B-スプライン曲面のフーリエ変換と投影定理への応用

沼田宗敏[†]　野村　俊[†]　神谷和秀[†]　輿水大和[††]　田代発造[†††]

計測点を通過する B-スプライン曲面の制御点は，連立 1 次方程式を解かなければ算出できない．著者らは，計測点の離散的フーリエ変換からこれを求める方法を提示した．この方法は，計測点に対する離散的フーリエ変換にある特殊な係数関数を掛け，これを離散的フーリエ逆変換することにより制御点を算出するものである．本稿ではこの手法を，X 線 CT などの投影画像から原画像を再構成する際の投影定理に応用する．また，従来のコンボリューション法に比べて，より輪郭が鮮明に復元されることをシミュレーションで確認した．

Fourier Transform of B-spline Surface and Application for Projection Theorems

MUNETOSHI NUMADA,[†] TAKASHI NOMURA,[†] KAZUHIDE KAMIYA,[†] HIROYASU KOSHIMIZU[††] and HATSUZO TASHIRO[†††]

Control points of a B-Spline surface coinciding with the measuring points must be calculated mathematically by solving a set of simultaneous linear equations. We proposed a new and alternative method for calculating this by means of a simple application of Discrete Fourier Transform (DFT) to the measuring points. In this method, we introduced a specialized coefficient function for modifying the DFT of the measuring points, and showed a procedure to calculate the control points by applying inverse DFT to the modified DFT of the measuring points.

We also show that this method can be utilized as an efficient methodology to reconstruct a CT image from the projected images based on Projection Theorem. In this paper we present some simulation experiments to demonstrate this method could provide better CT image than the Convolution Method especially in the sharpness of the edge.

1. はじめに

CAD や CG の形状モデリングで用いられる代表的な自由曲線・曲面に B-スプラインがある. B-スプラインは, モデリングだけでなく，計測点の内挿としても用いられている. 高周波ノイズがのった計測点を B-スプラインで内挿する場合，内挿に先立って高周波ノイズの除去が必要になる.

著者らは，計測点の高周波ノイズ除去と，B-スプラインの制御点の計算を，ともに周波数スペクトル領域で行う方法を提示した [1]．これは，まず計測点に離散的フーリエ変換を施し，高周波成分をカットする．続いて，これに係数関数を掛け合わせフーリエ逆変換することにより，B-スプラインの制御点を得るものである．B-スプラインの制御点の計算を実空間で行うには連立 1 次方程式を解かなければならないが，この方法では空間周波数領域（以下単に周波数と表現）における係数関数との乗算に置き換えるため，計算コストが小さくなる.

ところで 1917 年に Radon は, 2 次元の関数がそのあらゆる方向の 1 次元射影から完全に求まることを示した [2]. 元の関数からこの射影を得る操作を Radon 変換という. 一方，投影画像から画像を再構成する変換が逆 Radon 変換である．射影の 1 次元フーリエ積分は，原画像の 2 次

† 富山県立大学工学部
Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University
†† 中京大学情報科学部
School of Computer and Cognitive Sciences, Chukyo University
††† 富山大学工学部
Faculty of Engineering, Toyama University

元フーリエ積分における，原点を通る一断面に等しく（これを投影定理という），これを 2 次元逆フーリエ変換することにより原画像を復元する．投影定理は，X 線 CT，SPECT [3]，磁界分布測定 [4] などコンピュータトモグラフィ技術の基本的な理論である．

投影定理を用いた画像再構成の主流は，実空間でフィルタ処理を行うコンボリューション法である [5]．ただし，これには復元された原画像の輪郭がぼけるという欠点がある．極座標系で得られた射影データにフィルタ処理を施し，これを直交座標系の格子点に座標変換する際に線形補間が必要になるが，この内挿における誤差が大きく影響する．フィルタ処理された射影の空間周波数が高く，直線補間では追従しきれないためである．このため逆投影した原画像の輪郭がぼけ，鮮明な画像が得られない．

本稿では，フィルタ処理された一次元射影から原画像を復元する際の座標変換に，B-スプラインを用いた曲線補間を適用し，逆投影画像の輪郭を鮮明に保つ方法を提示する．この方法は，コンボリューション法と等価なフィルタ補正逆投影法を用い，周波数領域におけるフィルタ演算と係数関数との乗算を同時に行う．このため，制御点を計算するための連立 1 次方程式を解く必要がない．

以下に本稿の構成を述べる．2 章では，B-スプラインのフーリエ変換法について解説する．3 章では，投影定理への応用について検討する．4 章では，本手法を従来法と比較し性能評価を行い，5 章で本稿のまとめを行う．

2.　B-スプライン曲面のフーリエ変換

本章では，B-スプライン曲線のフーリエ積分を計測点の離散的フーリエ変換から求める方法を示す．また，B-スプライン曲線・曲面の制御点を計測点の離散的フーリエ変換から求める手順について説明する．

2.1 B-スプライン基底関数と矩形関数

式(1)の矩形関数 rect(t)を $r_0(t)$とおく．

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqq 1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases} \tag{1}$$

矩形関数 $r_0(t)$に対する自己相関演算を m 回繰り返した関数を $r_m(t)$とする．RECT 関数の左右対称性を利用すると，$r_m(t)$は次式のたたみこみ演算の形に書ける．

$$r_{m+1}(t)=(r_m * r_0)(t) \tag{2}$$

式(1)を式(2)に代入して順次解くと，次式が得られる．

$$r_0(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{m!}\displaystyle\sum_{0\le i<t+\frac{m+1}{2}}(-1)^i\binom{m+1}{i}\left(t+\frac{m+1}{2}-i\right)^m & |t|\le\dfrac{m+1}{2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{3}$$

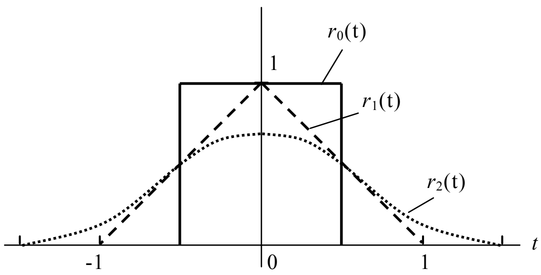


図 1　矩形関数の繰り返し自己相関関数 $r_m(t)$

さて，階数 M，次数 $m = M$ - 1 の B-スプライン基底関数 $N_{k,M}(t)$ は，次式で表現される．

$$N_{k,M}(t)=\frac{1}{m!}\sum_{0\le i\le M}(-1)^i\binom{m+1}{i}(t+m-i-k)_+^m \tag{4}$$

$$(k=0,1,\cdots,m)$$

式(3)と(4)を比較して，次式を得る．

$$N_{k,M}(t)=r_m(t+M/2-1-k) \tag{5}$$

これより，B-スプライン基底関数 $N_{k,M}(t)$ は，矩形関数の繰り返し自己相関演算関数 $r_m(t)$を，$M/2-1-k$ だけ平行移動して得られることがわかる．

2.2　B-スプライン曲線のフーリエ積分

B-スプライン基底関数$N_{k,M}(t)$と矩形関数の繰り返し自己相関演算関数 $r_m(t)$の関係を利用し，B-スプライン曲線のフーリエ積分を求める．ここで $r_m(t)$のフーリエ積分を $R_m(u)$ とすると，式(1)より，

$$R_0(u)=\mathrm{FT}\{r_0(t)\}=\mathrm{FT}\{\mathrm{rect}(t)\}=\mathrm{sinc}(u) \tag{6}$$

ここに，FT{f}は関数fのフーリエ変換を意味するものとする．続いて式(2)をフーリエ変換する．空間領域における 2 つの関数のたたみこみは周波数領域における乗算と等しいため，次式を得る．

$$R_{m+1}(u)=\mathrm{FT}\{(r_m * r_0)(t)\}=R_m(u)\,R_0(u) \tag{7}$$

式(6)を初期値とし，式(7)を順次計算して次式を得る．

$$R_m(u)=\mathrm{sinc}^{m+1}(u)$$

さて，N 個の制御点 $\boldsymbol{q}_k$ からなる B-スプライン曲線 $\boldsymbol{p}(t)$は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{k=0}^{N-1}N_{k,M}(t)\boldsymbol{q}_k \qquad (0\le t\le N-M) \tag{8}$$

式(5)を用いて変形すると，

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{k=0}^{N-1}r_m(t+M/2-1-k)\boldsymbol{q}_k=\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{q}(k)\,r_m'(t-k) \tag{9}$$

ここに $r'_m(t) = r_m(t + M/2 - 1)$ ，$\boldsymbol{q}(n) = \boldsymbol{q}_n$ である．B-スプライン曲線 $\boldsymbol{p}(t)$のフーリエ積分 $\boldsymbol{P}(u)$は，式(9)をフーリエ変換して得られる．付録 A.1 より，

$$\boldsymbol{P}(u)=\mathrm{FT}\{\boldsymbol{p}(t)\}=N\boldsymbol{Q}^*(u)R_m'(u)$$

ここに，$u = n/N$，$\boldsymbol{Q}^*(u)$は制御点 $\boldsymbol{q}(t_n) = \boldsymbol{q}_n$ の離散的

フーリエ変換である.

また，$R'_m(u)$は$r'_m(t)$のフーリエ積分であって，

$$R'_m(u) = \mathrm{FT}\{r_m(t+M/2-1)\} = R_m(u)e^{-j2\pi(1-M/2)u}$$
$$= \mathrm{sinc}^{m+1}(u)e^{-j2\pi(1-M/2)u}$$

よって，次式を得る.

$$\boldsymbol{P}(u) = N\boldsymbol{Q}^*(u)\,\mathrm{sinc}^{m+1}(u)e^{-j2\pi(1-M/2)u} \tag{10}$$

ただし，ここでは制御点 $\boldsymbol{q}_n$ の離散的フーリエ変換 $\boldsymbol{Q}^*(u)$が未知であるため，上式から直接，B-スプライン曲線のフーリエ積分 $\boldsymbol{P}(u)$を求めることはできない.

2.3 離散的フーリエ変換を用いた制御点の計算

さて,式(8)でノットベクトル t をノット t_n におくと，M=1 の場合，式(4)による平行移動の性質 $N_{k,M}(n) = N_{k-n,M}(0)$ を用いて，次式を得る.

$$\boldsymbol{p}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} N_{k,1}(n)\boldsymbol{q}_k = N_{k,1}(n)\boldsymbol{q}_n = \boldsymbol{q}_n \qquad (n=0,1,\cdots,N-1)$$

$M \geqq 2$ の場合，

$$\boldsymbol{p}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} N_{k,M}(n)\boldsymbol{q}_k = \sum_{k=n}^{n+M-2} N_{k,M}(n)\boldsymbol{q}_k = \sum_{k=n}^{n+M-2} N_{k-n,M}(0)\boldsymbol{q}_k$$
$$= \sum_{k=0}^{M-2} N_{k,M}(0)\boldsymbol{q}_{n+k} \qquad (n=0,1,\cdots,N-M)$$

これに離散的フーリエ変換を施して次式を得る.

$$\boldsymbol{P}^*(u) = \sum_{i=0}^{M-2}\left\{N_{i,M}(0)\boldsymbol{Q}^*(u)\right\} e^{j2\pi iu} \tag{11}$$

式（10）,(11)と離散的フーリエ変換の $k = N$ の周期性から，次式を得る.

$$\boldsymbol{P}(u) = N\,\boldsymbol{P}^*(u)\,C'_m(u) \tag{12}$$

ここに，$\boldsymbol{P}^*(u)$は既知の計測点 $\boldsymbol{p}(t_n) = \boldsymbol{p}_n$ の離散的フーリエ変換であって，FFT を使って高速に求めることができる．なお，DFT{ f }は関数 f の離散的フーリエ変換を意味するものとする.

$$\boldsymbol{P}^*(u) = \mathrm{DFT}\{\,\boldsymbol{p}_n\,\} \tag{13}$$

式(12)と式(13)により,B-スプライン曲線のフーリエ積分 $\boldsymbol{P}(u)$は，計測点の離散的フーリエ変換 $\boldsymbol{P}^*(u)$と係数関数 $C'_m(u)$を用いて求めることができる．この結果は，スプライン曲線のフーリエ積分を示した文献 6)の結果と一致する．なお，係数関数 $C'_m(u)$を表1に掲げる.

B-スプライン曲面のフーリエ積分 $\boldsymbol{P}(u_x, u_y)$も同様に、計測点 $\boldsymbol{p}_{kl} = \boldsymbol{p}(x_k, y_l)$の離散的フーリエ変換である $\boldsymbol{P}^*(u_x, u_y)$と係数関数を用いて，次式で与えられる.

$$\boldsymbol{P}(u_x, u_y) = N_x N_y \boldsymbol{P}^*(u_x, u_y)\,C'_m(u_x)\,C'_m(u_y)$$

さて，式(10)と式(12)より次式が成立する.

$$\boldsymbol{Q}^*(u) = \frac{\boldsymbol{P}(u)e^{j2\pi(1-M/2)u}}{N\,\mathrm{sinc}^{m+1}(u)} \tag{14}$$
$$= \frac{\boldsymbol{P}^*(u)C'_m(u)e^{j2\pi(1-M/2)u}}{\mathrm{sinc}^{m+1}(u)} = C_m(u)\boldsymbol{P}^*(u)$$

表 1　次数 m と係数関数 $C'_m(u)$の関係

M	m	$C'_m(u)$
1	0	$\mathrm{sinc}(u)e^{-j\pi u}$
2	1	$\mathrm{sinc}^2(u)$
3	2	$\mathrm{sinc}^3(u)/\cos(\pi u)$
4	3	$3\mathrm{sinc}^4(u)/\{2+\cos(2\pi u)\}$
5	4	$12\mathrm{sinc}^5(u)/\{11\cos(\pi u)+\cos(3\pi u)\}$

表 2　次数 m と係数関数 $C_m(u)$の関係

M	m	$C_m(u)$
1	0	1
2	1	1
3	2	$e^{-j\pi u}/\cos(\pi u)$
4	3	$3e^{-j2\pi u}/\{2+\cos(2\pi u)\}$
5	4	$12e^{-j3\pi u}/\{11\cos(\pi u)+\cos(3\pi u)\}$

表 2 に係数関数 $C_m(u)$を示す.

これに，離散的フーリエ逆変換をほどこせば制御点 $\boldsymbol{q}_n$ を得る.

$$\boldsymbol{q}_n = \mathrm{DFT}^{-1}\{\boldsymbol{Q}^*(u)\}$$

よって，制御点 $\boldsymbol{q}_n$ は計測点 $\boldsymbol{p}_n$ の離散的フーリエ変換 $\boldsymbol{P}^*(u)$を求め，これに係数関数 $C_m(u)$を掛けて制御点の離散的フーリエ変換 $\boldsymbol{Q}^*(u)$を求めた後に，離散的フーリエ逆変換することによって得る．これは FFT サブルーチンを用いて，高速に計算することができる.

また，この制御点 $\boldsymbol{q}_n$ を求める手順は，図 2 に示すようにデータ数 N の周期で波形が繰り返す離散的フーリエ変換の性質を利用している．よって、次式が成立する.

$$\boldsymbol{p}_{k+N} = \boldsymbol{p}_k$$
$$\boldsymbol{q}_{k+N} = \boldsymbol{q}_k$$
$$\boldsymbol{q}(t+N) = \boldsymbol{q}(t+N)$$

このため，ノットベクトルは多重にはならない.

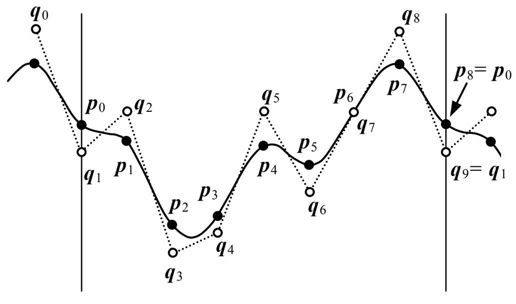


図 2　周期的な B-スプライン曲線（N＝8）

B-スプライン曲面の制御点 $\boldsymbol{Q}_{kl}$ の離散的フーリエ変換である $\boldsymbol{Q}^*(\ u_x,\ u_y\ )$ も同様にして求めることができる．

$$\boldsymbol{Q}^*(u_x, u_y) = C_m(u_x)C_m(u_y)\boldsymbol{P}^*(u_x, u_y)$$

制御点 $\boldsymbol{q}_{kl}$ は，これを離散的フーリエ逆変換して得られる．

3. 投影定理への応用

X 線 CT などに使われる，投影定理を用いた原画像復元では輪郭が鮮明にならない．本章では，この投影定理を用いた従来の画像再構成法の問題点について述べた上で，B-スプラインのフーリエ変換をこれに応用して，輪郭を鮮明に復元する方法を示す．

3.1 コンボリューション法

Radon 変換は 2 次元の原画像 $f(x,\ y)$ を x 軸となす角度が θ である s 軸に投影して，射影 $g(s, \theta)$ を作り出す変換である．これを次式に示す．

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy$$

ここに $\delta(x)$ はデルタ関数である．射影 $g(s, \theta)$ の θ

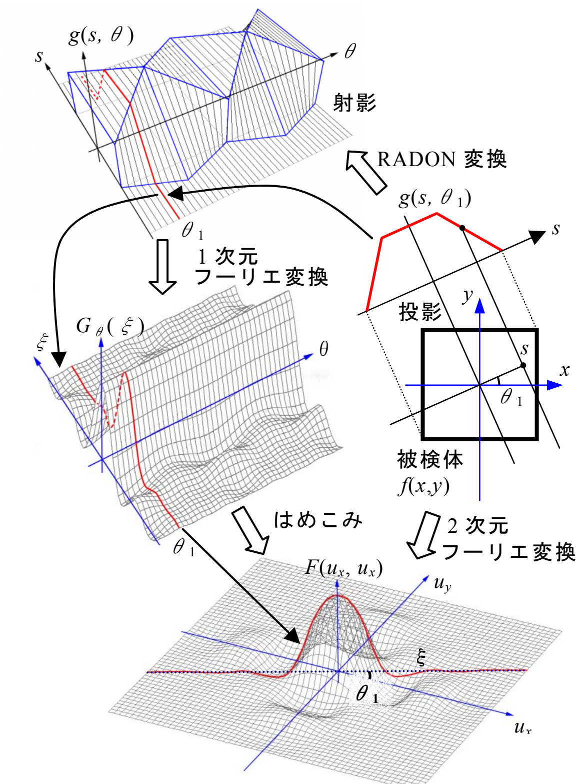


図 3　投影定理を用いた画像再構成のしくみ

における 1 次元フーリエ積分 $G_\theta(\xi)$ と原画像の 2 次元フーリエ積分 $F(u_x, u_y)$ との間には，次式の関係がある（投影定理）．

$$G_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \tag{15}$$

投影定理を用いて，フーリエ積分 $F(u_x, u_y)$ を復元し，これをフーリエ逆変換することにより原画像を再構成する．

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(u_x, u_y)\exp\{j2\pi(xu_x + yu_y)\}du_x du_y \tag{16}$$

ところで，投影定理を直接的に用いて原画像を復元すると，周波数領域における極座標の点(ξ, θ)から直交座標の格子点(u, v)への変換で行う内挿で誤差が生じる．これが空間領域全体にわたってアーチファクト（虚像）を発生させるため実用的ではない．このため，極座標の点から直交座標の格子点への変換を，実空間で行えるように工夫が必要である．

ここで，$u_x = \xi\cos\theta$，$u_y = \xi\cos\theta$ なる変換を施し，式(16)に代入すると，

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)\exp\{j2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)\}\xi d\xi d\theta$$

これに投影定理（15）を代入するとして次式を得る．

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_\theta(\xi)\exp\{j2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)\}|\xi|d\xi d\theta \tag{17}$$

射影の 1 次元フーリエ積分 $G_\theta(\xi)$にフィルタ $H(\xi) = |\xi|$を掛け，これをフーリエ逆変換した関数を $g'(s, \theta)$とする．すなわち，

$$g'(s, \theta) = \mathrm{FT}^{-1}\{H(\xi)G_\theta(\xi)\} \tag{18}$$

これを式(17)に代入して，

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} g'(s,\theta)d\theta = \int_0^{\pi} g'(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)d\theta \tag{19}$$

フィルタ補正逆投影法は，射影のフーリエ積分 $G_\theta(\xi)$ にフイルタ関数 $H(\xi)$ を掛け，これをフーリエ逆変換して射影 $g'(s, \theta)$として求める方法である．このフィルタ処理された射影を θ 方向に積分して，原画像を復元する．極座標の点 (s, θ) から直交座標の格子点 (x, y) への変換は実空間で行えるため，アーチファクトが生じない．

式(18)において，周波数領域における乗算を，実空間におけるコンボリューションの形に置き換えると，

$$g'(s, \theta) = \mathrm{FT}^{-1}\{H(\xi)\} * g(s, \theta)$$

となる．これを θ 方向に積分して原画像を復元する方法がコンボリューション法である．

さて，実際の CT では投影角度 θ は離散的である．そこで，投影のサンプリング数を N として，原画像を復元する式(19)を書き換えると，

$$f(x,y) \cong \sum_{l=0}^{N-1} g'(x\cos\theta_l + y\sin\theta_l, \theta_l)\Delta\theta \tag{20}$$

となる．ここに，$\Delta\theta=\pi/N$ である．
ここで，$g'(x\cos\theta_l+y\sin\theta_l,\theta_l)$ は離散的に求められた $g'(s_k,\theta_l)$ から線形補間によって求められる．すなわち，s のサンプリング間隔を Δs とし，

$s_t=x\cos\theta_l+y\sin\theta_l$，$t=s_t/\Delta s$，$k<t<k+1$，

$d=t-k$ としたとき，

$$g'(s_t,\theta_l) \fallingdotseq (1-d)\,g'(s_k,\theta_l)+d\,g'(s_{k+1},\theta_l) \tag{21}$$

で求めることができる．

ここで，式(21)の直線補間が成立するためには，フィルタ処理された $g'(s,\theta)$ が，低次の多項式で近似できなければならない．ところが，フィルタ$|\xi|$は高周波成分を強調するフィルタであるため，$g'(s,\theta)$は空間周波数が高くなり，低次の多項式では近似しきれない．例として，図 4 に一辺が 128pixel である正方形を含む原画像 $f(x,y)$とその射影 $g(s,\theta)$，フィルタ処理後の射影 $g'(s,\theta)$の絶対値，$g'(s,\theta)$の $\theta_i=\pi/2$ における断面を示す．変数 x , y , s , θ の各軸方向のサンプリング数は，いずれも 256 としてある．フィルタ処理後の射影 $g'(s,\theta)$には部分的に急峻な勾配が生じ，空間周波が高くなっており，線形補間で内挿すると大きな誤差を生じることが予想される．

3.2 B-スプライン曲線の投影定理への応用

そこで，フィルタ処理された一次元射影 $g'(s,\theta)$を 3 次 B-スプライン曲線にあてはめて曲線補間する方法を示す．$g'(s,\theta)$の制御点を $\boldsymbol{q}(s_k,\theta)$とし，この離散的フーリエ変換を $\boldsymbol{Q}_\theta^*(\xi)$とする．式(14)と式(18)より，

$$\boldsymbol{Q}_\theta^*(\xi)=C_3(\xi)\mathrm{FT}\{g'(s,\theta)\}=C_3(\xi)\,H(\xi)\,G_\theta(\xi)$$

が得られる．ここで，$H'(\xi)=C_3(\xi)\,H(\xi)$とおくと，

$$\boldsymbol{Q}_\theta^*(\xi)=H'(\xi)\,G_\theta(\xi) \tag{22}$$

と簡単な形になる．$H'(\xi)$は表 2 を用いて事前に計算しておけば一度に計算できる．式(22)で得られた $\boldsymbol{Q}_\theta^*(\xi)$を離散的フーリエ逆変換すれば，制御点$\boldsymbol{q}(s_k,\theta)$を得る．

よって，s のサンプリング間隔を Δs とし，

$s_t=x\cos\theta_l+y\sin\theta$，$t=s_t/\Delta s$，$k<t<k+1$，

$d=t-k$ としたとき，式(8)より B-スプライン曲線にあてはめて，

$$g'(s_t,\theta_l)\cong\sum_{k=0}^{N-1}N_{k,M}(t)\ \boldsymbol{q}(s_k,\theta_l)$$

よって，式(20)より，

$$f(x,y)\cong\sum_{l=0}^{N-1}g'(s_t,\theta_l)\Delta\theta$$

として，原画像を再構成できる．

この方法では，フィルタ関数 $H(\xi)$の適用が周波数領域で行われるため，フィルタ補正逆投影法を用いることになる．式(22)による掛け算は 1 回ですむので，従来のフィルタ補正逆投影法で $g'(s,\theta)$を算出するのに要する

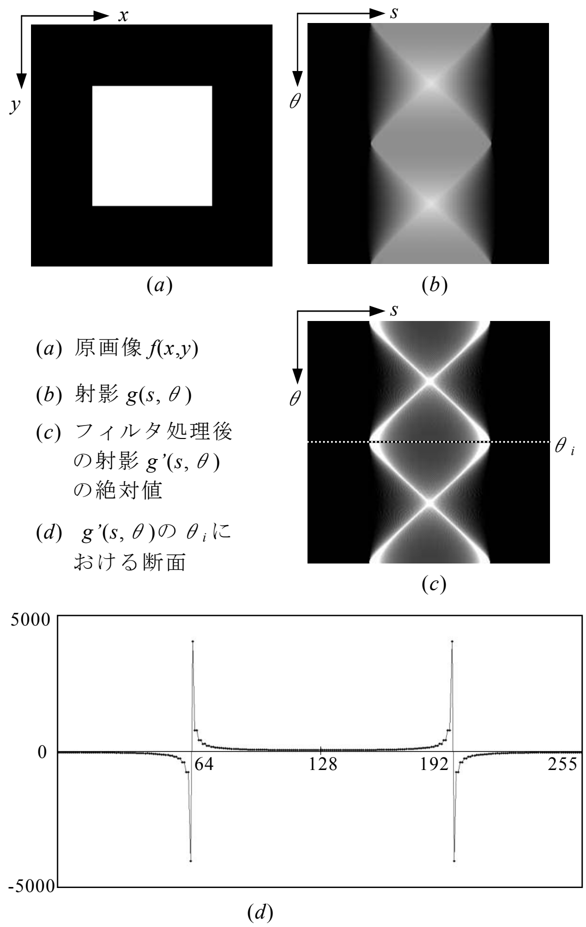


図 4　フィルタ処理後の射影 $g'(s,\theta)$の断面

時間と，本手法により制御点 $\boldsymbol{q}(s_k,\theta)$を求める時間とはほぼ同じになる．また適用するフィルタ $H(\xi)$は，コンボリューション法と等価である．

4.　実　　験

提案した B-スプライン曲線による曲線補間による画像再構成の性能を，コンボリューション法の直線補間による画像再構成の性能と比較する．比較のため，両手法ともフィルタ関数に，Shepp & Logan フィルタを使う [7]．

4.1 画像の再構成能力比較

Shepp & Logan フィルタは，周波数領域では式(23)で与えられる．コンボリューション法では，式(23)のフーリエ逆変換をフィルタとして，射影 $g(s,\theta)$に対するコンボリューションとして適用する．

$$H(\xi)=\frac{\xi_{\max}}{\pi}\left|\sin\left(\pi\xi/\xi_{\max}\right)\right| \tag{23}$$

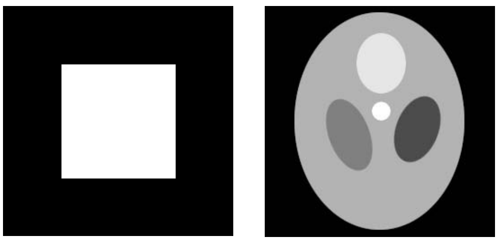
提案手法と Shepp & Logan フィルタを用いたコンボリューション法（これを SL フィルタと呼ぶことにする）は，全く同じフィルタを用いているため，フィルタ処理された射影 $g'(s, \theta)$は同じ結果を与える．よって，再構成画像$f(x, y)$に違いが生じるとすれば，それは極座標系の点から直交座標系の格子点に座標変換する際の内挿方法の違いによるものである．

図 5 に，適用する画像を示す．原画像 1 は正方形，原画像 2 は模擬 CT 図形である．大きさはいずれも 256×256pixel である．これを投影回数 256 回で射影 $g(s, \theta)$を作成し，これから原画像を再構成した．再構成時におけるノイズが及ぼす影響を見るため，射影 $g(s, \theta)$に対し，標準偏差 σ で 0.1%, 0.2%, 0.4%の正規ノイズを加えた．

画像の再現性は，原画像と再構成された画像間の正規化相関率 c_1 で求めた．同様にして，原画像の微分画像と再原画像の微分画像との間の正規化相関率 c_2 を求め，輪郭の再現性を見た．

図 6 に画像の再現性能を示す．画像 1 および画像 2 において，画像の再現性能はノイズの有無，大きさによらず両手法とも同じであった．また，図 7 に輪郭の再現性能を示す．輪郭の再現性は画像 1 と画像 2 のいずれも，提案手法の方がよかった．このことから，線形補間と曲線補間の違いが，輪郭の再現性能の違いをもたらしたことがわかる．

ところで，この性能の差はフィルタ関数の特性とは独立している．もともと式(23)の Shepp & Logan フィルタ



原画像 1　　原画像 2

図 5　実験で用いた画像

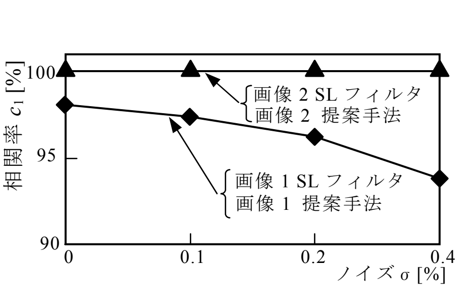


図 6　画像の再現性能

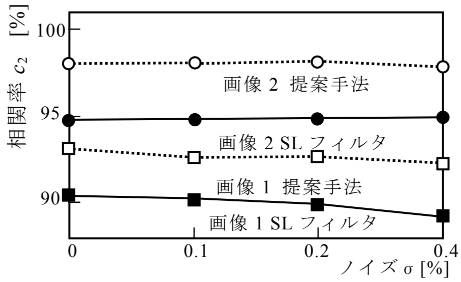
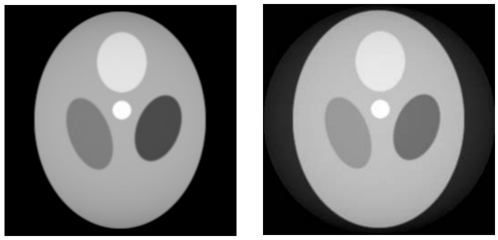
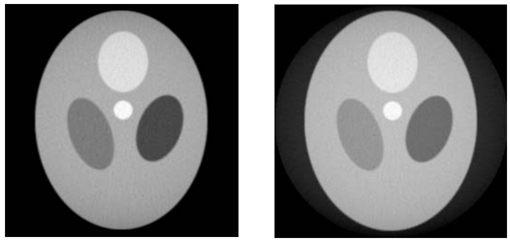


図 7　輪郭の再現性能



SL フィルタ　　提案手法

図 8　再構成画像（ノイズなし）



SL フィルタ　　提案手法

図 9　再構成画像（ノイズあり σ＝0.4%）

は高周波成分を低減するフィルタであるので，フィルタを適当に選ぶことにより，さらに輪郭を鮮明にすることができると期待される．図 8 と図 9 に，画像 2 の手法別再構成画像をノイズの条件を変えて示した．

4.2　処理時間比較

また両手法の単位サンプリング角度Δθ毎の画像再構成に要する処理時間を調べ，表 3 に示した．使用したパソコンは，Pentium4 (2.4GHz)搭載，Windows2000，メモリ 512MB で，プログラムは Visual c/c++ でコーディングした．提案手法では，FFT と FFT^{-1} 演算および周波数空間におけるフィルタ処理を行っているが，SL フィルタ法のコンボルーション処理にくらべて 3 倍も速い．また，逆投影に要する処理時間は SL フィルタ法に比べて 1.2 倍程度であり，フィルタ処理ですでに制御点が求まった上で曲線補間しているため，直線補間の時間と大

表 3　処理時間（サンプリング角度あたり；単位ミリ秒）

	フィルタ	逆投影	合 計
ＳＬフィルタ法	0.9	17.1	18.0
提案手法	0.3	21.1	21.4

差ない．また，実用的には，フィルタ処理と逆投影演算は角度毎に行うため，X 線射影画像の撮像時間内に処理できれば，提案手法でも SL 法でも処理時間はみかけ上同じになる．さらに，提案手法のプログラミングコストは, パッケージ化された FFT ライブラリを使うことができるので，SL 法と同程度である．

5.　ま と め

B-スプラインの制御点を，周波数領域における係数関数との掛け算から求める技術を投影定理に応用し，フィルタ処理された射影の極座標データを，直交座標の格子点に内挿する際に B-スプライン曲線を用いて行う方法を提案した．また，Shepp & Logan フィルタを用いたコンボリューション法と比較し，射影に付加されたノイズの有無によらず，画像の再現性能が同等であること，輪郭の再現性能が高いことを確認した．さらに，処理時間がコンボリューション法と大差なく，十分に実用レベルにあることも確認した．

本手法は，B-スプライン曲線の制御点を周波数領域における係数関数との掛け算で行うため，連立 1 次方程式を解く必要がない．また，この係数関数との掛け算も，フィルタ関数との掛け算と合成した形で 1 度に行うことができるので，制御点を計算するために要する時間は見かけ上，ゼロになる．

また，本手法は，現在実用化された技術では主流となっている Shepp & Logan フィルタを用いたコンボリューション法と等価なフィルタを用いている．このため，再構成画像の再現性は保証されている．しかも，輪郭の再現性はこれを上回る．

本研究は，文部科学省の科研費(C2,No.15560099)の補助によって行われた．ここに感謝申し上げる．

参 考 文 献

1) 沼田宗敏，野村俊，神谷和秀，輿水大和，田代発造：B-スプライン基底関数の確率密度関数としての性質,精密工学会秋季大会学術講演論文集 K15(2003)

2) Radon, J., 1917, Ueber die Bestimmmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten : Ber. Saechs. Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse (in German), **69**, 262-277.

3) Metz CE and Pan X : A Unified analysis of exact methods of inverting the 2-D exponential Radon transform, with implications for noize control in SPECT , IEEE Trans. on Medical Imaging,Vol.14, No.4, pp.643-658(1995)

4)田代晋久，中村尚人，岩原正吉，山田外史：投影法を用いた磁界の可視化－その原理，日本応用磁気学会誌，23，1549-1552(1999).

5)篠原広行:重畳積分法による画像再構成,東京放射線,Vol.33,No.385,p.5-20(1986)

6) D.Achilles:New algorithms for fast convolution based on convolution preserving spline signals, IEEE, ICASSP-79,p486-489(1979)

7) Shepp A, Logan BF : The Fourier reconstruction of a head section. IEEE Trans Nucl Sci NS21: p.21-43, 1974

付　　録

A.1　B-スプライン曲線 $\boldsymbol{p}(t)$のフーリエ変換の計算

デルタ関数 $\delta(t)$を使って，式(9)の $\boldsymbol{q}(k)r'_{m}(t-k)$を積分形式に書き換えると，
標本化間隔 $T = 1$ として，

$$\boldsymbol{q}(kT)r_m'(t-kT) = \int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(s)r_m'(t-s)\delta(s-kT)ds \tag{A1}$$

ところで，式(9)において，$\boldsymbol{q}(k) = \boldsymbol{q}(k+Ni$; i∈整数)なる周期性 N を仮定すると，

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(k)\,r_m'(t-kT) \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{A2}$$

式(A2)に式(A1)を代入して，

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(s)r_m'(t-s)\delta(s-kT)ds\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(s)r_m'(t-s)\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(s-kT)\right\}ds$$

ここで，{ }内をフーリエ級数であらわすと，

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(s-kT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{j\frac{2\pi ns}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(s-kT)\right)e^{-j\frac{2\pi ns}{T}}ds\right\}e^{j\frac{2\pi ns}{T}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\delta(s)e^{-j\frac{2\pi ns}{T}}ds\right\}e^{j\frac{2\pi ns}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}ds\right\}e^{j\frac{2\pi ns}{T}}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j\frac{2\pi ns}{T}}$$

よって，

$$\boldsymbol{p}(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(s)e^{j\frac{2\pi ns}{T}}r_m^{'}(t-s)\,ds\right\}$$

これをフーリエ変換すると，畳みこみのフーリエ変換の性質から，

$$\begin{aligned}\mathrm{FT}\{\boldsymbol{p}(t)\}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(s)e^{j\frac{2\pi ns}{T}}r_m^{'}(t-s)\,ds\right\}e^{-j2\pi tu}dt\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{q}(s)e^{j\frac{2\pi ns}{T}}r_m^{'}(t-s)\,ds\right\}e^{-j2\pi tu}dt\right]\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{FT}\{\boldsymbol{q}(t)e^{j\frac{2\pi nt}{T}}\}\mathrm{FT}\{r_m^{'}(t)\}\right]\\&=\frac{1}{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{FT}\{\boldsymbol{q}(t)e^{j\frac{2\pi nt}{T}}\}\right]\mathrm{FT}\{r_m^{'}(t)\}\\&=\frac{1}{T}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{Q}(u-\frac{n}{T})\right\}R_m^{'}(u)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{Q}(u+\frac{n}{T})\right\}R_m^{'}(u)\qquad\text{(A3)}\end{aligned}$$

さて，{ }内の関数のフーリエ係数は，

$$\boldsymbol{c}_n=\boldsymbol{q}(-nT)$$

よって，{　}内の関数のフーリエ級数は $u=k/N$ として，

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{Q}(u+\frac{n}{T})&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\boldsymbol{c}_n e^{j2\pi nTu}\right\}\qquad\text{(A4)}\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\boldsymbol{q}(-nT)e^{j2\pi nTu}\right\}\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\boldsymbol{q}(nT)e^{-j2\pi nTu}\right\}\end{aligned}$$

さて，$\boldsymbol{q}(t)$の離散的フーリエ変換を，$\boldsymbol{Q}^*(u)$とすると，

$$\boldsymbol{Q}^*(u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\boldsymbol{q}(n)e^{-j2\pi nu}\right\}\qquad\text{(A5)}$$

式(A3),(A4)より

$$\begin{aligned}\mathrm{FT}\{\boldsymbol{p}(t)\}&=\frac{1}{T}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\boldsymbol{q}(nT)e^{-j2\pi nTu}\right\}\right\}R_m^{'}(u)\\&=\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\boldsymbol{q}(n)e^{-j2\pi nu}\right\}\right\}R_m^{'}(u)\end{aligned}$$

ここで，再度，$0\leqq u<1$　すなわち，$0\leqq n<N$ に戻して，

$$\boldsymbol{P}(u)=\mathrm{FT}\{\boldsymbol{p}(t)\}=\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\boldsymbol{q}(n)e^{-j2\pi nu}\right\}\right\}R_m^{'}(u)\qquad\text{(A6)}$$

式(A6)に式(A5)を代入して，

$$\boldsymbol{P}(u)=N\boldsymbol{Q}^*(u)R_m^{'}(u)\qquad\text{(A7)}$$

（証明終)