

部分空間法の理論拡張と物体認識への応用

福井 和広[†] 山口 修^{††}

[†] 筑波大学大学院 システム情報工学研究科 コンピュータサイエンス専攻
〒 305-8573 つくば市天王台 1-1-1
^{††} (株) 東芝 研究開発センター マルチメディアラボラトリー
〒 212-8582 川崎市幸区小向東芝町 1
E-mail: †kfukui@cs.tsukuba.ac.jp, ††osamu1.yamaguchi@toshiba.co.jp

あらまし 本稿では部分空間法から相互部分空間法、制約相互部分空間法、さらにはその非線形化に至る一連の理論拡張と、これにより実現される 3 次元物体認識に対する新しいアプローチについて述べる。一般に物体の見え方パターンは特徴空間において低次元の部分空間に局所的に分布する。ここで見え方パターン分布がその物体の 3 次元形状を反映していることを考えると、一旦、見え方パターン分布から部分空間が生成できれば、3 次元物体認識は部分空間同士の構造的な類似性を測る問題へと変換される。したがって、部分空間の類似性を両者のなす正準角により測る、一連の部分空間法ベースの認識法は 3 次元物体認識との適合性が極めて高いと言える。さらに、より高い識別性能を実現するためには、2 つの物体形状の差異が顕著に現れる画像部分を識別において選択的に用いることが有効である。これは制約相互部分空間法と呼ばれる枠組みにおいて、部分空間の差異を表す一般化差分部分空間を導入し、比較すべき部分空間の一般化差分部分空間への射影に対して正準角を測ることで実現できる。本アプローチの有効性は顔画像認識の実験結果により示す。

A Theoretical Extension of the Subspace Method and its Application for 3D Object Recognition

Kazuhiro FUKUI[†] and Osamu YAMAGUCHI^{††}

[†] University of Tsukuba, Graduate School of Systems and Information Engineering
1-1-1 Tennoudai, Tsukuba, Ibaragi, Japan

^{††} Toshiba Corporate R&D Center Komukai-Toshiba-chou 1, Saiwai-ku, Kawasaki, Japan
E-mail: †kfukui@cs.tsukuba.ac.jp, ††osamu1.yamaguchi@toshiba.co.jp

Abstract This paper describes a theoretical extension of the Subspace Method to Constraint Mutual Subspace Method. The extension can enable us to realize a new approach in a framework of view-based 3D object recognition. The validity of our approach using Constrained Mutual Subspace Method is demonstrated through fundamental experimental results of face recognition.

1. ま え が き

本稿では部分空間法から相互部分空間法、そして制約相互部分空間法への理論拡張により、3 次元物体認識に対する新しいアプローチを実現する。従来の 3 次元物体認識は、特徴点の幾何学的な関係に基づくモデルベースの方法と、物体の見え方に基づく“View-based”の方法に大別できる。

前者はステレオ視覚や、Shape from Motion に代表されるように画像から検出された特徴点の 2 次元座標から 3 次元座標を幾何学計算により求め、これにより 3 次元モデルを推定する。

特徴点が正確に検出できれば精度的には後者に比べて優れているが、実環境における特徴点検出は一般には不安定であり、必要な特徴点が十分に求まらない場合が多い。

一方、後者は、“Appearance-based”などとも呼ばれているが、本質は画像パターン認識そのものである。様々な視点や照明条件における物体の見え方を画像パターンとして予め記憶しておき、未知パターンとこれを照合することで 3 次元物体認識を行う。画像パターンを直接対象にするために、照明変動や物体の姿勢変化などに対処しなければならないが、前者に比べて必要な特徴点数は少なく、特徴点の高い検出精度も要求されな

い。このため実環境においても有効な物体認識法となっている。

View-based の認識法には、従来のパターン認識アルゴリズムの多くが適用可能である。中でも文字認識などで有効性が示されている部分空間法 [1] は 3 次元物体認識との適合性が極めて高い。これは以下の理由に拠る。一般に物体の見え方パターンは特徴空間に比べて遥かに低い次元の線形部分空間に局在している^(注1)。ある物体の見え方パターンの分布はその 3 次元形状に依存しているので、3 次元物体認識は比較すべき物体に付随する部分空間同士の構造的な類似性を測る幾何学的な問題に変換される。この点、入力ベクトルと辞書部分空間のなす角度 [2]、あるいは入力ベクトルの辞書部分空間への射影長 [1] に基づいて識別を行う部分空間法 [1], [2] は、3 次元物体認識との適合性が高いと言える。部分空間法は極めて簡潔なアルゴリズムにも拘わらず、特徴抽出と識別を同時に行う優れた認識方法である。渡辺と飯島によりほぼ同時に提案されてから 30 年近く経った現在でも、カーネル関数を用いた非線形化などの理論的拡張が精力的に行われている [20] ~ [24]。

部分空間法の枠組みに基づいて 3 次元物体認識は実現できるが、部分空間法では入力ベクトルなので、十分に 3 次元形状を反映した認識を行っているとは言えない。そこで、図 1 に示すように入力側も部分空間として入力部分空間と辞書部分空間の構造的な類似性に基づいて 3 次元物体認識を行うという発想が出てくる。2 つの部分空間のなす角度は統計分野において正準角として古くから知られており、2 つの部分空間の幾何学的な関係はこれら複数の正準角により完全に規定される [10]。

正準角は相互部分空間法の枠組みなどにより求めることができ、これにより部分空間法に比べて、より優れた 3 次元物体認識が実現できる。しかしながら、識別の観点から見るとこの枠組みだけでは不十分である。これは部分空間法ベースの方法全般に言えることだが、各部分空間が他の部分空間との関係を考慮されずに生成されるためである。この事は各物体に共通する 3 次元形状をも考慮して識別することに相当する。本来、高い識別性能を実現するためには、両者の 3 次元形状の差異が顕著に現われる画像部分 (画素) を選択的に使うことが有効である。これは文字認識において、“犬” と “大” を識別するためには、点の有無を調べるのが有効であることから類推できる。文字認識では両者の差分ベクトルが有効であるが [25]、部分空間に対しては、2 つの部分空間の差異を表す差分部分空間が有効である。比較すべき 2 つの部分空間を差分部分空間への射影し、射影された部分空間同士の正準角を求める方法が制約相互部分空間法である。これにより両者の 3 次元形状の差異が顕著に現われる画像部分を選択的に用いて高精度な物体識別を行える。

以下では、まず物体の見え方パターンの部分空間による表現について述べる。次に部分空間法に対する一連の理論的拡張について述べ、これにより 3 次元物体認識への新しいアプローチが実現できることを示す。このアプローチの有効性は顔画像認識

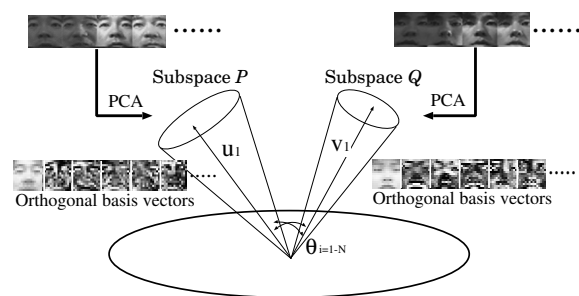


図 1 部分空間の構造的な類似性

を用いた評価実験により示す。

2. 見え方パターン分布の部分空間表現

物体表面が拡散反射面で形状が凸という条件下では、ある視点から見た任意照明条件における見え方パターンの分布は特徴空間中の 3 次元部分空間を構成する [5]。この条件はかなり理想的な条件であるが、これを緩めていった場合でも、高次元の特徴空間に対して遥かに低い次元の部分空間で表現できることが理論的に示されている [6]。より一般的には物体の見え方パターン分布は主成分分析 (PCA) により、低次元部分空間で近似できることが実験的に示されている。例えば、様々な照明条件で撮影された 15×15 ピクセルの正面顔パターン集合は、5 ~ 10 次元程度の線形部分空間で 99% の精度で表現可能である。

逆に視点と光源位置が固定され、物体が運動する場合でも、何らかの方法で正確な特徴点の対応付けができれば、これにより物体の姿勢や大きさを一定に正規化した後に、同様に部分空間を生成することができる [7]。しかしながら、実環境では特徴点の正確な対応付けは難しく、完全な正規化は実現困難である。例えば、顔画像認識では 3 次元的な正規化は行わず、目鼻などの特徴点を基準にした 2 次元アフィン変換による簡易な正規化が適用される場合が多い。このような場合には、先に挙げた条件がかなり崩れているために、見え方パターンの分布を低次元の線形部分空間でうまく表現することはできない。次元数を高くすれば部分空間に全ての見え方パターン分布が含まれるようになるが、見え方パターンに無関係なパターンも含まれるために、誤認識が生じ易くなる。このように線形部分空間による表現に無理がある場合には、カーネル非線形主成分分析 [19] により生成される非線形部分空間の導入が有効である。

3. 部分空間表現に基づく物体認識

ここではまず部分空間法と、その拡張である相互部分空間法について述べる。次に正準角なる概念を用いて相互部分空間法を一般化し、これにより 3 次元物体認識が実現できることを示す。

3.1 部分空間法から相互部分空間法への拡張

部分空間法 (Subspace Method) [1] は図 2 に示すように、入力ベクトル p のクラス Q のパターン分布を表す N 次元の部分空間 Q (辞書部分空間) への射影長 $|p'|$ あるいは両者の角度 θ に基づいて識別を行う。計算上は角度に基づいて $\cos^2 \theta$ を類似

(注1): n ピクセル $\times n$ ピクセルの 2 次元画像パターンは $n \times n$ 次元の特徴空間における一本のベクトルデータとして扱う。例えば 15×15 ピクセルの画像パターンは 225 次元の特徴空間における一本のベクトルデータとなる。

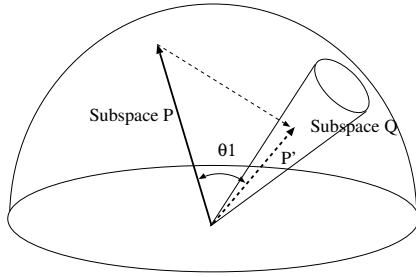


図 2 部分空間法のご概念図

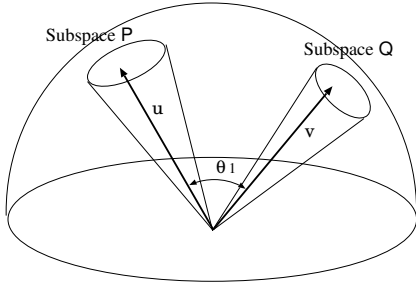


図 3 相互部分空間法のご概念図

度とする。

$$\cos^2 \theta = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{p}, \mathbf{e}_{ki})^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \quad (1)$$

ここでベクトル \mathbf{e}_k は辞書部分空間 Q_k を張る基底ベクトル、 $(\mathbf{p}, \mathbf{e}_{ki})$ は入力ベクトル \mathbf{p} と Q_k の第 i 基底ベクトル \mathbf{e}_{ki} との内積である。基底ベクトル \mathbf{e}_k はクラス Q_k に属するベクトル $\mathbf{X}_{kj} (j = 1 \sim n_k)$ から計算される自己相関行列 \mathbf{R}_k の固有ベクトルとして求まる。

$$\mathbf{R}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{X}_{kj}^T \quad (2)$$

部分空間の次元数は実験的あるいは固有値の寄与率に基づいて決める [1], [3]。識別時には入力ベクトルと各クラス毎に用意された辞書部分空間との類似度を求め、類似度が最も高く、しきい値以上の部分空間に相当するクラスを該当クラスと判定する。

相互部分空間法 (Mutual Subspace Method (MSM)) [8] は部分空間法の自然な拡張であり、図 3 に示すように入力もベクトルから部分空間に置き換えた方法である。2つの部分空間のなす最小角度 θ_1 に基づいて識別を行う。計算上は $\cos^2 \theta_1$ を類似度とする。

$$\cos^2 \theta_1 = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in P, \mathbf{v} \in Q \\ \|\mathbf{u}\| \neq 0, \|\mathbf{v}\| \neq 0}} \frac{|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2} \quad (3)$$

3.2 相互部分空間法の一般化

2つの部分空間の成す角度である、正準角という概念を用いて相互部分空間法は一般化できる。M次元部分空間 P と N次元部分空間 Q (便宜上、 $M \geq N$ と仮定) の間には N個の正準角

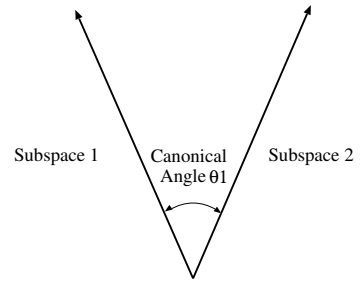


図 4 1次元部分空間のなす正準角

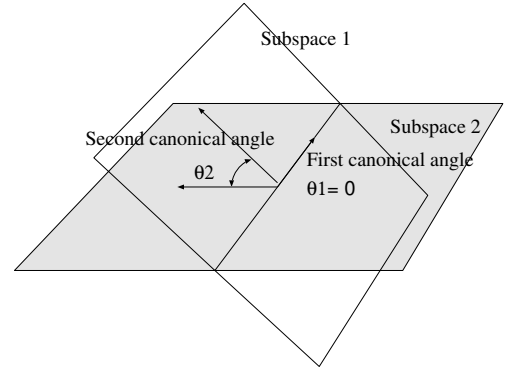


図 5 2次元部分空間のなす正準角

が定義できる [10]。第1正準角 θ_1 は相互部分空間法で用いられている2つの部分空間のなす最小角である。第2正準角 θ_2 は最小正準角 θ_1 に直交する方向において計った最小角、同様に第3正準角 θ_3 は第2正準角 θ_2 に直交する方向で計った最小角である。以下同様に N個の正準角が順次求まる。これを式で書くと次のようになる。

$$\cos^2 \theta_i = \max_{\substack{\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j (j=1, \dots, i-1) \\ \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j (j=1, \dots, i-1)}} \frac{|(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)|^2}{\|\mathbf{u}_i\|^2 \|\mathbf{v}_i\|^2} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4)$$

ここで $\mathbf{u}_i \in P, \mathbf{v}_i \in Q, \|\mathbf{u}_i\| \neq 0, \|\mathbf{v}_i\| \neq 0$ である。

多次元空間における正準角の図示は不可能であるが、3次元空間における正準角は図示できる。例えば図 4 に示すように、2つの1次元部分空間 (ベクトル) のなす正準角は単純に両者のなす角度となる。また2つの2次元部分空間に対しては図 5 に示すような2つの正準角 θ_1 と θ_2 が定まる。ただし、この場合には2つの部分空間が共通部分空間を持つために最小正準角 θ_1 は0度となっている。

3.3 正準角の計算

正準角 θ の算出が部分空間に対する射影行列の積に対する固有値問題に帰着されることは統計学では古くから知られていた。これによると部分空間 P と Q の基底ベクトルから計算される射影行列の積 \mathbf{QP} あるいは \mathbf{PQ} の第 i 番目に大きい固有値が $\cos^2 \theta_i$ となる [10]。ここで各射影行列は各部分空間の基底ベクトルを Φ_m, Ψ_n とする次式で書ける。

$$\mathbf{P} = \sum_{m=1}^M \Phi_m \Phi_m^T \quad (5)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=1}^N \Psi_n \Psi_n^T \quad (6)$$

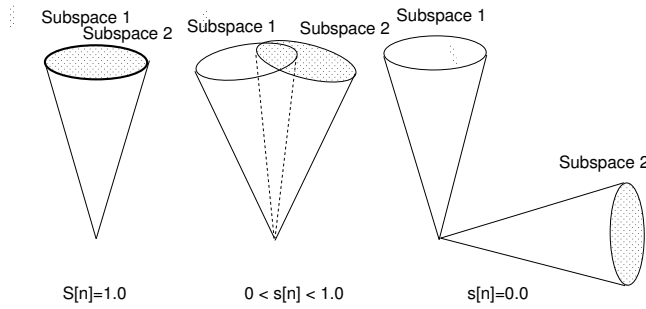


図 6 部分空間の構造的な類似度

相互部分空間法の導出においても本質的に同じ固有問題が導出され、 $\cos^2\theta_1$ が射影行列の積 QPQ あるいは PQP の最大固有値となることが示されている [8]^(注2)。ただし計算上はこの固有値問題は、以下の小さい行列 S の固有値問題に変換でき、その固有値 λ から正準角が求まる。

$$S\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (7)$$

$$S = (x_{ij}), \quad (i, j = 1 \sim N) \quad (8)$$

$$x_{ij} = \sum_{m=1}^N (\Psi_i, \Phi_m)(\Phi_m, \Psi_j)$$

ここで Ψ_i と Φ_i は、先に示した部分空間 P と Q の i 番目の基底ベクトルである。

3.4 部分空間の構造的な類似度

2つの部分空間の構造的な類似性を測る尺度として、第 n 正準角まで考慮した類似度 $S[n]$ を次のように定義する。

$$S[n] = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n} \quad (9)$$

ここで固有値 λ_i は、行列 S の i 番目に大きい固有値である。類似度 $S[n]$ は図 6 に示すように、2つの部分空間が完全に一致する時に最大値 1.0 となり、両者が離れるにつれて低下してゆき、完全に両者が直交する時に最小値 0.0 となる。

類似度 $S[n]$ ($n > 1$) が有効となるのは、比較する 2 つの分布が多様なデータを含んでいる場合である。例えばカメラを移動させることで複数視点からの見え方パターンを獲得できる場合 [16] や、複数カメラで異なる視点からのパターンを一挙に獲得できる場合 [15] などはこの条件を満足する。逆に単一カメラで対象物の動きが少ない場合には、パターン分布が極めて小さい次元に縮退するために類似度 $S[n]$ ($n > 1$) は有効ではなく、むしろ識別性能の劣化を引き起こす可能性があるので適用には注意が必要である^(注3)。

(注2)：多変量解析の中心的な手法である正準相関分析や等均質理論においても相関係数を求める過程で同じ固有値問題が導出されている [9]。特に正準相関分析におけるデータを各部分空間を張る正規基底ベクトルとする特別な場合が相互部分空間法と見なせる。

(注3)：正準角の分布は 3 次元形状に関する重要な情報が含まれており、更に議論が必要である [14]。

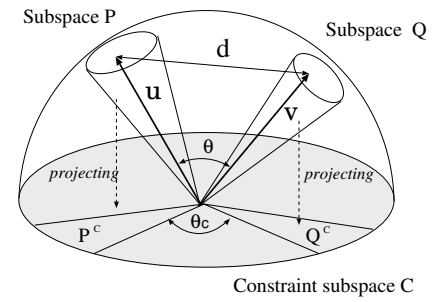


図 7 制約相互部分空間法概念図

4. 制約相互部分空間法による識別

4.1 制約相互部分空間法のアルゴリズム

複数の正準角を用いた相互部分空間法は、3次元物体認識に対する極めて有効なアプローチとなっているが、先に述べたように識別性能に関しては最良とは言えない [3]。相互部分空間法には、各クラス部分空間の共通空間のように本来は識別に貢献しない成分を抑制する機構が無く、このような不要な成分まで含めた識別を行うことで誤識別を引き起こす。これは正準角 θ をなす 2 つのベクトル $\mathbf{u} \in P$ と $\mathbf{v} \in Q$ の差分ベクトル $\mathbf{d}(|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \neq 0)$ に、識別に不要な変動が含まれることを意味する。したがって、高い識別性能を実現するためには、同一クラス内の変動をできるだけ抑制し、逆に識別に有効な他クラスとの差異を選択的に抽出し、これを用いて識別することが重要である^(注4)。

これを実現する方法として、制約相互部分空間法 (Constrained Mutual Subspace Method (CMSM)) [11] が提案された。制約相互部分空間法は、図 7 に示すように、識別に有効な成分から構成される制約部分空間 C への射影を相互部分空間法に付加した方法である。入力部分空間 P と辞書部分空間 Q の制約部分空間 C への射影 P^c と Q^c に対して正準角を測る。制約相互部分空間法の類似度は式 (4) に対応して以下のように定義できる。

$$\cos^2\theta_i^c = \max_{\substack{\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j (j=1, \dots, i-1) \\ \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j (j=1, \dots, i-1)}} \frac{|\langle \mathbf{u}_i^c, \mathbf{v}_i^c \rangle|^2}{\|\mathbf{u}_i^c\|^2 \|\mathbf{v}_i^c\|^2} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (10)$$

ここで $\mathbf{u}_i^c \in P^c$, $\mathbf{v}_i^c \in Q^c$, $\|\mathbf{u}_i^c\| \neq 0$, $\|\mathbf{v}_i^c\| \neq 0$ である。

4.2 制約部分空間の生成

制約相互部分空間法を適用するためには、問題に応じて如何に制約部分空間を生成するかが重要な課題である。制約部分空間は様々な方法により生成できるが [12]、ここでは部分空間同士の差異を表す差分部分空間を基本とする生成法を述べる。

4.2.1 差分部分空間の幾何学的な定義

図 11 に示すように、差分部分空間は 2 つの部分空間 P と Q の差異を表す部分空間であり、 P と Q の成す正準角を形成する 2 つのベクトル \mathbf{u} と \mathbf{v} の差分ベクトル \mathbf{d} 集合により張られ

(注4)：これはクラス部分空間同士をできるだけ直交化させることに相当すると考えられる。

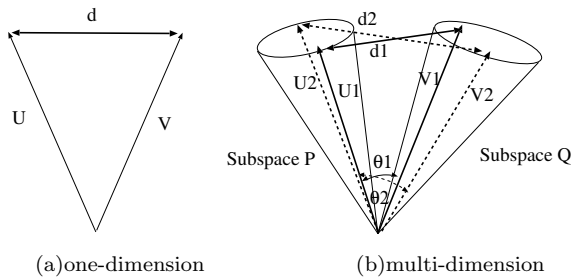


図 8 差分部分空間の概念図:(a) 2つのベクトルに対する差分ベクトル、(b) 多次元における差分部分空間

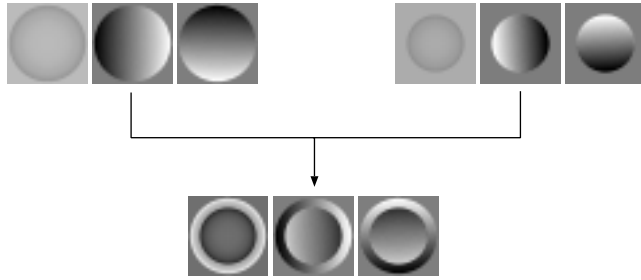


図 9 2つの照明空間に対する差分部分空間：異なる直径の半球に対する2つの3次元部分空間と、両者に対する3次元差分部分空間を示している。

る [11], [13]。幾何学的には差分部分空間は2つのベクトルに対する差分ベクトルの多次元への拡張となっている。

既に述べたように M 次元部分空間 P と N 次元部分空間 Q に対して N 個の正準角 $\theta_i (i = 1, \dots, N)$ が定義できる。ここで i 番目に小さい正準角 θ_i を形成する2つのベクトル u_i と v_i の差分ベクトルを $d_i = u_i - v_i$ とすると、 N 個の差分ベクトル d_i はお互いに直交している。そこで N 個のうち t 番目までの差分ベクトルを長さを 1.0 に正規化して、 t 次元の差分部分空間 D_2 の基底ベクトルとする。

図 9 は直径の異なる2つの半球物体に対する3次元部分空間と両者の3次元差分部分空間を張る基底ベクトルを表している。差分部分空間の基底ベクトルは両者の3次元形状の差異を反映していることが見て取れる。差分部分空間は幅広い概念なので様々な応用が考えられる。例えば、差分部分空間と形状差の関係付けはフォトメトリクスなどとも関連し、理論的にも興味深い問題ある。

4.2.2 射影行列による差分空間の定義

先に正準角により幾何学的に定義した差分部分空間は、部分空間 P と Q に対する射影行列の和に基づいて定義できる。この事は次のようにして示される。

行列 PQ の i 番目の固有値 $\lambda_i(PQ)$ と行列 $P + Q$ の i 番目の固有値 $\lambda_i(P + Q)$ に $\lambda_i(PQ) = (\lambda_i(P + Q) - 1)^2$ の関係 [9] があることを利用すると、過程は省略するが以下の関係^(注5)が導き出される [13]。

(1) 正準角 θ_i を形成するベクトル u_i と v_i のベクトル和 $u_i + v_i$ は、 $P + Q$ の i 番目の固有値 (> 1.0) に対応する固有

(注5): 2つの部分空間に重複が無い場合

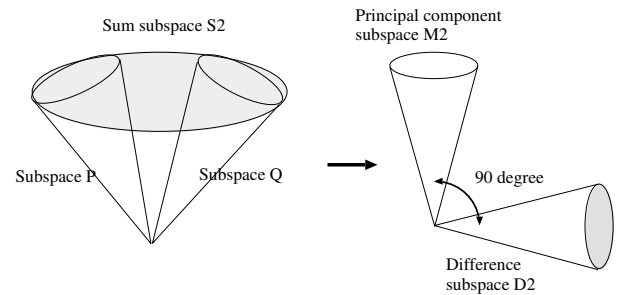


図 10 和空間の主成分部分空間と差分部分空間への分解

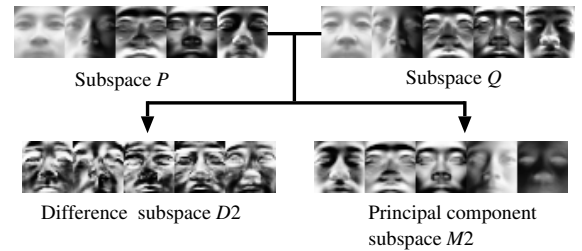


図 11 差分部分空間と主成分部分空間：異なる人物の顔部分空間 P と Q の差分部分空間 D_2 と主成分部分空間 M_2 への分解を示している。

ベクトルである。

(2) ベクトル u_i と v_i の差分ベクトル $u_i - v_i$ は、 $P + Q$ の $N \times 2 - i$ 番目の固有値 (≤ 1.0) に対応する固有ベクトルである。

この関係から「射影行列の和 $P + Q$ の $N \times 2$ 個の固有ベクトルのうちで固有値が 1.0 以下の N 個が差分部分空間 D_2 を張る基底ベクトルとなる」ことがわかる。ここで $P + Q$ の固有値が大きい側の固有ベクトルが張る空間を主成分部分空間 M_2 と呼ぶとすると、 $P + Q$ の全固有ベクトルが張る部分空間 P と Q の和空間 S_2 は主成分部分空間 M_2 と差分部分空間 D_2 に直交直和に分解できることがわかる。このことから差分部分空間 D_2 は和空間 S_2 から主成分部分空間 M_2 を取り除いた空間であると解釈できる (図 10)。この解釈の意味するところは、2つの部分空間の差異として求めた差分部分空間が、同時に2つの部分空間の平均的な空間に直交、すなわち同一クラス内の平均的な変動を含まないという条件を満足しているということである。

図 11 は異なる人物の部分空間 P と Q の和空間が、両者に対する差分部分空間 D_2 と主成分部分空間 M_2 に直交分解される様子を示している。

4.2.3 差分部分空間の一般化

差分部分空間 D_2 は和空間 S_2 から主成分部分空間 M_2 を取り除いた空間であるという解釈を、 $k (\geq 2)$ クラスの識別問題に対して適用すると、図 12 に示すように一般化された差分部分空間 D_k を k 個の N 次元部分空間が形成する和空間 S_k からこれらの主成分部分空間 M_k を取り除いた空間として定義できる。この定義に従えば、一般化された差分部分空間 D_k は k 個の射影行列 $P_i (i=1 \sim k)$ の総和 G に対する固有ベクトルで、固有値 λ が小さい方から順に選んだ n_c 個のベクトル

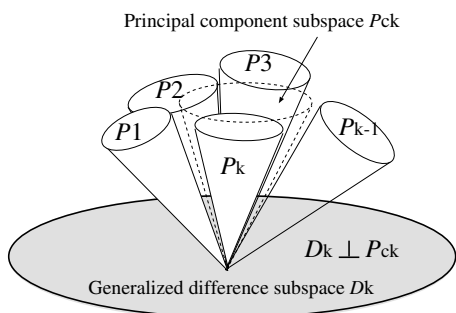


図 12 一般化差分部分空間の概念図

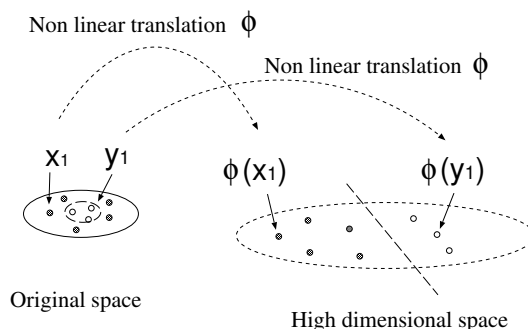


図 13 カーネル関数による非線形変換

$\mathbf{d}_{N \times k}, \mathbf{d}_{N \times k-1}, \dots, \mathbf{d}_{N \times k-n_c+1}$ により張られることになる。 n_c の値は実験的に定める。

$$\mathbf{G}\mathbf{d} = \lambda\mathbf{d} \quad (11)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k$$

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{S}\mathbf{P}(\mathbf{d}_{N \times k}, \mathbf{d}_{N \times k-1}, \dots, \mathbf{d}_{N \times k-n_c+1}) \quad (12)$$

$$\lambda_{N \times k} < \lambda_{N \times k-1} < \dots < \lambda_{N \times k-n_c+1}$$

ここで改めて差分部分空間 \mathbf{D}_k を制約部分空間 \mathcal{C} とする。

4.2.4 同一クラスの統合化

形式的には式 (11) は各部分空間の基底ベクトルをデータとした主成分分析と見なせる。したがって、この式だけでは制約相互部分空間法と、主成分部分空間へ射影したうえで識別を行う主成分分析法との差異は、固有値の大きい側あるいは小さい側のどちらの固有ベクトルが張る空間に射影するかという点だけに思われる。しかしながら、両者においては同一クラスに属する部分空間の集合あるいは原データ集合が一つの部分空間で表されているか否かが大きく異なる。このように一つの部分空間で表すことを統合化と呼ぶことにする。

統合化を行なったうえで生成した制約部分空間 \mathcal{C} には、各カテゴリー部分空間の共通な成分は含まれない。一方、統合化を行わない場合には、同一クラス内の変動が制約部分空間に含まれることになり、識別時にこの変動成分の影響により誤認識が生じることになる [13]。

4.2.5 制約相互部分空間法の流れ

制約相互部分空間法による物体認識の流れは以下ようになる。まず複数の見え方パターンから主成分分析 (PCA) やグラム・シュミットの直交化などにより入力部分空間を生成する^(注6)。次に入力部分空間 \mathcal{P} と辞書部分空間 \mathcal{Q} を制約部分空間へ射影する。ここで入力部分空間 \mathcal{P} の制約部分空間 \mathcal{C} への射影 \mathcal{P}_c は以下の手順で求まる。

(1) 部分空間 \mathcal{P} を張る M 個の基底ベクトルの制約部分空間上への射影ベクトルを求める。

(2) 各射影ベクトルの長さを正規化する。

(3) M 個の正規化ベクトルに対してグラムシュミットの直交化を施す。

(注6): このような複数視点の画像はマルチカメラ [15] やロボット視覚 [16] のように自分自身が運動して視点を変化させることで得られる。

(4) 直交化された M 個の正規化ベクトルが射影部分空間 \mathcal{P}_c の基底ベクトルとなる。

同様の手順で辞書部分空間 \mathcal{Q} の制約部分空間 \mathcal{C} への射影 \mathcal{Q}_c が求まる。辞書部分空間は予め制約部分空間に射影しておくので計算量の増加は少ない。こうして得られた \mathcal{P}_c と \mathcal{Q}_c に対して式 (9) で定義された類似度 S を求める。

5. カーネル関数を用いた非線形化

先に述べたように不完全な正規化などが原因で、見え方パターン分布が線形部分空間でうまく表現できない場合には、カーネル関数を用いた非線形識別が有効である。以下では非線形主成分分析 [19] をベースにして非線形特徴空間上に一般化差分部分空間を構築し、これによりカーネル非線形制約相互部分空間法 (KCMSM) を実現する [26]。

5.1 カーネル非線形主成分分析

非線形空間上で一般化差分部分空間を形成するための準備として、カーネル非線形主成分分析について述べる。 m 次元の原パターン \mathbf{x} を非線形変換 ϕ により、原空間に比べて遥かに高い次元 d_ϕ の空間 (以下、非線形空間) に写像する (図 13 参照)。

$$\phi: \mathbf{x} \rightarrow \phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{d_\phi}(\mathbf{x})) \quad (13)$$

非線形空間上の写像に対して主成分分析や生成した非線形部分空間への射影を行うためには、写像 $\phi(\mathbf{x})$ と写像 $\phi(\mathbf{y})$ 間の内積を計算する必要がある。しかし、非線形空間上において、この内積 $(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}))$ を直接計算することは、対象とするベクトルの次元が極めて高いために計算困難 (無限次元空間では不可能) となる。ところが非線形変換 ϕ をカーネル関数 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を介して定義すると、内積 $(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}))$ は原パターンベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} から計算することができる。これが“カーネルトリック”と呼ばれる計算技法である。具体的な非線形変換 ϕ が存在するためには、カーネル関数 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が Mercer の条件を満足する必要があり、例えば以下のような関数が存在する。

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\sigma}\right) \quad (14)$$

このガウシアン関数を適用した場合には、原パターンベクトルは無次元空間へ写像されることになる。

カーネルトリックを用いた非線形特徴空間上の主成分分析が、カーネル非線形主成分分析法である [19]。導出過程は省略する

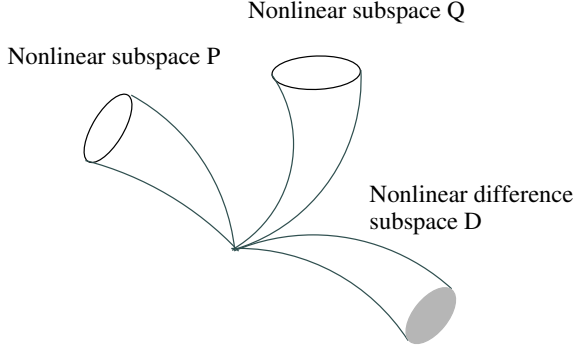


図 14 カーネル非線形差分部分空間の概念図

が、非線形主成分分析の計算はカーネル関数を介して m 個の学習パターン $\mathbf{x}_s (s = 1 \sim m)$ から求まる $m \times m$ 行列 \mathbf{K} の固有値問題に帰着される。

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (15)$$

行列 \mathbf{K} は次式で定義される。

$$\mathbf{k}_{st} = (\phi(\mathbf{x}_s), \phi(\mathbf{x}_t)) \quad (16)$$

$$= k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t) \quad (17)$$

入力ベクトル \mathbf{x} の非線形主成分の第 i 基底ベクトル \mathbf{e}_i への射影成分は次式で定義される。

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \sum_{s=1}^m \frac{a_{is}}{\sqrt{\lambda_i}} k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) \quad (18)$$

ここで λ_i は行列 \mathbf{K} の第 i 番目に大きい固有値、 a_{is} は固有値 λ_i に対応する固有ベクトル \mathbf{a}_i の第 s 成分である。

5.2 カーネル非線形差分部分空間の生成

非線形空間において非線形一般化差分部分空間を形成するための具体的な計算について述べる。一般化差分部分空間の生成、およびそれへの射影はベクトル内積で構成され、カーネルトリックを用いた非線形化が容易に可能である。基本的な生成の流れは既に述べた線形空間における一般化差分部分空間と同様であり、線形クラス部分空間を非線形クラス部分空間に置き換えるだけである。ここでは、識別クラス数が r 個、各クラス k 毎に m 個の学習サンプル \mathbf{x}^k から d 次元のクラス非線形部分空間が生成されているという条件で、 c 次元の非線形一般化差分部分空間を求める手順を示す。

まず、カーネル非線形主成分分析を用いて各クラス k 毎に非線形クラス部分空間を求める。このために各クラス k 毎に式 (15) で定義されたカーネル行列 \mathbf{K} の固有値問題を解いて、非線形クラス部分空間を張る d 個の基底ベクトル $\mathbf{e}_i^k (k = 1 \sim r, i = 1 \sim d)$ を求める。

$$\mathbf{e}_i^k = \sum_{s=1}^m \frac{a_{is}^k}{\sqrt{\lambda_i}} \phi(\mathbf{x}_s^k) \quad (19)$$

次に r 個の非線形クラス部分空間の全ての基底ベクトル、つまり合計 $r \times d$ 個の基底ベクトルからカーネル差分部分空間の基底ベクトルを求める。これは全ての基底ベクトルをデータ見

なして主成分分析を行なうことに相当する。ここで全基底ベクトルを並べた行列を \mathbf{E} とする。

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1^1, \dots, \mathbf{e}_d^1, \dots, \mathbf{e}_1^r, \dots, \mathbf{e}_d^r] \quad (20)$$

以下で定義される行列 \mathbf{D} の固有値問題を解く。

$$\mathbf{D}\mathbf{b} = \beta\mathbf{b} \quad (21)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = (\mathbf{E}[i], \mathbf{E}[j]) \quad (22)$$

$$i, j = 1 \sim r \times d$$

ここで $\mathbf{E}[i]$ は行列 \mathbf{E} の第 i 列成分を意味する。上式においてクラス c の第 i 基底ベクトル \mathbf{e}_i とクラス c^* の第 j 基底ベクトル \mathbf{e}_j^* の内積は次式で計算できる。

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*) = \left(\sum_{s=1}^m \frac{a_{is}}{\sqrt{\lambda_i}} \phi(\mathbf{x}_s), \sum_{t=1}^m \frac{a_{jt}^*}{\sqrt{\lambda_j^*}} \phi(\mathbf{x}_t^*) \right) \quad (23)$$

$$= \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{a_{is} a_{jt}^*}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j^*}} (\phi(\mathbf{x}_s), \phi(\mathbf{x}_t^*)) \quad (24)$$

$$= \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{a_{is} a_{jt}^*}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j^*}} k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t^*) \quad (25)$$

非線形差分部分空間の第 i 基底ベクトル \mathbf{d}_i は行列 \mathbf{D} の固有ベクトルの内で、固有値の小さい方から i 番目の固有ベクトル \mathbf{b}_i を重み係数として、以下のように基底ベクトル $\mathbf{E}[j] (i = 1 \sim (r \times d))$ の線形和で表される。

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^{r \times d} \frac{b_{ij}}{\sqrt{\beta_i}} \mathbf{E}[j] \quad (26)$$

$$= \sum_{j=1}^{r \times d} \frac{b_{ij}}{\sqrt{\beta_i}} \sum_{s=1}^m \frac{a_{js}^{class(j)}}{\sqrt{\lambda_j}} \phi(\mathbf{x}_s^{class(j)}) \quad (27)$$

$$= \sum_{j=1}^{r \times d} \sum_{s=1}^m \frac{b_{ij} a_{js}^{class(j)}}{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\lambda_j}} \phi(\mathbf{x}_s^{class(j)}) \quad (28)$$

ここで $class(j)$ は j 番目の基底ベクトル $\mathbf{E}[j]$ が属するクラス番号を表している。

5.3 カーネル非線形差分部分空間への射影計算

以上の準備により、入力ベクトル \mathbf{x} の非線形差分部分空間の第 i 基底ベクトル \mathbf{d}_i への射影成分は、入力ベクトル \mathbf{x} と $m \times r$ 個の全学習ベクトル $\mathbf{x}_s^k (s = 1 \sim m, k = 1 \sim r)$ を用いて次式により計算できる。

$$(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{d}_i) = \sum_{j=1}^{r \times d} \sum_{s=1}^m \frac{b_{ij} a_{js}^{class(j)}}{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\lambda_j}} (\phi(\mathbf{x}_s^{class(j)}), \phi(\mathbf{x})) \quad (29)$$

$$= \sum_{j=1}^{r \times d} \sum_{s=1}^m \frac{b_{ij} a_{js}^{class(j)}}{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\lambda_j}} k(\mathbf{x}_s^{class(j)}, \mathbf{x}) \quad (30)$$

したがって、入力ベクトル \mathbf{x} の $c (< r \times d)$ 次元のカーネル差分部分空間上への射影ベクトル \mathbf{f} の成分は以下で表される。

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_c) \quad (31)$$

$$f_i = (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{d}_i)$$

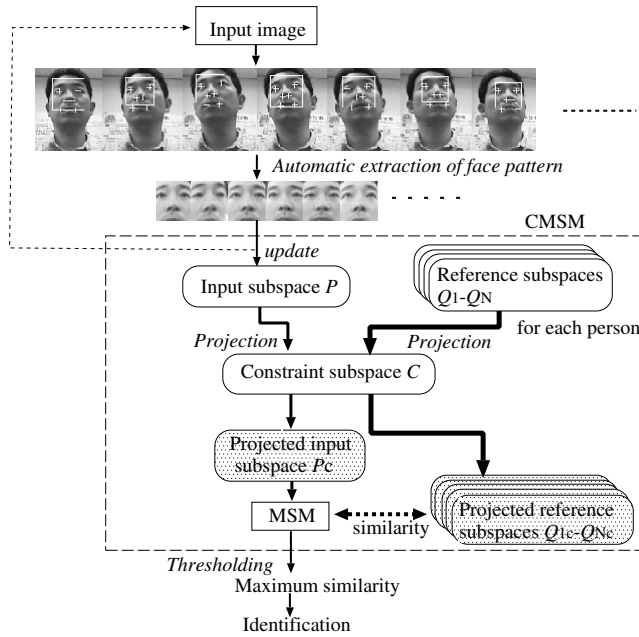


図 15 CMSM に基づく顔画像認識の流れ

射影ベクトル f は各クラスを識別するための有効な非線形特徴量となっており、これから各クラス部分空間を生成し、相互部分空間法を適用すればカーネル非線形制約相互部分空間法が構成できる。

6. 顔画像認識への応用

ここでは制約相互部分空間法による物体認識の具体的な応用例として顔画像認識について述べる^(注7)。顔画像認識は画像パターンによる3次元物体認識の重要な具体的な研究テーマの一つである。顔画像認識と共通点が多い文字認識の研究では、主に2次元面上のパターンを対象とする。これに対して顔画像認識の研究では表情変化などにより柔軟に変形する複雑な3次元物体が対象である。このため顔パターンは同一人物でも、顔向き、表情、光源の変動により大きく変化し、場合によっては髪型、化粧、眼鏡の有無、加齢などによるパターン変動がこれに加わる。一方、目、鼻、口などの基本部位から構成される顔の造りは、個人に依らずに万人共通である。したがって他人との識別を可能としているのは各部位の形状や配置の微妙な違いである。このような顔パターンの特性が、コンピュータによる顔認識を極めて困難な課題としている [28]。

6.1 制約相互部分空間法による認識の流れ

図 15 に制約相互部分空間法による顔認識の大まかな流れを示す [11]。光源位置を固定で、被験者には顔向きを上下左右に軽く振るように指示した。これにより光源と顔面の位置関係が変化し様々な顔の見え方パターンが得られる。処理は以下のようになる。まず入力画像から瞳と鼻孔を基準に正規化パターンを切り出し [27]、ヒストグラム平坦化を施す。正規化パターンが切り出される毎に同時反復法を用いて入力部分空間 P を更

(注7): この他にも、ジェスチャー認識や発話認識 [18]、ISAR 画像解析 [17] などにも有効であることを確認している。

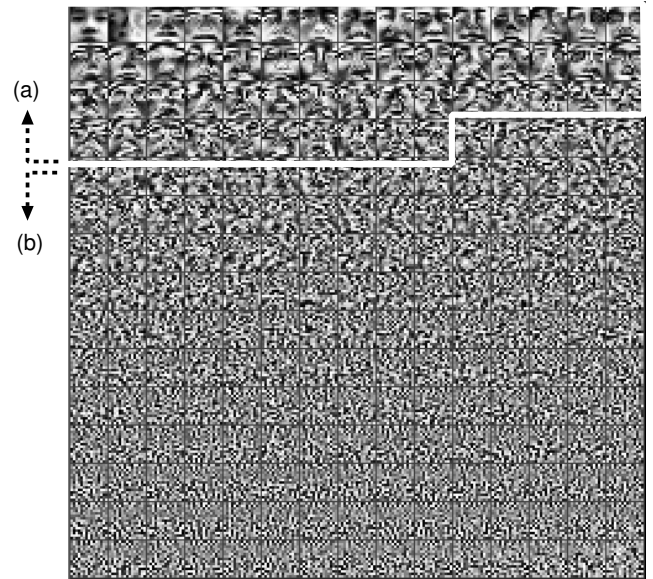


図 16 全固有ベクトル: (a) 主成分部分空間を張る 55 個の基底ベクトル, (b) 一般化差分部分空間を張る 170 個の基底ベクトル



図 17 制約部分空間の累積画像: 明るい画素ほど識別時に重視されることを示している。

新する [29]。次に入力部分空間を制約部分空間 C へ射影し、予め射影された各人物の辞書部分空間 Q_i との類似度を相互部分空間法を適用して求める。類似度が最も高く、しきい値以上の辞書部分空間に該当する人物を本人と判定する。

6.2 制約部分空間の生成

制約部分空間は以下の手順で生成する。まず各人物毎に様々な種類の照明条件において撮影された n_k 枚の顔パターン集合に主成分分析を適用して N 次元の部分空間を生成する。次に、各人物の部分空間に対する射影行列の総和 G を求め、この行列の固有値が小さい方から c 個の固有ベクトルを c 次元の一般化差分部分空間、つまり制約部分空間の基底ベクトルとする。

図 16 は、225 次元の特徴空間において、25 人分の 30 次元部分空間から求めた 225 個全ての固有ベクトルである。これらの内で、固有値が大きい側の 55 個の固有ベクトルを主成分部分空間を張る基底ベクトル (図 16(a))、残りの 170 個の固有ベクトルを一般化差分部分空間を張る基底ベクトルとした (図 16(b))^(注8)。ここで、一般化差分部分空間の固有値が小さい側の基底ベクトルはノイズの見えるが、部分空間同士の最小正準角に対応した、意味のある差分ベクトルとなっていることに注意が必要である。

図 17 に第 1 から第 170 基底ベクトルまでの累積画像を示す。明るい画素ほど、識別において重視されることを示している。これから額や頬などの領域が識別において重視されていることがわかる。この観察結果は頬などの領域は照明変動の影響を

(注8): ここでは一般化差分空間の次元を実験的に決めたが、最適な次元を理論的に選定することは今後の重要な課題である。

表 1 各認識方法の性能比較： $S[n]$ は第 n 正準角まで考慮した類似度である。

Method	SM	EFM	MSM			CMSM		
			$S[1]$	$S[2]$	$S[3]$	$S[1]$	$S[2]$	$S[3]$
Sim.								
Recog. rate	71%	75%	80%	88%	89%	99%	99%	99%
Sep.	0.09	0.12	0.12	0.34	0.39	0.57	0.63	0.65

受けやすく、変動抑制の観点からは無視すべき領域であるという直感と異なるが、これらの領域の輝度は顔の 3 次元形状を反映しており、3 次元情報が識別性能の向上に貢献したと考えられる。

6.3 顔画像認識における有効性

制約相互部分空間法による物体認識の有効性を示すために、顔画像認識の実験結果を示す。実験パラメータは以下の通りである。データ次元数は 225、入力部分空間と辞書部分空間はそれぞれ 40 枚のパターンから生成し、次元数は 7 とした。制約部分空間は 4 種類の照明条件における 12 人分の 30 次元部分空間から生成した。次元数は 170 とした。

(a) 線形識別

評価は制約部分空間の生成に用いた人物とは異なる 13 人に対して、4 種類の照明条件間 (制約部分空間を生成した照明条件とは異なる) において総当りで識別を行った。

表 1 は部分空間法 (SM)、固有顔法 (FEM)、相互部分空間法 (MSM)、制約相互部分空間法 (CMSM) の第 1 位識別率と分離度を示している。分離度は本人の類似度と他人の類似度がどの程度分離されているかの正規化量であり、1.0 に近いほど識別性能が高いことを示している。この実験結果から制約相互部分空間法が他に比べて高い識別性能を有していることがわかる。更に $S[1] \sim S[3]$ の結果を比較すると、最小正準角のみではなく、複数の正準角まで識別に考慮することで、より高い性能が実現できることがわかる^(注9)。

図 18 は各方法の ROC (Receiver operating characteristic) 曲線を示している。曲線が左上隅に近づくほど性能が良いことを示しており、この指標に関しても第 3 正準角まで用いる制約相互部分空間法の性能が最も高いことがわかる。

実用上、制約部分空間の汎化能力は重要であるが、25 人という少人数から生成した制約部分空間でも異なる人物に対しても有効であり、更に別の実験では 500 人以上に対する有効性も確認されていることから、汎化能力はあると考えられる。

(b) 非線形識別

次にカーネル関数を用いた非線形化の有効性を示す。実験条件は次の通りである。25 人から制約部分空間を生成、評価は 2 種類の照明条件間において、制約部分空間に用いた人物と異なる 25 人に対して行った。カーネル関数はガウシアン ($\sigma_1=1.0$)、制約部分空間の生成に用いた部分空間の次元数 d は 60、一般化差分部分空間の次元数は 1100 次元 (取り除く非線形主成分部

(注9)：この実験では第 3 正準角まで用いたが、これ以降の正準角も考慮することで更に性能向上する場合もある。

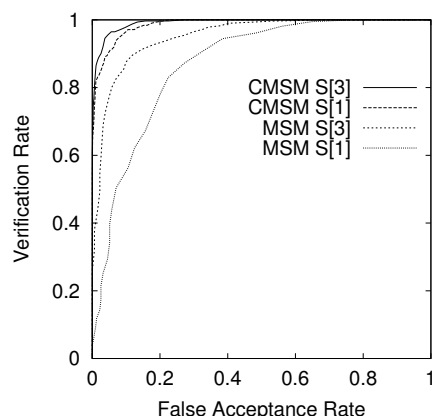


図 18 ROC 特性曲線

表 2 カーネル制約相互部分空間法の有効性

	CMSM	KMSM	KCSM
識別率 (%)	97.54	98.28	99.01
分離度	0.553	0.270	0.798
EER (%)	2.8	3.0	1.5

分空間の次元数は 400 次元) とした^(注10)。非線形の入力部分空間と辞書部分空間の次元数は 30、線形の入力部分空間と辞書部分空間の次元数は 7 とした。

表 2 に線形制約相互部分空間法 (CMSM)、核非線形相互部分空間法 (KMSM) [24]、非線形制約相互部分空間法 (KCSM) の各識別結果を示す。評価指標としては、第 1 位識別率、分離度に加えて、個人認証では重要な指標である FAR (False Acceptance Rate) と FRR (False Reject Rate) が一致する点の誤認識率 (EER) を用いた。識別率で比較すると、非線形化の効果は大きいことがわかる。EER や分離度で比較すると、相互部分空間法を非線形化しても大幅な性能向上は見られなかったが、制約部分空間への射影に対する非線形化の効果は非常に大きいことがわかる。

(c) 非線形識別の課題

非線形化に際して、学習パターン数に比例する計算量は問題である。筆者らは一般化差分部分空間を複数持つ多重制約相互部分空間法の有効性を確認している [30]。またアンサンブル学習に基づいた SVM の高速化法が提案されている [31]。この両者を組み合わせて、少ない学習サンプルから生成した複数の “弱い” の差分部分空間を用いて特徴抽出すれば計算量を削減することができると考えられる。これは今後の検討課題としたい。

7. 他の方法との関連

7.1 正準化の一般化

制約部分空間 C への射影は、飯島により提案された正準化 [2] の一般化という見方ができる。正準化とは正規化パターン集合をその集合の平均ベクトルに直交する超平面に射影する操作であり、正規化パターンが有する共通的成分を取り除くことで、

(注10)：非線形主成分部分空間の次元数を 1000 と大きくしても識別性能の大きな劣化はない。

識別能力の高い特徴を取り出す効果がある。正準化における正規化ベクトルを部分空間に置き換えたものが、制約部分空間への射影となっている。

7.2 直交部分空間法との関係

一般化差分部分空間への射影部分空間同士は射影前に比べてお互いが直交に近い関係となっている。直交化の原理は異なるが、部分空間同士をできるだけ直交化するように各クラス部分空間を再構成する点で、一般化差分部分空間への射影と直交化部分空間法 [3], [4] は密接な関係があると考えられる。この関係の理論的な解析は今後の課題である。

7.3 幾何学的な3次元物体認識との融合

本稿では3次元物体の見え方パターンを対象に議論を進めてきたが、これまで述べた理論は3次元物体から派生する他の特徴量に対しても適用することができ。例えば画像上の特徴点の2次元座標に対しても適用可能である。特徴点は3次元物体から派生した情報なので自由度は3である。したがって、ある物体から派生した特徴点は特徴空間内の3次元部分空間を構成する。この特性から、2つの物体AとBから派生した特徴点群が張るそれぞれの3次元部分空間の一致度を正準角により測れば、特徴点の3次元的な関係に基づいて両者が同じ物体かを判定することができる。このような考え方は、View-based 物体認識と幾何学的な物体認識との融合に向けた有効なステップとなると思われる。

8. まとめ

本稿では、部分空間法から制約相互部分空間法、そして、その非線形化に至る一連の理論拡張により、3次元物体認識に対する新しいアプローチが実現できることを述べた。まず物体の見え方パターンが特徴空間中の低次元部分空間に局所的に分布するという特性に基づいて、3次元物体認識の問題が正準角を用いた部分空間同士の構造的な類似性を測る問題に変換されることを述べた。この点において、本稿で述べた一連の部分空間法ベースの識別法は3次元物体認識と極めて適合性が高いことを示した。また識別性能を高めるために、一般化差分部分空間なる概念を導入し、この空間への射影により、さらに高性能な3次元物体認識が実現できることを述べた。本アプローチの有効性は顔画像認識の実験結果により示した。

文 献

[1] S. Watanabe, N. Pakvasa, "Subspace method of pattern recognition," Proc. 1st Int. J. Conf. on Pattern Recognition, 1973.
 [2] 飯島 泰蔵, "パターン認識," 電気・電子工学大系 43, コロナ社, 1973.
 [3] エルッキ・オヤ著, 小川 英光, 佐藤 誠 訳, "パターン認識と部分空間法," 産業図書, 1986
 [4] 石井 健一郎, 上田 修功, 前田 英作, 村瀬 洋, "わかりやすい パターン認識," オーム社, 1998.
 [5] A. Shashua, "Geometry and photometry in 3D Visual Recognition," PhD thesis, MIT, 1992.
 [6] R. Basri, D. Jacobs, "Lambertian reflectance and linear subspace", IEEE ICCV 2001, pp.383-390, 2001.
 [7] 中島 朗子, 牧 淳人, 福井 和広, "運動物体からの照明変動画像基底の合成", 信学技法 PRMU2002-55, pp.63-68, 2002.
 [8] 前田 賢一, 渡辺 貞一, "局所的構造を導入したパターン・マッ

チング法," 電子情報通信学会論文誌 (D), vol.J68-D, no.3, pp.345-352, 1985.
 [9] 柳井 晴夫, "多変量データ解析法 -理論と応用-, 行動計量シリーズ 8, 朝倉書店, 1994.
 [10] F. Chatelin, "行列の固有値," 伊理 正夫, 伊理 由実訳, シュブリンガー・フェアラク東京, 1993.
 [11] 福井 和広, 山口 修, 鈴木 薫, 前田 賢一, "制約相互部分空間法を用いた環境変動にロバストな顔画像認識 - 照明変動を抑える制約部分空間の学習 -, " 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J82-D-II, no.4, pp.613-620, 1999.
 [12] 福井 和広, "部分空間表現に基づく顔認識," PRMU 2002-206, pp.33-40, Jun. 2003.
 [13] 福井 和広, 山口 修, "一般化差分部分空間に基づく制約相互部分空間法," 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J87-D-II, no.8, pp.1622-1631, 2004.
 [14] 前田 賢一, 山口 修, 福井 和広, "部分空間の正準角による3次元パターンのマッチング法," CVIM145-18, 2004.
 [15] 小坂谷 達夫, 山口 修, 福井 和広, "マルチカメラを用いた顔画像認識システム," 画像センシングシンポジウム, 2002.
 [16] 福井 和広, 山口 修, "ロボット向け顔画像認識," 東芝レビュー Vol.56, No.8, 2001.
 [17] 牧 淳人, 福井 和広, 川和田 靖彦, 木谷 誠人, "ISAR 時系列画像における船舶の実時間識別," 信学技報, PRMU2002-70, pp.1-6, 2002.
 [18] 西山 正志, 山口 修, 福井 和広, "制約相互部分空間法を用いたジェスチャ認識," 画像センシングシンポジウム (SSII04), pp.439-444, 2004.
 [19] B. Schölkopf, A. Smola, and K.-R. Müller, "Nonlinear principal component analysis as a kernel eigenvalue problem," Neural Computation, Vol. 10, pp.1299-1319, 1998.
 [20] 黒沢 由明, "部分空間法とベイズ識別の関係から導き出される新しいパターン認識方式," 信学技報, PRMU 98-104, pp.1-8, 1996.
 [21] 池野 靖行, 山下 山彦, 小川 英光, "相対 KL 展開変換法によるパターン認識," 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.2, pp.541-547, 1997.
 [22] 津田 宏治, "ヒルベルト空間における部分空間法," 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J82-D-II, no.4, pp.592-599, 1999.
 [23] 前田 英作, 村瀬 洋, "カーネル非線形部分空間法によるパターン認識," 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J82-D-II, no.4, pp.600-612, 1999.
 [24] 坂野 鋭, 武川 直樹, 中村 太一, "核非線形相互部分空間法による物体認識," 信学論 (D-II), vol.J84-D, No.8, pp.1549-1556, 2001.
 [25] 飯島 泰蔵, "混合類似度による識別理論," パターン認識と学習研究会, PRL 74-24, 1974.
 [26] 福井 和広, "カーネル差分部分空間に基づく非線形特徴抽出," 第6回情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2003), 2003.
 [27] 福井 和広, 山口 修, "形状抽出とパターン照合の組合せによる顔特徴点抽出," 信学論 (D-II), vol.J80-D-II, no.8, pp.2170-2177, 1997.
 [28] 赤松 茂, "コンピュータによる顔の認識の研究動向," 電子情報通信学会誌, vol.80, no.3, pp.257-266, 1997.
 [29] 山口 修, 福井 和広, "顔向き表情変化にロバストな顔認識システム 'smartface'," 信学論 (D-II), vol.J84-D-II, no.6, pp.1045-1052, 2001.
 [30] 西山 正志, 山口 修, 福井 和広, "アンサンブル学習を用いた多重制約相互部分空間法による顔認識," MIRU2004, pp.529-534, 2004.
 [31] 山名 美智子, 中原 裕之, Massimiliano PONTIL, 甘利 俊一, "パラレルブースティングによるカーネルマシンを用いたアンサンブル学習," PRMU2002-99, pp.47-51, 2002.