まり，その解析や改良や世界各国で発表されている．くりこみ法は今日では画像モザイク生成[20]や画像からの3次元復元[18]や画像間の自動対応づけ処理[21]などの広範囲の応用に不可欠になっている．

†700-8530 岡山市津島中 3–1–1, (086)251-8173
E-mail: kanatani@suri.it.okayama-u.ac.jp

[1] 一説には，当時は「コンピュータビジョンはいかにあるべきか」の議論や各種の「○○ビジョン」の方法論(paradigm)が具体的な研究成果よりも多かったとか．

[2] この出版社から出したことはビジョン研究にとって不幸であった．まず印税がほとんど0にもかかわらず設定価格が高く，多くの研究者から不満が寄せられた．そして強い抗議にもかかわらず再版されず，現在絶版である．

本稿は，筆者が「くりこみ法」を発表してから 10 年経った機会に，その歴史的経過，その後の発展，および最新の結果をまとめ，この研究の更なる発展を期待するものである[3]．

2. 幾何学的当てはめ

2.1 幾何学的モデル

N 個の m 次元データベクトル $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_N$ は，それらの誤差がないときの値 $\bar{\boldsymbol{x}}_1$, ..., $\bar{\boldsymbol{x}}_N$ が未知の p 次元パラメータベクトル $\boldsymbol{u}$ をもつ r 個の拘束条件

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{u}) = 0, \qquad k = 1, ..., r \tag{1}$$

を満たすとする．これを (**幾何学的**) **モデル**と呼ぶ．データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ の定義される空間 $\mathcal{X}$ を**データ空間**，パラメータ $\boldsymbol{u}$ の定義される空間 $\mathcal{U}$ を**パラメータ空間**，r を拘束条件の**ランク**と呼ぶ．r 個の方程式 $F^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0$, $k = 1$, ..., r は $\boldsymbol{x}$ の方程式として互いに代数的に独立で，データ空間 $\mathcal{X}$ に「余次元」r の (代数) 多様体 $\mathcal{S}$ を定義するとする．

問題は誤差のあるデータ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ からパラメータ $\boldsymbol{u}$ を推定することである．これはデータ空間の N 個の点に多様体 $\mathcal{S}$ を当てはめる問題と解釈できる．この問題を**幾何学的当てはめ**と呼ぶ．

典型的な例は画像上の点に直線や曲線を当てはめる問題である．その場合は各 $\boldsymbol{x}_\alpha$ は画像上の点の位置を表すベクトルであり，式 (1) が当てはめるべき直線または曲線の方程式となる．しかし，複数の画像の場合にも拡張できる．

例えば第 1 画像上の点 (x_α, y_α) が第 2 画像上の点 (x'_α, y'_α) に対応すれば，その対応が 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha)$ で表せる．式 (1) を**エピ極線方程式**とみなせば，パラメータ $\boldsymbol{u}$ は**基礎行列**の要素を並べたベクトルである [6]．このときは $r = 1$ である．シーンが遠景または平面のときは (1) を**射影変換**とみなせる．このときは $r = 2$ であり，$\boldsymbol{u}$ は射影変換行列の要素をならべたベクトルである [15]．

2.2 最尤推定

データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ の誤差[4] の挙動を記述する共分散行列を

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \varepsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{2}$$

とする．ε は誤差の絶対量を表す定数であり，**ノイズレベル**と呼ぶ．$V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ は誤差のデータや方向への依存を定性的に表すものであり，**正規化共分散行列**と呼ぶ．これは既知とする[5]．

誤差がデータごとに独立で正規分布に従うとすると，$\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\}$, $\boldsymbol{u}$ の**最尤推定**は拘束条件 (1) のもとで**マハラノビス距離**の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}_\alpha - \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha - \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)) \tag{3}$$

を最小にするように $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\}, \boldsymbol{u}$ を推定することである[6]．

以下，データの誤差は小さいと仮定する．線形近似を用いてラグランジュ乗数により拘束条件 (1) を消去すると式 (3) は次のように書ける [15]．

$$J(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{r} W_\alpha^{(kl)} F^{(k)}(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{u}) F^{(l)}(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{u}) \tag{4}$$

$W_\alpha^{(kl)}$ は，$(\nabla_{\mathbf{x}} F_\alpha^{(k)}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \nabla_{\mathbf{x}} F_\alpha^{(l)})$ を (kl) 要素とする $r \times r$ 行列の逆行列の (kl) 要素である．これを次のように表記する．

$$\left(W_\alpha^{(kl)}\right) = \left((\nabla_{\mathbf{x}} F_\alpha^{(k)}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \nabla_{\mathbf{x}} F_\alpha^{(l)})\right)^{-1}. \tag{5}$$

ただし $\nabla_{\mathbf{x}} F^{(k)}$ は関数 $F^{(k)}$ の $\boldsymbol{x}$ に関する勾配ベクトルであり，添え字の α は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\alpha$ を代入することを示す[7]．

2.3 精度の評価

上記の最尤推定の解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の精度は次の共分散行列で表される [15]．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = \varepsilon^2 \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})^{-1} + O(\varepsilon^4) \tag{6}$$

ただし次のように置いた．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{r} W_\alpha^{(kl)} \nabla_{\mathbf{u}} F_\alpha^{(k)} \nabla_{\mathbf{u}} F_\alpha^{(k)\top} \tag{7}$$

ここに $\nabla_{\mathbf{u}} F^{(k)}$ は関数 $F^{(k)}$ の $\boldsymbol{u}$ に関する勾配ベクトルであり，添え字 α は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\alpha$ を代入することを示す．式 (6) の右辺第 1 項はどのような推定を行なってもこれ以上減らせないので [15]，$O(\varepsilon^4)$ の項を除けば最尤推定によってあらゆる推定の中の最大精度が得られる[8]．

[3] 同じく私の提唱した「モデル選択」[16] についても同様な数奇な経過があるが，本稿では触れない．

[4] この誤差の根元を追求すると微妙な問題に行き当たる [17]．

[5] $\boldsymbol{x}_\alpha$ が画像上の特徴点位置であれば画像の輝度分布から推定できるが，特徴点を人手や特徴抽出作用素で抽出する場合は等方性を仮定してもほとんどの場合問題ない [19]．

[6] 以下の議論はデータ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ が何らかの制約を受ける（例えば単位ベクトルに正規化される）場合にも，逆行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]^{-1}$ を（ムーア・ペンローズの）一般逆行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]^-$ に置き換えれば成り立つ [15]．

[7] 式 (49) の r 個の式が冗長で，r' $(< r)$ 個だけが独立な場合は，式 (5) の逆行列をランク r' の（標準形において大きい r' 個以外の固有値を 0 として計算する）一般逆行列に置き換えればよい [15]．

[8] これは p 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ が何らかの制約を受ける（例えば

3. 線形当てはめ

3.1 拘束条件の線形化

ビジョンによく現れる多くの問題では，拘束条件 (1) を次の形に書くことができる．

$$(\boldsymbol{\xi}(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha), \boldsymbol{u}) = 0. \tag{8}$$

ここに $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ は m 次元ベクトルから p 次元ベクトルへの（一般に非線形の）写像である．$\boldsymbol{u}$ には定数倍の不定性があるので $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ と正規化する．

【例 1】 平面上の N 点 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に２次曲線（円，楕円，放物線，双曲線，およびそれらの退化）を当てはめる問題を考える．これは N 点の真の位置を $\{(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)\}$ とし，それらが満たすべき式

$$A\bar{x}_\alpha^2 + 2B\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha + C\bar{y}_\alpha^2 + 2(D\bar{x}_\alpha + E\bar{y}_\alpha) + F = 0 \tag{9}$$

の係数 A, B, ..., D を誤差のあるデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定する問題とみなせる．ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(x, y) &= (x^2 \;\; 2xy \;\; y^2 \;\; 2x \;\; 2y \;\; 1)^\top \\ \boldsymbol{u} &= (A \;\; B \;\; C \;\; D \;\; E \;\; F)^\top. \end{aligned} \tag{10}$$

と置けば，式 (9) は式 (8) の形になる．これにより，データ空間 $\mathcal{X}$ が 6 次元空間 $\mathcal{R}^6$ の 2 次元（代数）多様体として埋め込まれ，パラメータ空間 $\mathcal{U}$ は $\mathcal{R}^6$ の原点を中心とする 5 次元単位球面 S^5 となる．

【例 2】 同一シーンを異なる位置から撮影した２画像から N 個の特徴点を抽出し，第１画像の点 (x_α, y_α) が第２画像の点 (x'_α, y'_α) に対応するとする．カメラの撮像が透視変換であれば，ある特異行列 $\boldsymbol{F}$ があって，真の特徴点位置 $\{(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)\}$, $\{(\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)\}$ が

$$\left(\begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha \\ \bar{y}_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} \begin{pmatrix} \bar{x}'_\alpha \\ \bar{y}'_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0. \tag{11}$$

を満たす．これを**エピ極線方程式**，$\boldsymbol{F}$ を**基礎行列**と呼ぶ [6]．画像からの３次元復元には上式を満たす基礎行列 $\boldsymbol{F}$ を誤差のあるデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}$ から推定する必要がある．ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(x, y, x', y') &= (xx' \;\; xy' \;\; x \;\; yx' \;\; yy' \;\; y \;\; x' \;\; y' \;\; 1)^\top \\ \boldsymbol{u} &= (F_{11} \;\; F_{12} \;\; F_{13} \;\; F_{21} \;\; F_{22} \;\; F_{23} \;\; F_{31} \;\; F_{32} \;\; F_{33} \;\;)^\top \end{aligned} \tag{12}$$

と置くと，式 (11) は式 (8) の形になる．これにより，データ空間 $\mathcal{X}$ が 9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の 4 次元（代数）多様体として埋め込まれ，パラメータ空間 $\mathcal{U}$ は $\mathcal{R}^9$ の $\|\boldsymbol{F}\| = 1$, $\det \boldsymbol{F} = 0$ で定義される 7 次元（代数）多様体となる[9]．

線形拘束条件 (8) に対しては，式 (4) の関数 $J(\boldsymbol{u})$ は次の形になる．

$$J(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{13}$$

ただし $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ は $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_\alpha)$ の正規化共分散行列（ノイズレベル ε^2 を 1 に正規化した共分散行列）である．以下 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_\alpha)$ を $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ と略記する．データの誤差は小さいと仮定しているから，$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ はデータの正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ から線形近似によって次のように計算できる．

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\alpha}^\top V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\alpha} \tag{14}$$

ただし $\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}$ は $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ の $m \times p$ ヤコビ行列である．

$$\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \partial\xi_1/\partial x_1 & \cdots & \partial\xi_p/\partial x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial\xi_1/\partial x_m & \cdots & \partial\xi_p/\partial x_m \end{pmatrix} \tag{15}$$

式 (6), (7) より，式 (13) を最小にする最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列は次のように書ける．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = \varepsilon^2 \Big(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \Big)^- + O(\varepsilon^4) \tag{16}$$

ただし，上添え字 $-$ は（ムーア・ペンローズの）一般逆行列であり，$\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}$ は $\mathcal{R}^p$ において，点 $\boldsymbol{u}$ におけるパラメータ空間 $\mathcal{U}$ の接空間 $T_{\mathbf{u}}(\mathcal{U})$ への射影行列である (注 7 参照).

3.2 最小二乗法

$\boldsymbol{u}$ が複雑な制約を受けると，式 (13) を最小にする $\boldsymbol{u}$ の解析が困難になる．よく用いられる簡略化は，正規化 $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ 以外の制約を無視することである．データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ に誤差がなければ式 (13) を最小化する $\boldsymbol{u}$ は自動的にすべての制約を満たすので，誤差が小さければ制約を考慮せずに求めた解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ もほぼその制約を満たすと期待される．

しかし，それでも解を解析的に求めることはできない．近似解を求めるのによく用いられるのは，式

単位ベクトルに正規化される）場合にも成り立つ．パラメータ空間 $\mathcal{U}$ が p 次元空間 $\mathcal{R}^p$ のある p' $(< p)$ 次元の多様体であれば，式 (6) の行列 $\boldsymbol{M}$ を $\boldsymbol{u}$ における $\mathcal{U}$ への射影行列 $\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}$ を用いて $\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}$ に置き換え，逆行列をランク p' の一般逆行列に置き換えればよい [15].

[9] 行列のノルムは $\|\boldsymbol{F}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} F_{ij}^2}$ と定義する．

(8) を直接に最小二乗法で解く，すなわち

$$J_{\mathrm{LS}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2 \tag{17}$$

を最小にすることである．（**2次）モーメント行列**を

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \tag{18}$$

と定義すると，式 (17) は次のように書ける．

$$J_{\mathrm{LS}}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}) \tag{19}$$

これは $\boldsymbol{u}$ の２次形式であり，これを最小にする単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルである．このようにして得られた**最小二乗解** $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{LS}}$ は式 (13) を最小にする最適解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の粗い近似であるが，直接的な計算で求まるので，種々の反復解法の初期値としてよく用いられる．

3.3 素朴な方法

未知数 $\boldsymbol{u}$ を含む行列 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$ を

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{20}$$

と定義すると，式 (13) は次のように書き直せる．

$$J(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) \tag{21}$$

これから，これを最小にする最適解を次のように計算したくなる．

1. 初期値 $\boldsymbol{u}_0$ として最小二乗解 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{LS}}$ を計算する．
2. 第 $(i-1)$ 回目の反復解 $\boldsymbol{u}_{i-1}$ ($i=1$ から開始) に対して，固有値問題
$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{22}$$
の最小固有値に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}_i$ とする．
3. $\boldsymbol{u}_i$ が符号を除いて $\boldsymbol{u}_{i-1}$ に十分近ければそれを $\hat{\boldsymbol{u}}$ として終了．そうでなければ $\boldsymbol{u}_{i-1} \leftarrow \boldsymbol{u}_i$ としてステップ 2 に戻る．

これで最適解が求まると誤解する人が多いが，そうではない．なぜなら，反復の収束時に $\hat{\boldsymbol{u}}$ は $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{u})$ を最小にする $\boldsymbol{u}$ の値だからである．すなわち微小な摂動 $\Delta\boldsymbol{u}$ に対して

$$(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) < (\hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})(\hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u})) \tag{23}$$

である．しかし

$$(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) < (\hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u})(\hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u})) \tag{24}$$

は保証されない．すなわち $\hat{\boldsymbol{u}}$ は $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{u})$ を最小にはするが $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u})$ を最小にするとは限らない．解析すると [15]，このように求めた $\hat{\boldsymbol{u}}$ は $O(\varepsilon^2)$ の偏差がある．すなわちデータ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ が真の値の周りに変動しても $\hat{\boldsymbol{u}}$ は真の値から $O(\varepsilon^2)$ だけ偏った値の周りに変動する．これは多くの応用で無視できない精度の劣化をもたらす．

3.4 FNS 法

式 (13) を最小化するには，$\boldsymbol{u}$ で微分した式

$$\nabla_{\mathbf{u}} J = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{2(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})\boldsymbol{\xi}_\alpha}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{2(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \tag{25}$$

を $\boldsymbol{0}$ と置いた

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

を解けばよい．ただし次のように置く．

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \tag{27}$$

式 (26) から次の反復解法が得られる．

1. 初期値 $\boldsymbol{u}_0$ として最小二乗解 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{LS}}$ を計算する．
2. 第 $(i-1)$ 回目の反復解 $\boldsymbol{u}_{i-1}$ ($i=1$ から開始) に対して，固有値問題
$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{28}$$
の 0 に最も近い固有値に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とする．
3. $\boldsymbol{u}_i$ が符号を除いて $\boldsymbol{u}_{i-1}$ に十分近ければそれを $\hat{\boldsymbol{u}}$ として終了．そうでなければ $\boldsymbol{u}_{i-1} \leftarrow \boldsymbol{u}_i$ としてステップ 2 に戻る．

この反復が収束すれば，$\hat{\boldsymbol{u}}$ はある λ に対して

$$\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} = \lambda \hat{\boldsymbol{u}} \tag{29}$$

となっている．$\hat{\boldsymbol{u}}$ と両辺の内積をとると

$$(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) = \lambda \tag{30}$$

となる．一方，式 (27) より

$$(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\hat{\boldsymbol{u}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\hat{\boldsymbol{u}})} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \hat{\boldsymbol{u}})^2 (\hat{\boldsymbol{u}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\hat{\boldsymbol{u}})}{(\hat{\boldsymbol{u}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\hat{\boldsymbol{u}})^2} = 0 \tag{31}$$

であるから $\lambda = 0$ である．したがって $\hat{\boldsymbol{u}}$ が式 (26) の解となっている．

この方法は Chojnacki ら [4] によって提案され，**FNS**(Fundamental Numerical Scheme) **法**と命名された．通常，数回の反復で収束する．

3.5 HEIV 法

式 (26) は次のようにも書き直せる．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \tag{32}$$

ただし，次のように置く．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \tag{34}$$

式 (32) から次の反復法解法が得られる．

1. 初期値 $\boldsymbol{u}_0$ として最小二乗解 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\rm LS}$ を計算する．
2. 第 $(i-1)$ 回目の反復解 $\boldsymbol{u}_{i-1}$ $(i = 1$ から開始) に対して，一般固有値問題

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u} \tag{35}$$

   の 1 に最も近い一般固有値に対する一般固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とする．ただしそのノルムを次のように正規化する．

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u}_i) = 1 \tag{36}$$

3. $\boldsymbol{u}_i$ が符号を除いて $\boldsymbol{u}_{i-1}$ に十分近ければそれを $\hat{\boldsymbol{u}}$ として終了．そうでなければ $\boldsymbol{u}_{i-1} \leftarrow \boldsymbol{u}_i$ としてステップ 2 に戻る．

この反復が収束すれば，$\hat{\boldsymbol{u}}$ はある λ に対して

$$\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} = \lambda \boldsymbol{L}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}, \tag{37}$$

となっている．$\hat{\boldsymbol{u}}$ と両辺の内積をとると，式 (36) の正規化条件より次のようになる．

$$(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) = \lambda \tag{38}$$

一方，式 (33), (34) より

$$1 = (\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{L}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2 (\hat{\boldsymbol{u}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\hat{\boldsymbol{u}})}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})^2}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} = (\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}}) \tag{39}$$

であるから $\lambda = 1$ である．したがって $\hat{\boldsymbol{u}}$ が式 (32) の解となっている．

ただし，式 (34) の $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u})$ は半正値対称行列であるが，式中の $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ が特異行列であることから，一般に特異行列である．$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ が特異行列であることは式 (14) からわかる．なぜなら，写像 $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ は m 次元データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ をより次元の高い p 次元空間に埋め込むため，$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ のランクは $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ のランクを超えないからである．

退化した一般固有値問題 (35) を解くには，$\mathcal{R}^p$ を $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u})$ の値域（固有値正の固有ベクトルの張る空間）とその零空間（固有値 0 の固有ベクトルの張る空間）に直和分解し，次元の低い正則な一般固有値問題 (35) に帰着させる必要がある [15]．

この方法（正則固有値問題に帰着させる部分は省略）は Leedan・Meer [23] と Matei・Meer [25] によって提案され，**HEIV**(Heteroscedastic Errors-In-Variables) **法**と命名された[10]．ここでの説明は Chojnacki ら [5] に基づいている．

3.6 くりこみ法

3.3 節の素朴な方法の解に偏差があるのは式 (20) の行列 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$ に偏差があるためである．データ $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ を真値 $\bar{\xi}_\alpha$ と誤差 $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ に分けて式 (20) の期待値を計算すると，

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] &= E[(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha)^\top] \\ &= E[\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top] + E[\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] + E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top] + E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \\ &= \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top + V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\end{aligned} \tag{40}$$

となり，次式を得る[11]．

$$E[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})] = \bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}) + O(\varepsilon^4) \tag{41}$$

$E[\,\cdot\,]$ は期待値を表し，$\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})$ は真値 $\{\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\}$ から計算した $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$ の値である．そして次のように置いた．

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\boldsymbol{u})} \tag{42}$$

したがって式 (21) 中の $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$ を

$$\hat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) - \varepsilon^2 \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}) \tag{43}$$

に置きかえれば偏差のない解が得られる．ε^2 は未知であるが，$\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})$ の最小固有値が 0 であることから $\hat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})$ の最小固有値が 0 であるように推定する．これから次の反復解法が得られる．

1. 初期値 $\boldsymbol{u}_0$ として最小二乗解 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\rm LS}$ を計算し，$c_0 = 0$ とする．
2. 第 $(i-1)$ 回目の反復解 $\boldsymbol{u}_{i-1}$, c_i $(i = 1$ から開始) に対して，固有値問題

$$(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1}) - c_{i-1}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1}))\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \tag{44}$$

[10] heteroscedastic とはデータごとに共分散行列が異なること，errors-in-variable とは拘束条件が式 (8) のように陰関数で表されることをを意味している．

[11] 式 (41) の $O(\varepsilon^4)$ は式 (20) の右辺の分母の $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の依存（もしあれば）の影響を表す．

の最小固有値に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とする．

3. λ が十分 0 に近ければ $\boldsymbol{u}_i$ を $\hat{\boldsymbol{u}}$ として終了．そうでなければ

$$c_i \leftarrow c_{i-1} + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u}_{i-1})} \tag{45}$$

および $\boldsymbol{u}_{i-1} \leftarrow \boldsymbol{u}_i$ としてステップ 2 に戻る．

式 (44), (45) より，c_i が 0 に近ければ次式が成立する．

$$(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1}) - c_i \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1}))\boldsymbol{u}_{i-1} = \boldsymbol{0} \tag{46}$$

これは次のように示せる．$\boldsymbol{u}_{i-1}$ と左辺の内積をとると

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{u}_{i-1}, (\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1}) - c_i \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1}))\boldsymbol{u}_{i-1}) \\ &= (\boldsymbol{u}_{i-1}, (\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1}) - c_{i-1} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1}))\boldsymbol{u}_{i}) \\ &\quad - \frac{\lambda(\boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u}_{i-1})}{(\boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{u}_{i-1})} = \lambda - \lambda = 0\end{aligned} \tag{47}$$

となる．c_i が 0 に近ければ $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i-1}) - c_i \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1})$ は半正値対称行列であり，式 (47) は $\boldsymbol{u}_{i-1}$ がその零空間に含まれることを意味する．したがって式 (46) が成り立ち，収束時には

$$(\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}}) - c\boldsymbol{N}(\hat{\boldsymbol{u}}))\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \tag{48}$$

となり，c が ε^2 の推定値になっている．この方法は筆者が提案し，**くりこみ法**と命名した [12, 13].

4. 関連する話題

4.1 歴史的背景

上記の記述は時間的に逆であり，まず筆者がくりこみ法を提案し，それを元に米国 Rutgers 大学の Meer らが HEIV 法を提案し [23, 25]，さらにオーストラリアの Adelaide 大学の Brooks らが FNS 法に改良したものである [3, 4, 5].

筆者らが国内で最初にくりこみ法を発表したのは 1992 年であり [32]，楕円の当てはめ [8] やオプティカルフローの 3 次元復元 [9] や 2 画像からの 3 次元復元 [30] に応用し，論文としてもまとめたが [13]，種々の批判を受けた[12]．しかし 1993 年に国際会議 ICCV で発表すると [12]，外国で徐々に引用されるようになり，著書 [15] が 1996 年に出版されると急速に海外に広まった．最近，Brooks らはくりこみ法に別の解釈を与えている [3].

[12]コンピュータビジョンの分野が他分野に比べて互いの批判や攻撃が激しいのは，研究が世界中にあまりにも急速に広まり，各研究者がすべての研究を知ることが困難になったためであろう．このため常に何らか（多くは非難する人自身の研究について）の無知が批判される．確かにオリジナルでないものをオリジナルと思い込む者も多いが，一般に他人の研究を批判するのは学問レベルが低い者である．

4.2 比較

Brooks らの FNS 法も Meer らの HEIV 法も式 (13) を最小化するので，最終的な解は同一である．それに対してくりこみ法では有効数字の最終桁に多少の違いが生じる．しかし，解析によればその違いは式 (16) の $O(\varepsilon^4)$ に相当し [15]，誤差のあるデータからの推定には避けられない範囲内であるという意味で，HEIVE 法も FNS 法もくりこみ法もすべて最適解を与える．これは 3.3 節の素朴な方法が偏差を除けば式 (16) の精度を達成し，くりこみ法によってその偏差が除去されるからである．実際，Brooks らの比較実験でも HEIVE 法，FNS 法，くりこみ法の結果に有意な差は認められない [3, 4, 5].

4.3 最適補正

FNS 法も HEIV 法も $\boldsymbol{u}$ の $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ 以外の制約を無視している．それらは誤差がなければ自動的に満たされるが，誤差があると厳密には満たされない．これは実際問題として (例えば計算した基礎行列 $\boldsymbol{F}$ が $\det \boldsymbol{F} \neq 0$ となるなど) 問題になる．そこで厳密にかつ最適に制約を満足させることを考える．$\boldsymbol{u}$ が r 個の制約条件

$$\phi^{(k)}(\boldsymbol{u}) = 0, \qquad k = 1, ..., r \tag{49}$$

を満たすとする．FNS 法，HEIV 法，くりこみ法で計算した解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列は式 (16) で与えられる．

$$V_0[\hat{\boldsymbol{u}}] = \Big(\boldsymbol{P}_{\hat{\mathbf{u}}} \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{P}_{\hat{\mathbf{u}}}\Big)^- \tag{50}$$

と置けば式 (16) は $O(\varepsilon^4)$ を除いて $\varepsilon^2 V_0[\hat{\boldsymbol{u}}]$ に等しい．ただし $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$ は式 (20)（または (32)）の行列である．誤差の分布を正規分布で近似すると，解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の制約 (49) を最適に課すにはマハラノビス距離

$$J_c = (\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}, V_0[\hat{\boldsymbol{u}}]^- (\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})) \tag{51}$$

を条件 (49) のもとで最小にする $\boldsymbol{u}$ を計算すればよい．ラグランジュ乗数を用いれば解 $\boldsymbol{u}^*$ は第 1 近似において次式で与えられる[13][15].

$$\boldsymbol{u}^* = \hat{\boldsymbol{u}} - V_0[\hat{\boldsymbol{u}}] \sum_{k,l=1}^{r} w^{(kl)} \hat{\phi}^{(k)} \nabla_{\mathbf{u}} \hat{\phi}^{(l)}, \tag{52}$$

ここに $w^{(kl)}$ は，$(\nabla_{\mathbf{u}} \hat{\phi}^{(k)}, V_0[\hat{\boldsymbol{u}}] \nabla_{\mathbf{u}} \hat{\phi}^{(l)})$ を (kl) 要素とする $r \times r$ 行列の逆行列の (kl) 要素である．式 (5) のように表記すると次のように書ける[14].

$$\Big(w^{(kl)}\Big) = \Big((\nabla_{\mathbf{u}} \hat{\phi}^{(k)}, V_0[\hat{\boldsymbol{u}}] \nabla_{\mathbf{u}} \hat{\phi}^{(l)})\Big)^{-1} \tag{53}$$

[13]これは第 1 近似であるから式 (49) と高次の違いがあり得る．厳密な等号にするにはこの補正を反復する．これは極めて高速に収束する [15].

[14]制約 (49) の r 個の式が冗長で，r' $(< r)$ 個だけが独立なときは逆行列をランク r' の一般逆行列に置き換える [15].

ただし ϕ と $\nabla_{\mathbf{u}}\phi$ のハットは $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}$ を代入することを示す．解析によれば，式 (51) の補正解 $\boldsymbol{u}^*$ の正規化共分散行列は $O(\varepsilon^2)$ を除いて（共分散行列としては $O(\varepsilon^4)$ を除いて）次のようになる [15].

$$V_0[\boldsymbol{u}^*] = V_0[\hat{\boldsymbol{u}}] - \sum_{k,l=1}^{r} w^{(kl)}(V_0[\hat{\boldsymbol{u}}]\nabla_{\mathbf{u}}\hat{\phi}^{(k)})(V_0[\hat{\boldsymbol{u}}]\nabla_{\mathbf{u}}\hat{\phi}^{(k)})^\top \tag{54}$$

この方法は筆者が提案したものであり [14, 15]，数学的には $\hat{\boldsymbol{u}}$ での接空間を制約を満たす部分空間とそれを破る部分空間に直和分解し，誤差を前者に直交射影することに相当する．このため，条件 (49) のもとで式 (4) の J を最小にする解を計算するのと，条件 (49) を考えないで J を最小にする解に式 (52) の補正をするのは高次の項を除いて一致する[15]．最近 Chojnacki ら [5] は前者のアプローチを提案している．

4.4 平衡法（白色化法）

くりこみ法の影響はこれまでに述べたような直接的な発展だけではない．くりこみ法に触発されて提唱されたものに**平衡法** (equilibration) （または**白色化法** (whitening)）がある．これは，くりこみ法が式 (20) の行列 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$ の偏差 $\varepsilon^2\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})$ を式 (43) の "引き算" で消去するのに対して，これを "割り算" によって消去（白色化）するものである．

新しい変数 $\boldsymbol{v}$ と行列 $\tilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})$ を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{1/2}\boldsymbol{u}$$
$$\tilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{-1/2}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{-1/2} \tag{55}$$

と定義すると，式 (21) は次のように書き直せる．

$$J(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}) \tag{56}$$

ただし $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{1/2}$, $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{-1/2}$ は $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})$ の平方根およびその逆行列である[16]．式 (41) より行列 $\tilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})$ の期待値は次のようになる．

$$E[\tilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})] = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{-1/2}\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{-1/2} + \varepsilon^2\boldsymbol{I} + O(\varepsilon^4) \tag{57}$$

行列に単位行列の定数倍を加えても固有ベクトルは変化しないから[17]，高次の項を除けば式 (56) を素朴な方法で解いても解に偏差が生じない．これから次の手順が得られる．

1. 初期値 $\boldsymbol{u}_0$ として最小二乗解 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\rm LS}$ を計算し，$c_0 = 0$ とする．
2. 第 $(i-1)$ 回目の反復解 $\boldsymbol{u}_{i-1}$, c_i ($i = 1$ から開始) に対して，固有値問題
$$\tilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{u}_{i-1})\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{58}$$
の最小固有値に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求め，$\boldsymbol{u}_i$ を次のように計算する．
$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{i-1})^{-1/2}\boldsymbol{v} \tag{59}$$
3. $\boldsymbol{u}_i$ が符号を除いて $\boldsymbol{u}_{i-1}$ に十分近ければそれを $\hat{\boldsymbol{u}}$ として終了．そうでなければ $\boldsymbol{u}_{i-1} \leftarrow \boldsymbol{u}_i$ としてステップ 2 に戻る．

この平衡法（白色化法）は MacLean [24] や Mühlich・Mester [26, 27] らによって，くりこみ法に対抗するものとして提起された．しかし，残念ながら，多くの問題では式 (42) の半正値対称行列 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})$ が特異となり，平方根 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{1/2}$ は計算できても，その逆行列 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u})^{-1/2}$ が計算できない．

これは 3.5 節の HEIV 法の説明で述べたように，式 (8) の線形拘束条件を得るために通常は m 次元データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ をより次元の高い p 次元空間に埋め込むので，式 (14) で計算される共分散行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ が退化するためである．

それでも共分散行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ が退化しない特殊な例には適用可能であり，MacLean [24] はオプティカルフローからの 3 次元復元の部分問題に，Mühlich・Mester [26, 27] は対応点からの射影変換の計算の部分問題に利用している．

4.5 セミパラメトリックモデル

これはわが国で始まったものであり，筆者の統計的最適化の研究に触発されたものではあるが，前述のものとは系統が異なる．これはデータ数 N が大きいときに，その値の分布形を推定することによって高次の推定を実現させようとするものである[18]．分布形を介在させる点ではベイズ推定に似ているが，これは事前情報に基づくものではなく，データから推定する．そして，パラメータ推定のために適切な「推定関数」を構成するものであり，基本理論は甘利・川鍋 [1] が示した．現在，これを複数画像からの 3 次元復元やオプティカルフローからの 3 次元復元へ応用することが試みられている [22, 29]．今後の進展が注目される．

[15] ステレオ画像の点対応をエピ極線方程式が厳密に成立するように補正するにもこの方法が便利であるが，Hartley ら [7] は 6 次方程式を解く非効率な代数的方法を提案している．Torr ら [31] は筆者の方法の精度が Hartley らの方法と実質的に等しく，計算効率では筆者の方法が圧倒的に優れるとが指摘しているにもかかわらず，知名度の差で今日でも依然として Hartley らの非効率な方法が国内国外で使われている．

[16] 標準形において各固有値をその平方根およびその逆数に置き換えたものとして定義される．

[17] $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ なら $(\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = (\lambda + c)\boldsymbol{x}$ である．

[18] それに対して前述の方法はすべてデータ数 N を固定した ε に関する漸近解析に基づいている．これは処理に不確定があっても精度を上げることを目的とするからである [17].

5. まとめ

筆者がコンピュータビジョンの幾何学的問題の最適計算法として考案した「くりこみ法」は今日では画像モザイク生成 [20] や画像からの 3 次元復元 [18] や画像間の自動対応づけ処理 [21] などの広範囲の応用に不可欠になっている．本稿は発表から 10 年経った機会に，その歴史的経過，その後の発展および最新の結果をまとめたものである．

くりこみ法は国内ではあまり関心を持たれなかったが，海外のいろいろな国に飛び火して，最近さまざまな研究が発表されている．しかし，この伝播や波及にはずいぶん時間がかかった．筆者が 1993 年に国際会議 ICCV で発表したしばらく後は文献として引用されるのみであり，しかも否定的な見解が多かった．しかし次第に肯定的に評価されるようになり，他国から国際会議に論文が出されるようになったのはやっと 1998~1999 年になってからである．さらに論文誌に Meer らの HEIV 法や Brooks らの FNS 法や Mester らの平衡法が論文誌に載ったのは 2000 年代に入ってからである．

本稿はこれらを系統的にまとめ，更なる発展を促そうとするものである．国内での関心の低さは，習慣や伝統としてのコンピュータビジョンにおける基礎的，数理的な研究に対する態度の違いもあるが，直接には適切な文献がないために理解しにくいという面もある．本稿がその点において寄与することを期待している．

謝辞: 本稿の内容に関して従来から筆者と議論および相互訪問を重ねている米国 Rutgers 大学の Peter Meer 教授，オーストラリア Adelaide 大学の Mike Brook 教授，ドイツ Frankfurt 大学の Rudolf Mester 教授に感謝します．また国内では群馬大学の太田直哉助教授，豊橋技術科学大学の金澤靖助教授，ATR の木下敬介氏らに筆者の研究を支援して頂き，この分野で先駆的な研究ができたことを感謝します．本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究C (2) (No. 15500113) によった．

参考文献

[1] 甘利俊一, 川鍋元明, 線形関係の推定—最小 2 乗法は最良であるのか?, 応用数理, **6**-2 (1996-6), 96–109.

[2] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, A new approach to constrained parameter estimation applicable to some computer vision applications, *Proc. Statistical Methods in Video Processing Workshop*, June 2002, Copenhagen, Denmark, pp. 43–48.

[3] W. Chojnacki, M. J. Brooks and A. van den Hengel, Rationalising the renormalisation method of Kanatani, *J. Math. Imaging Vision*, **14**-1 (2001), 21–38.

[4] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000), 1294–1303.

[5] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, From FNS to HEIV: A link between two vision parameter estimation methods, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, to appear.

[6] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.

[7] R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *Comput. Vision Image Understanding*, **68**-2 (1997), 146–157.

[8] 岩崎利夫, 丸山 保, 金谷健一, くりこみ法によるコニックの当てはめ, 情報処理学会研究報告, 92-CV-79-4 (1992-9), 25–32.

[9] 岩崎利夫, 金谷健一, くりこみ法によるオプティカルフローの 3 次元復元, 情報処理学会研究報, 92-CV-80-18 (1992-11), 129–136.

[10] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, Germany, 1990.

[11] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.

[12] K. Kanatani Renormalization for unbiased estimation, *Proc. 4th Int. Conf. Comput. Vision*, May 1993, Berlin, Germany, pp. 599–606.

[13] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.

[14] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37**-3 (1996-3), 363–370.

[15] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1996.

[16] 金谷健一, 幾何学的当てはめにおけるモデル選択, 電子情報通信学会論文誌 A, **J84-A**-11 (2001-11), 1385–1393.

[17] 金谷健一, 画像からの幾何学的推論はどういう統計的モデルに基づくのか, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J86-D-II**-7 (2003-7), 966–973.

[18] 金谷健一, 三島等, 未校正カメラによる 2 画像からの 3 次元復元とその信頼性評価, 情報処理学会論文誌: CVIM **42**-SIG 6 (2001-6), 1–8.

[19] 金澤靖, 金谷健一, 画像の特徴点に共分散行列は本当に必要か 電子情報通信学会論文誌 A, **J85-A**-2 (2002-2), 231–239.

[20] 金澤 靖, 金谷 健一, 段階的マッチングによる画像モザイク生成, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J86-D-II**-6 (2003-6), 816–824.

[21] 金澤靖, 金谷健一, 大域的な整合性を保証するロバストな画像の対応づけ情報処理学会研究報, 2003-CVIM-136-23 (2003-1), 171–178.

[22] 栗原祐介, 太田直哉, 攪乱母数を含まない推定方式によるオプティカルフローからの形状復元, 情報処理学会研究報告, 2002-CVIM-135-14 (2002-11), 87–94.

[23] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000), 127–150.

[24] W. J. MacLean, Removal of translation bias when using subspace methods, *Proc. 7th Int. Conf. Comput. Vision*, September 1999, Kerkyra, Greece, Vol. 2, pp. 753–758.

[25] B. Matei and P. Meer, A generalized method for errors-in-variables problem in computer vision, *Proc. 15th Int. Conf. Patt. Recog.*, September 2000, Barcelona, Spain, Vol. 2, pp. 18–25.

[26] M. Mühlich and R. Mester, The role of total least squares in motion analysis, *Proc. 5th Euro. Conf. Comput. Vision*, June 1998, Freiburg, Germany, Vol. 2, pp. 305–321.

[27] M. Mühlich and R. Mester, A considerable improvement in pure parameter estimation using TLS and equilibration, *Patt. Recog. Lett.*, **22**-11 (2001-9), 1181–1189.

[28] J. Mundy and A. Zisserman (Eds.), *Geometric Invariance in Computer Vision*, MIT Press, Cambridge, MA, 1992.

[29] 岡谷貴之, 出口光一郎, 画像からのカメラの姿勢・3 次元形状復元における推定精度の限界について, 第 6 回画像の認識・理解シンポジウム講演論文集, 2002 年 7–8 月，名古屋, pp. 335–340.

[30] 武田佐知男, 金谷健一, くりこみ法による 3 次元運動の解析, 情報処理学会研究報告, 92-CV-82-4 (1993-3), 25–32.

[31] P. H. S. Torr and A. Zissermann, Performance characterization of fundamental matrix estimation under image degradation, *Mach. Vision Appl.*, **9**-5/6 (1997), 321–333.

[32] 浦沢康二, 金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: II. エッジ、消失点、出現点, 情報処理学会研究報告, 92-CV-78-1 (1992-5), 1–8.