社団法人 情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2004－CVIM－146　(16)
2004／11／12

１枚の画像からの３次元復元の統計的最適化

池田 直樹　菅谷 保之　金谷 健一
岡山大学工学部情報工学科

消失点と辺の直交性を利用する１枚の画像からの３次元復元において，焦点距離の計算，光軸点の推定，および直交補正のデータの誤差に対する影響を調べる．そして，計算の非線形性により通常の最適計算が必ずしも最適でないことを指摘し，計算の破綻を避けつつ精度を最大化する実際的な方法を提案する．そして，その性能をシミュレーションによって検証するとともに，どんなノイズに対しても矛盾のない３次元形状が復元できる手順を述べる．

Statistical Optimization for 3-D Reconstruction from a Single Image

Naoki Ikeda　Yasuyuki Sugaya　Kenichi Kanatani
Department of Information Technology, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

We analyze the noise sensitivity of the focal length computation, the principle point estimation, and the orthogonality enforcement for single-view 3-D reconstruction based on vanishing points and orthogonality. We first point out that due to the nonlinearity of the computation the standard optimal computation is not actually optimal. We then present a practical compromise between preventing the computational failure and maximizing the accuracy, and examine its performance by simulation. Finally, we describe the procedure for reconstructing a consistent 3-D shape in the presence of however large noise.

1. まえがき

画像からの３次元復元は三角測量の原理に基づいているので，通常は２枚以上の画像が必要であるが [2, 3]，対象物体に関する十分な知識（拘束）があれば１枚の画像からでも３次元形状が計算できる [1, 3]．例えば，シーン中に互いに平行な直線があれば，画像上でそれらの消失点が計算できる．互いに直交する３組の平行な辺が指定されれば，焦点距離や光軸点が計算され，それらからシーン中の直線や平面の位置と向きが定まる．

このような１枚の画像からの３次元復元の研究はさまざまな形で行われ，ロボットの作業，走行のような産業応用だけでなく，コンピュータグラフィクスによる仮想現実の生成や絵画からの３次元復元など，娯楽，教育，学術的研究などの多くの分野に応用されている．

この方法の欠点は，３次元復元の原理が透視投影では遠方ほど小さく写るという事実に基づいているため，透視効果のない画像からは復元できないことである．透視効果があっても非常に弱い場合，特に遠景シーンでは計算が破綻する．例えば，カメラの焦点距離を標準的な方法で計算すると，しばしば途中の計算式の根号の中が負になる．

従来の研究では，３次元復元の手順やその応用に関心が置かれ，計算の精度や安定性が詳細に解析されることは少なかった．本論文ではこれを取り上げ，焦点距離の計算，光軸点の推定，および直交補正のノイズに対する影響を調べる．

本論文ではノイズ（=画像中に指定する特徴点位置の誤差）は小さいと仮定する．したがって平均 0，分散微小の正規分布モデルが適用できる．このような場合に精度を最大化する最適化手法が知られている [4]．これは計算誤差の影響をテイラー展開し，微分の連鎖則によってヤコビ行列を計算し，出力の共分散行列を評価して，これを最小に抑えるものである．しかし，本論文ではまず，１画像からの３次元復元ではシーンが遠景になるほどごく小さいノイズでも結果が無限大に発散するなどの非線形性が顕著になり，このため通常の最適計算が必ずしも最適でないことを指摘する．

次に，この非線形性を考慮して，どんなノイズに対しても計算の破綻しない頑健性を備え，かつ解の精度を最大化する実際的な手法を提案し，その性能をシミュレーションによって検証する．そして，どんなノイズに対しても矛盾のない３次元形状が復元できる手順を述べる．

2. 透視投影モデル

本論文で用いるカメラモデルおよび点と直線の表現法を定義する [3]．シーン中に**視点**（カメラのレンズ中心）を原点 O とし，レンズの光軸を Z 軸とする XYZ 座標系をとり，シーン中の点は，その点と視点を結ぶ直線（**視線**）と平面 $Z = f$（**画像面**）の交点に投影されるとする（**透視投影**）．視点と画像面 $Z = f$ との距離 f（未知）を**焦点距離**と呼ぶ（図 1）．

入力画像を画像面 $Z = f$ と同一視し，Z 軸に対応する点（**光軸点**）を画像原点とし，X 軸，Y 軸に平

†700-8530 岡山市津島中 3–1–1, (086)251-8173
{ikeda,sugaya,kanatani}@suri.it.okayama-u.ac.jp

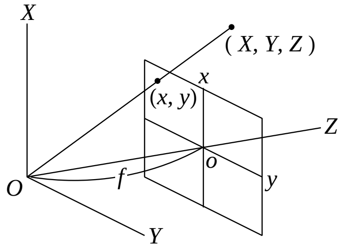


図 1: 透視投影モデル.

行に x 軸，y 軸をとる xy 画像座標系を定義する．光軸点は既知とし，xy 座標系の歪みはないとする（後に光軸点が未知の場合を考察する）．

画像上の点 (x,y) を次の二通りの３次元ベクトルで表す．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+f_0^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし f_0 は仮の焦点距離[1] である．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{m}$ は次のように互いに変換される．

$$\boldsymbol{m} = N[\boldsymbol{x}], \qquad \boldsymbol{x} = Z[\boldsymbol{m}] \tag{2}$$

ここに $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化であり，$Z[\cdot]$ は第３成分を１とする正規化である．以下，区別するときは $\boldsymbol{x}$ をその点の **Z ベクトル**，$\boldsymbol{m}$ を **N ベクトル**と呼ぶ [3]．

平面上の直線は式 $ax+by+c=0$ で表せる．係数 a, b, c は任意の 0 でない定数を掛けてもよいので，$a^2+b^2+(c/f_0)^2=1$ と正規化する．単位ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c/f_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

をこの直線の**Nベクトル**と呼ぶ [3]．式 (1) よりこの直線の方程式は $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})=0$ と書ける．ただし，本論文ではベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と書く．

Zベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ をもつ２点を通る直線のNベクトル $\boldsymbol{n}$ とNベクトル $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ をもつ２直線 l_1, l_2 の交点のZベクトル $\boldsymbol{x}$ は次のように計算できる [3]．

$$\boldsymbol{n} = N[\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2], \qquad \boldsymbol{x} = Z[\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2] \tag{4}$$

3. 消失点の最適計算

３次元復元の最初のステップは，シーン中で平行な直線の画像上での共通の交点（**消失点**）を計算することである（図 2）．シーン中の対応する直線の３次元方向は視点からその消失点を指す方向に一致する [2, 3]．シーン中の平面上の二つの直線の消失点が与えられたとき，画像上でそれらを結ぶ直線をその平面の**消失線**と呼ぶ．その平面の向きは，視点とその消失線で定義される平面の向きに一致する [2, 3]．

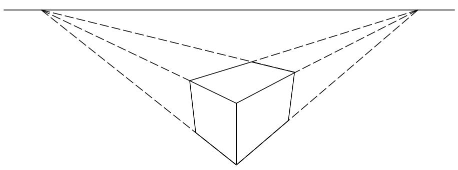


図 2: 消失点と消失線.

データに誤差があるときに複数の直線の共通の交点を統計的に最適に計算するために，**くりこみ法**とよぶ手法が金澤ら [5] や浦沢ら [6, 7] によって発表されている．その概要は次の通りである．

画像上の直線の信頼性を表す**正規化共分散行列**[2]は次のように計算される [4]．

$$V_0[\boldsymbol{n}] = \frac{\boldsymbol{P}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\times\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{y})\boldsymbol{P}_{\mathbf{n}}}{\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|} \tag{5}$$

ここに，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ はその直線を定義する線分の両端点のZベクトルであり，$\boldsymbol{n}$ はそれらを通る直線のNベクトルである．そして，次のように定義する．

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\top, \qquad \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^\top \tag{6}$$

ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列であり，$\boldsymbol{k} = (0,0,1)^\top$ と置いた．$\top$ は転置を表す．$\boldsymbol{P}_{\mathbf{n}}$, $\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}$ はそれぞれ $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$ 方向のそれに直交する面上への射影行列である．

式 (5) において，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の積 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{A}$ の各列のベクトル積を列とする行列であり，行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ の積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{A}$ の各行とのベクトル積を行とする行列である．そして，積 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{v}$ は結合則によって一意的に定義される [4]．

共通の交点をもつ N 本の直線のNベクトルを $\boldsymbol{n}_1$, ..., $\boldsymbol{n}_N$ とし，$V_0[\boldsymbol{n}_1]$, ..., $V_0[\boldsymbol{n}_N]$ をそれらの正規化共分散行列とする．消失点は通常はかなり遠方にあるので N ベクトル $\boldsymbol{m}$ で表す．これとその正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{m}]$ を計算するくりこみ法の手順は次の通りである [4]．

1. $c=0$, $W_\alpha=1$, $\alpha=1, ..., N$ と置く．
2. 次の行列を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{n}_\alpha \boldsymbol{n}_\alpha^\top, \quad \boldsymbol{N} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{n}_\alpha] \tag{7}$$

[1] 任意に設定できるが，普通は画像サイズ程度にとる．本論文の実験では $f_0=600$ としている．

[2] x, y 座標に独立に平均 0，未知の標準偏差 σ（画素）の正規分布に従うノイズが加わる２点を結ぶ直線のNベクトル $\boldsymbol{n}$ の共分散行列は $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{n}]$ であるが [4]，正の定数倍は後の計算に影響しないので，σ^2 を 1 に正規化して "正規化" 共分散行列と呼ぶ．

3. 次の行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ の3個の固有値 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ と対応する単位固有ベクトルの正規直交系 $\{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3\}$ を計算する．

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N} \tag{8}$$

4. $|\lambda_3| \approx 0$ であれば $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_3$ とし，これを次の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{m}]$ とともに返す．

$$V_0[\boldsymbol{m}] = \frac{1}{N}\Big(\frac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_1^\top}{\lambda_1} + \frac{\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{m}_2^\top}{\lambda_2}\Big) \tag{9}$$

5. そうでなければ c, W_α を次のように更新してステップ2へ戻る．

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_3}{(\boldsymbol{m}_3, \boldsymbol{N}\boldsymbol{m}_3)}, \quad W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{m}_3, V_0[\boldsymbol{n}_\alpha]\boldsymbol{m}_3)} \tag{10}$$

4. 焦点距離の最適計算

シーン中で互いに直交する3方向の平行線の消失点が計算されたとし，そのNベクトルを $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ とし，くりこみ法から得られる式(9)の正規化共分散行列をそれぞれ $V_0[\boldsymbol{m}_1], V_0[\boldsymbol{m}_2], V_0[\boldsymbol{m}_3]$ とする．視点からそれらの消失点を指す単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{m}}_1, \hat{\boldsymbol{m}}_2, \hat{\boldsymbol{m}}_3$ は次のように表せる（$\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ をこの順に対角要素とする対角行列）．

$$\hat{\boldsymbol{m}}_i = N[\boldsymbol{I}_f\boldsymbol{m}_i], \qquad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{I}_f \equiv \mathrm{diag}(1, 1, \frac{f}{f_0}) \tag{12}$$

3方向は互いに直交するから次の3条件を得る．

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv (\hat{\boldsymbol{m}}_2, \hat{\boldsymbol{m}}_3) = (\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_3) = 0 \\ e_2 &\equiv (\hat{\boldsymbol{m}}_3, \hat{\boldsymbol{m}}_1) = (\boldsymbol{m}_3, \boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_1) = 0 \\ e_3 &\equiv (\hat{\boldsymbol{m}}_1, \hat{\boldsymbol{m}}_2) = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_2) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

データに誤差があるとこれらは厳密には成り立たない．これらを統計的に最適に満たす解 f は次式を最小にするものである [4]．

$$J = \sum_{i,j=1}^{3} W_{ij}e_ie_j \tag{14}$$

ただし行列 $\boldsymbol{W} = (W_{ij})$ は次のように定義する．

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}^{-1} \tag{15}$$

ここに V_{ij} は e_i, e_j の共分散（V_{ii} は e_i の分散）である．これらは式(11)を用いる次のようになる．

$$\begin{aligned} V_{11} &= (\boldsymbol{m}_3, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_2]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_3) + (\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_3]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_2) \\ V_{22} &= (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_3]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_1) + (\boldsymbol{m}_3, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_1]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_3) \\ V_{33} &= (\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_1]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_2) + (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_2]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_1) \\ V_{23} &= V_{32} = (\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_1]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_3) \\ V_{31} &= V_{13} = (\boldsymbol{m}_3, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_2]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_1) \\ V_{12} &= V_{21} = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{I}_f^2V_0[\boldsymbol{m}_3]\boldsymbol{I}_f^2\boldsymbol{m}_2) \end{aligned} \tag{16}$$

行列 $\boldsymbol{W} = (W_{ij})$ は各消失点のNベクトル $\boldsymbol{m}_i$ の精度を表す正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{m}_i]$ を反映させて式(13)の3式を重みづけるものである．各消失点方向の推定精度が等しく，誤差が互いに独立であれば $\boldsymbol{W}$ は単位行列の定数倍になり，式(14)の最小化は $\sum_{i=1}^{3} e_i^2$ を最小にする**最小二乗法**となる．

式(14)の最小化は次のように実行できる．行列 $\boldsymbol{W}$ はその中に含まれる $\boldsymbol{I}_f$ を通して f に依存するが，$f/f_0 \sim 1$ のように f_0 を選んであれば $\boldsymbol{W}$ の f への依存の度合いは小さい．そこで，$f = f_0$ を $\boldsymbol{W}$ に代入して $\boldsymbol{W}$ を仮に定数行列とみなす．すると式(14)は

$$\alpha = \Big(\frac{f}{f_0}\Big)^2 \tag{17}$$

の2次式となるので，式(14)を最小にする α が解析的に求まる．これを代入して $\boldsymbol{W}$ を更新して α を計算し直し，これを収束するまで反復する．求まった α から焦点距離 f が次のように得られる．

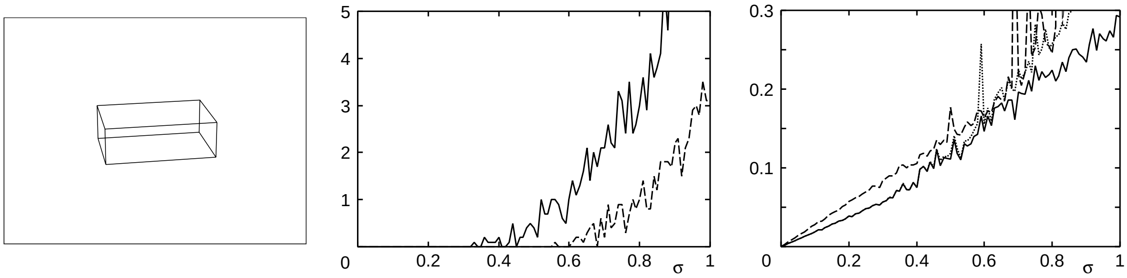
$$f = f_0\sqrt{\alpha} \tag{18}$$

5. 問題点と考察

前節の方法は最適性が理論的に保証され，申し分ないように思える．しかし，その最適性は線形解析に基いている．実際，式(9)の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{m}]$ は微小誤差に対する $\boldsymbol{m}$ の変動 $\Delta\boldsymbol{m}$ をテイラー展開によって線形近似し，期待値 $E[\Delta\boldsymbol{m}\Delta\boldsymbol{m}^\top]$ によって定義される [4]．このような第1近似ではノイズが平均0の正規分布なら消失点位置の誤差も平均0で画像面上で等確率線が楕円となる正規分布に従う．

しかし，消失点の計算では消失点が遠方にあるほど非線形性が著しく，ノイズが平均0であっても誤差の平均は0とは限らず，等確率線も楕円ではなく，放物線のように無限大に向かって発散する可能性がある．

このようなことから第1近似に基く共分散解析では誤差の挙動が十分記述できず，式(14)を最小にする解が真値に近いという保証も失われる．特に問題と



(a) (b) (c)

図 3: (a) 直方体のシミュレーション画像．(b) 計算が破綻する割合（%）．実線は最適計算．点線は最小二乗法．(c) 焦点距離計算の精度の比較．実線は複合法，破線は最適計算，点線は最小二乗法．

なるのが，式 (14) から求まる α が負になり，式 (18) から計算される焦点距離 f が虚数になる現象である．

幾何学的には明らかに実数解が存在するべきであるのに計算では実数解が存在しないのは，誤差のために成立すべき幾何学的な条件が破られるためである．実際，消失点は画像面上のどこにあってもよいものではなく，光軸点を垂心とする三角形の頂点になければならない [2, 3]．したがって，光軸点から各消失点に引いた 3 直線は互いに鈍角をなす．

しかし，計算の非線形性のため，ごくわずかのノイズでも消失点位置が大きく変動し，これらの条件が破られる可能性がある．在り得ない消失点配置に対して焦点距離の実数解が存在しないのも当然である．

6. 場合分けによる複合法

前節の考察に基き，消失点配置が満たすべき幾何学的条件がどの程度破られるを調べ，消失点位置の精度を定性的に判定して線形解析を補完する方法を考える．このとき，消失点を定める直線が平行に近いとき，ノイズによって消失点位置が大きく変動するだけでなく，消失点のあるべき方向が反転することも考慮しなけらばならない．そこで，画像原点と 3 消失点を結ぶ 3 直線のなす三つの角度を調べて，次のように場合分けする．

- **どれも鈍角**．3 消失点の信頼性は高いとみなし，4 節の最適計算を行う．
- **1 組が鋭角**．式 (13) からその 2 方向に対応する式を除いた残りの 2 式のみを用いて式 (14) を最小化する．
- **2 組が鋭角**．式 (13) の中の鈍角をなす 2 方向に対応する式のみを用い，残る消失点方向は信頼性がない（反転している）と判定して除去する．このときは式 (14) の最小化をするまでもなく，その式（α の 2 次式）を 0 と置いた式を解析的に解けばよい．
- **どれも鋭角**．どの方向も信頼性がないと判定し，$f=\infty$（実際の計算では適当な十分大きい値）とする．

7. 焦点距離推定のシミュレーション

図 3(a) は直方体のシミュレーション画像である．画像サイズは 300×400(画素) を想定し，焦点距離は $f=1000$（画素）である．この直方体の画像の頂点位置の x, y 座標にそれぞれ独立に平均 0，標準偏差 σ（画素）の正規分布に従うノイズを加えて焦点距離を計算した．

図 3(b) の実線は異なるノイズを用いて 4 節の最適計算によって焦点距離を 1000 回計算し，横軸にノイズの標準偏差 σ，縦軸に計算が破綻する（反復が収束しなかったり[3]，焦点距離が虚数となる）割合 (%) をプロットしたものである．比較のために最小二乗法（式 (14) を $\sum_{i=1}^{3} e_i^2$ に置き換えたもの）の場合を点線で示す．ノイズが大きくなるにつれて破綻する割合が増え，最小二乗法の場合より大きいことがわかる．

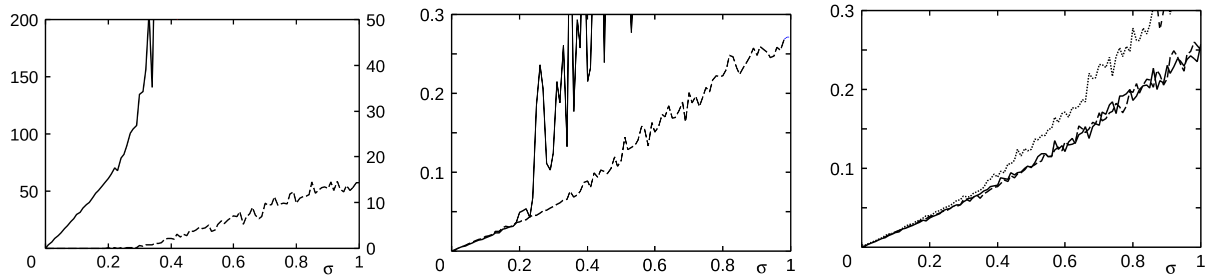
次に，4 節の最適計算と 6 節の複合法の精度を比較するために第 a 回目の計算値を $f^{(a)}$ とするとき，その相対精度の次の平方平均二乗誤差で評価した．

$$D=\sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{a=1}^{1000}\Big(\frac{f^{(a)}-f}{f^{(a)}}\Big)^2} \tag{19}$$

ただし，計算が破綻したときは $f^{(a)}=\infty$ とみなし，$(f^{(a)}-f)/f^{(a)}=1-f/f^{(a)}=1$ とした．図 3(c) は横軸にノイズの標準偏差 σ，縦軸にこの D をプロットしたものである．実線は複合法，破線は最適計算である．比較のために最小二乗法の場合を点線で示す．

これを見ると，ノイズ統計的性質を考慮しない最小二乗法は予想通り精度が低い．一方，最適計算はノイズが小さいときは計算が破綻しないので精度が高いが，ノイズが大きくなるにつれて誤差が急増している．それに比較して複合法はノイズが小さいと

[3]実験では f の変化が 1 画素以内になれば収束とみなし，10 回の反復で収束しなければ発散とみなした．



(a) (b) (c)

図 4: (a) 光軸点の推定精度．実線（左目盛）は平方二乗平均誤差（画素）．破線（右目盛）は 3 消失点の作る三角形の外にある割合 (%)．(b) 焦点距離計算の精度．実線は光軸点を推定する場合．破線は真の光軸点を用いる場合．(c) 光軸点を画像原点と仮定する焦点距離計算の精度．実線，破線，点線はそれぞれ光軸点が画像原点にある場合，画像原点から 50 画素ずれている場合，100 画素ずれている場合．

きは最適計算と同等であるが，ノイズが大きくなっても最適計算の持つべき精度がほぼ保たれている．

8. 光軸点の推定

前節までは光軸点を既知として，それを画像座標系の原点にとっていた．そこで光軸点が未知の場合を考える．先に述べたように，光軸点はシーン中で互いに直交する 3 方向の消失点の作る三角形の垂心にある [3]．

直交する 3 方向の消失点のNベクトルを $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ とすると，$\boldsymbol{m}_i$ の方向と平面 $Z = 1$ との交点は $\boldsymbol{m}_i/m_{iz}$ である (m_{iz} は $\boldsymbol{m}_i$ の z 成分)．ベクトル $\boldsymbol{h}$ が平面 $Z = 1$ 上の 3 消失点の作る三角形の垂心を指す条件は次のように書ける．

$$\begin{aligned}(\frac{\boldsymbol{m}_1}{m_{1z}} - \boldsymbol{h}, \frac{\boldsymbol{m}_2}{m_{2z}} - \frac{\boldsymbol{m}_3}{m_{3z}}) = 0 \\ (\frac{\boldsymbol{m}_2}{m_{2z}} - \boldsymbol{h}, \frac{\boldsymbol{m}_3}{m_{3z}} - \frac{\boldsymbol{m}_1}{m_{1z}}) = 0 \\ (\frac{\boldsymbol{m}_3}{m_{3z}} - \boldsymbol{h}, \frac{\boldsymbol{m}_1}{m_{1z}} - \frac{\boldsymbol{m}_2}{m_{2z}}) = 0\end{aligned} \tag{20}$$

実際にはこれら 3 式は過剰であり，このうちの二つのみで十分である[4]．これに対応してベクトル $\boldsymbol{h}$ の長さが不定であり，未知数の自由度は 2 である．そこで $h_z = 1$ と正規化し，次のように置く．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 = (m_{2z}m_{3z})\boldsymbol{m}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = (m_{3z}m_{1z})\boldsymbol{m}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 = (m_{1z}m_{2z})\boldsymbol{m}_3, \quad \boldsymbol{g} = (m_{1z}m_{2z}m_{3z})\boldsymbol{h}\end{aligned} \tag{21}$$

式 (20) に $m_{1z}m_{2z}m_{3z}$ を掛けて分母を払うと，$h_z = 1$ と合わせて次のように書ける．

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3) \\ (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \\ m_{1z}m_{2z}m_{3z} \end{pmatrix} \tag{22}$$

ただし $\boldsymbol{k} = (0\ 0\ 1)^\top$ と置いた．上式は過剰方程式系である．解を最小二乗法で定めると次のようになる．

$$\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{h} = Z[\boldsymbol{g}] \tag{23}$$

光軸点は $(x_c, y_c) = (f_0h_x, f_0h_y)$ で与えられる．

9. 光軸点推定のシミュレーション

前節の方法によって常に垂心が計算されるが，これが光軸点として意味を持つのはそれが 3 消失点の作る三角形の内部にある場合である．しかし，画像中の直線がわずかにずれでも消失点が大きく移動するので，計算した垂心は消失点の作る三角形の外側にあることもある．

そこで図 3(a) を用いて 7 節と同様にランダム誤差を加え，各 σ に対して光軸点の推定を 1000 回を行った．そして，真の光軸点が原点 $(0, 0)$ にあるので，推定精度を次の画像原点からの平方二乗平均距離によって評価した．

$$E = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{a=1}^{1000}\Big((x_c^{(a)})^2 + (y_c^{(a)})^2\Big)} \tag{24}$$

ここに $(x_c^{(a)}, y_c^{(a)})$ は a 回目の推定値である．

図 4(a) の実線は横軸にノイズの標準偏差 σ，縦軸（左側）に上式の E（画素）をプロットしたものである．破線は横軸が同じで，縦軸（右側）に推定した点が消失点の三角形の外に出た割合 (%) をプロットしたものである．

このように，光軸点はノイズに非常に敏感であり，わずかのノイズでも計算位置が異常なほどは大きく移動する．このため，光軸点をこの方法で推定する

[4] よく知られているように，垂心は 2 頂点の垂線の交点として定まり．残りの頂点からの垂線はそれを通る．

ことは消失点の精度が非常に高い場合以外は実際的でないと思われる．それより，光軸点がフレームの中心付近にあることが既知なら，デフォルト値を用いるほうが精度も高く，結果も安定すると考えられる．

図 4(b) の実線は同じ例を用いて，推定した光軸点を画像座標の原点に取り直して 6 節の複合法で焦点距離を計算し，式 (19) の D をプロットしたものである．破線は真の光軸点を画像原点とする場合である．このように光軸点を推定すると焦点距離の推定精度が著しく悪化する．

一方，図 4(c) は光軸点を水平方向に 0 画素，50 画素，100 画素ずらし，画像原点に光軸点があるとみなして焦点距離を計算した結果をそれぞれ実線，破線，点線で示したものである．これを見ても，光軸点の位置ずれが数十画素のオーダであれば焦点距離の精度にほとんど影響ないことがわかる．

新たに画像を撮影する場合は，そのカメラの光軸点は例えば参照板を用いるカメラ校正によって推定できる．しかし，既に撮影された写真や画家が描いた絵画では用いたカメラや仮定した遠近法が通常は不明である．そのような場合は光軸点を適当に仮定し，6 節の方法でともかく焦点距離を計算し，その画像を厳密にその光軸点からその焦点距離で撮影した画像になるように補正して，整合性のある 3 次元形状を行うのが現実的であろう．この補正について以下で述べる．

10. 消失点方向の直交補正

計算した 3 消失点方向には誤差があるため，それらは厳密には直交していない．そこでこれを厳密に直交する方向に補正する．これは復元した形状で直交すべき辺を直交させるために必要である．

まず，求めた焦点距離 f と式 (11), (12) を用いて，計算した 3 消失点のNベクトル $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ を $\hat{\boldsymbol{m}}_1$, $\hat{\boldsymbol{m}}_2$, $\hat{\boldsymbol{m}}_3$ に変換する．これらを近似する正規直交系 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を計算するよく知られた方法は次式を最小にする最小二乗法である．

$$\|\boldsymbol{e}_1 - \hat{\boldsymbol{m}}_1\|^2 + \|\boldsymbol{e}_2 - \hat{\boldsymbol{m}}_2\|^2 + \|\boldsymbol{e}_3 - \hat{\boldsymbol{m}}_3\|^2 \tag{25}$$

これを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が正規直交系であるという条件のもとで最小化する解は次のように解析的に求まる [3, 4]．まず $\hat{\boldsymbol{m}}_1, \hat{\boldsymbol{m}}_2, \hat{\boldsymbol{m}}_3$ を列とする行列を次のように特異値分解する．

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{m}}_1 & \hat{\boldsymbol{m}}_2 & \hat{\boldsymbol{m}}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\boldsymbol{U}^\top \tag{26}$$

ただし $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$ は直交行列であり，σ_1, σ_2, σ_3 は特異値ある．そして，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を次のように定める．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^\top \tag{27}$$

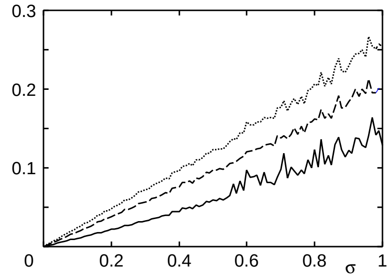


図 5: 直交補正の精度．実線，破線，点線はそれぞれ最適計算，最小二乗法，および補正なしの場合．

しかし，式 (25) は 3 消失点を同等に扱い，各々の精度の差を考慮していない．これを考慮するために，式 (9) で計算される各消失点方向の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{m}_i]$ を用い，統計学でよく知られているように

$$W_i = \frac{1}{\mathrm{tr}V_0[\boldsymbol{m}_i]} \tag{28}$$

を各消失点の精度を考慮した重みとする[5]（tr は行列のトレース）．そして式 (25) の代わりに次式の最小化を行う．

$$W_1\|\boldsymbol{e}_1 - \hat{\boldsymbol{m}}_1\|^2 + W_2\|\boldsymbol{e}_2 - \hat{\boldsymbol{m}}_2\|^2 + W_3\|\boldsymbol{e}_3 - \hat{\boldsymbol{m}}_3\|^2 \tag{29}$$

解は式 (26) の左辺を $\begin{pmatrix} W_1\hat{\boldsymbol{m}}_1 & W_2\hat{\boldsymbol{m}}_2 & W_3\hat{\boldsymbol{m}}_3 \end{pmatrix}$ に置き換えて以下同様にすればよい [4].

11. 直交補正のシミュレーション

図 3(a) を用いて，異なるノイズを用いて 6 節の複合法で計算した焦点距離による消失点方向の直交補正を 1000 回行った．そして計算した方向 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と真の方向 $\bar{\boldsymbol{m}}_1, \bar{\boldsymbol{m}}_2, \bar{\boldsymbol{m}}_3$ との食い違いを次の量で評価した．

$$F = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{a=1}^{1000}\sum_{i=1}^{3}\|\boldsymbol{e}_i^{(a)} - \bar{\boldsymbol{m}}_i\|^2} \tag{30}$$

ただし，$\{\boldsymbol{e}_i^{(a)}\}$ は a 回目の試行の値である．なお，N ベクトルの方向は不定であるから，$(\boldsymbol{e}_i, \bar{\boldsymbol{m}}_i) \geq 0$ となるように符号をそろえてから比較した．

図 5 は横軸にノイズの標準偏差 σ，縦軸に F をプロットしたものである．実線は最適計算（式 (29) の最小化）であり，破線は重みをつけない式 (25) の最小二乗法である．比較として点線で $\boldsymbol{e}_i = \hat{\boldsymbol{m}}_i$（補正を行わない計算値）とした場合を示す．これからも最適計算が他の方法と比較して最もよい精度を与えることがわかる．

[5]正規化共分散行列の定義より，$\mathrm{tr}V_0[\boldsymbol{m}_i]$ はベクトル $\boldsymbol{m}_i$ の誤差 $\Delta\boldsymbol{m}_i$ のノイズの標準偏差 σ を 1 とするように正規化した二乗ノルムの期待値 $E[\|\Delta\boldsymbol{m}_i\|^2]$ に等しい．

12. 画像の補正

消失点位置を補正すると，画像上で平行辺を延長した直線がそれらを通るとは限らない．そこで，それらが補正した消失点を通るように補正する．消失点とは異なり，画像の特徴点位置の微小誤差に対してはそれらを通る直線のずれの誤差も微小であり，線形解析が成立する．そこで，式 (5) の共分散行列に関して最適な補正を行う [4].

その直線のNベクトルを $\boldsymbol{n}$，その正規化共分散行列を $V_0[\boldsymbol{n}]$ とし，その直線が通るべき消失点の補正したNベクトルを $\bar{\boldsymbol{m}}_i$ とするとき，最適な補正量 $\Delta\boldsymbol{n}$ は $(\boldsymbol{n}-\Delta\boldsymbol{n},\bar{\boldsymbol{m}}_i)=0$ という条件のもとで二乗マハラノビス距離 $(\Delta\boldsymbol{n},V_0[\boldsymbol{n}]^-\Delta\boldsymbol{n})$ を最小にするものである（$V_0[\boldsymbol{n}]^-$ は $V_0[\boldsymbol{n}]$ のムーア・ペンローズの一般逆行列）．最終的に補正は次のようになる [4].

$$\bar{\boldsymbol{n}}=N\Big[\boldsymbol{n}-\frac{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}_i)}{(\boldsymbol{m}_i,V_0[\boldsymbol{n}]\boldsymbol{m}_i)}V_0[\boldsymbol{n}]\boldsymbol{m}_i\Big] \tag{31}$$

各直線を補正した後，それらの交点の Z ベクトルを式 (4) の第２式によって置き換える．直線上の交点ではない点は，その点から補正後の直線上へ下ろした垂線の足に置き換える．これはその点の Z ベクトル $\boldsymbol{x}$ と補正後の直線の N ベクトルを $\bar{\boldsymbol{n}}$ とするとき，次のように計算される [4].

$$\bar{\boldsymbol{x}}=Z[\boldsymbol{x}-(\bar{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{n}}] \tag{32}$$

補正した点を通る直線の N ベクトルは式 (4) の第１式によって置き換え，置き換えた直線の交点の Z ベクトルは式 (4) の第２式によって補正し，これを次々の波及させる．

13. ３次元形状復元

平面の表現

シーン中の平面は $AX+BY+CZ=h$ と表せる．ただし，全体を定数倍する不定性があるので $A^2+B^2+C^2=1$ と正規化する．すると，ベクトル $\boldsymbol{\nu}=(A\ B\ C)^\top$ はその平面の単位法線ベクトルであり，h は原点 O からその平面までの距離（$\boldsymbol{\nu}$ 方向を正とする符号をつける）である．$\boldsymbol{r}=(X\ Y\ Z)^\top$ と置くと，平面の方程式は次のように書ける．

$$(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{r})=h \tag{33}$$

画像点の逆投影

平面 (33) 上の点 $\boldsymbol{r}$ の画像上の位置の Z ベクトルが $\boldsymbol{x}$ であるとき，この点のシーン中の位置は $\boldsymbol{x}$ の延長線とこの平面の交点にあり，次のように計算される．この操作は点の**逆投影**と呼ばれている（図 6）．

$$\boldsymbol{r}=\frac{h\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x})} \tag{34}$$

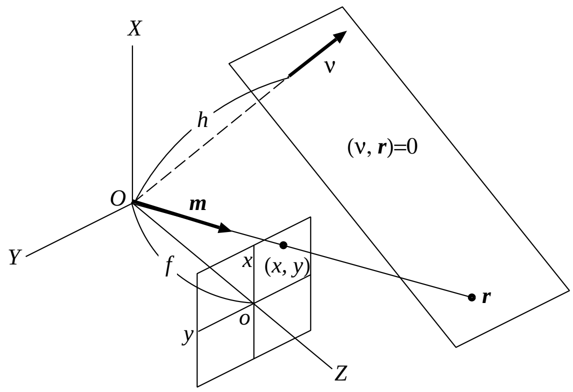


図 6: 画像上の点の逆投影.

平面の方向

シーン中の平面上の平行でない２直線の画像上での消失点のNベクトルがそれぞれ $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ であるとき，その平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{\nu}=N[\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2] \tag{35}$$

原点 O からこの平面までの距離 h を定めるには次の３通りの方法がある．

２点間の距離が既知の場合

Z ベクトルが $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の 2 点をこの平面に逆投影した点間の距離が d_{12} であることが既知であれば，距離 h の絶対値が次のように計算できる．

$$|h|=d_{12}\Big/\Big\|\frac{\boldsymbol{x}_1}{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x}_1)}-\frac{\boldsymbol{x}_2}{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x}_2)}\Big\| \tag{36}$$

平面の方程式は $(\pm\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{r})=|h|$ となるが，どちらの符号を選ぶかは，画像原点がその平面の像の中にあるか，その平面の消失線の反対側にあるかを調べる．前者なら $\boldsymbol{\nu}$ の Z 成分が正になる向きに，後者なら負になる向きにとる（普通の撮影状況では前者となる[6]）.

既知の平面に交わる場合

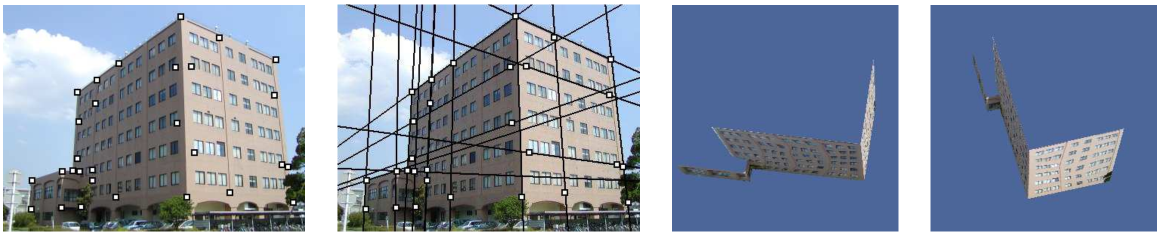
平面 $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{r})=h$ が既に位置と向きを計算した平面 $(\boldsymbol{\nu}_0,\boldsymbol{r})=h_0$ と交わる場合は，その交線上にある任意の点の Z ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき，どちらの平面に式 (29) の逆投影を行っても同じになるという条件から h が次のように定まる．

$$h=\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{\nu}_0,\boldsymbol{x})}h_0 \tag{37}$$

既知の２平面に交わる場合

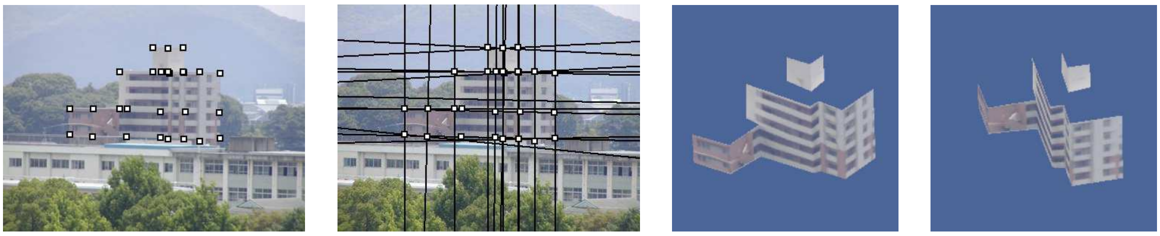
平面 $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{r})=h$ が既に位置と向きを計算した２平面に交われば，向き $\boldsymbol{\nu}$ と距離 $\boldsymbol{h}$ の両方が計算できる．交線上の点の３次元位置はその投影像から既知の平面を用いた式 (34) の逆投影で定まる．一方の平面と

[6]平面の消失線が厳密に画像原点を通る場合に不定となるが，実際問題では生じることがまれであるので無視する．



(a) (b) (c) (d)

図 7: 入力画像（近景）と復元した３次元形状.



(a) (b) (c) (d)

図 8: 入力画像（遠景）と復元した３次元形状.

の交線上に２点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ をとり，他方の平面との交線上に２点 $\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$ をとると，$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{\nu}) = 0$, $(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{\nu}) = 0$ が成り立つから，$\boldsymbol{\nu}$ が次のように計算される．

$$\boldsymbol{\nu} = N[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_4)] \tag{38}$$

その平面までの距離はどちらかの既知の平面を用いて式 (37) から定まる．

実験例

以上により，初期に選んだ平面上のある２点間の距離を指定すれば，その平面と交わる平面を次々の決定できる．初期に指定する２点間の距離が不明の場合は，それらを任意に設定すればその物体の３次元形状が定数倍を除いて定まる．

図 7(a) は近景の建物の画像（300×400 画素）であり，明確な遠近感がある．焦点距離を推定すると，図 7(a) 中に指定した特徴点を通り，図 7(b) に示す直交する 3 方向のから焦点距離を推定すると，最小二乗法では 416 画素，最適推定では 431 画素になった．この場合は 3 消失点方向がどれも互いに鈍角をなすため，複合法は最適推定と同じである．図 7(c),(d) は３次元復元した形状を２方向から見たものである．

図 8(a) は遠景の建物の画像（300×400 画素）であり，ほとんど平行投影に近い．図 8(a) 中に指定した特徴点を通り，図 8(b) に示す直交する 3 方向のから焦点距離を推定すると，最小二乗法では 812 画素，最適推定では 2825 画素であった．複合法を用いると 2 組が鋭角となり，焦点距離が 3103 画素となった．図 8(c),(d) はそれからの３次元復元であり，画像の補正によって矛盾のない３次元形状が復元され，平行であるべき辺は厳密に平行であり，直交すべき辺は厳密に直交している．

図 7, 8 の画像を撮影した状態で参照板を用いた簡単なカメラ校正を行うと，焦点距離は有効数字 3 桁でそれぞれ 457 画素，4060 画素であった．これらは前述の値とやや異なるが，いずれの場合も提案手法の値が最も近いことがわかる．

14. まとめ

本論文では１枚の画像からの３次元復元における焦点距離の計算，光軸点の推定，および直交補正のノイズに対する影響を調べた．そして，計算の非線形性により，通常の線形解析に基く最適計算が必ずしも最適でないことを指摘した．そして，計算の破綻を避けつつ精度を最大化する実際的な方法を提案し，その性能をシミュレーションによって検証した．最後に，どんなノイズに対しても矛盾のない３次元形状が復元できる手順を述べた．

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究C (2) (No. 15500113) によった．

参考文献

[1] A. Criminisi, I. Reid and A. Zisserman, Single view metrology, *Proc. 7th Int. Conf. Comput. Vision*, September 1999, Kerkyra, Greece, Vol. 1, pp. 434–441.

[2] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.

[3] 金谷健一, 「画像理解—３次元認識の数理—」, 森北出版, 1990.

[4] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1996.

[5] 金沢靖, 塩沢仁, 金谷健一, 直線当てはめの信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 95-CV-96-6 (1995-9), 41–48.

[6] 浦沢康二, 金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: I. 基礎理論, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77-1 (1992-3), 1–8.

[7] 浦沢康二, 金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: II. エッジ, 消失点, 出現点, 情報処理学会研究報告, 92-CV-78-1 (1992), 1–8.