# 動画像理解の数理

井宮　淳†

† 千葉大学総合メディア基盤センター　〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33
E-mail: †imiya@faculty.chiba-u.jp

あらまし　本稿では，最適化問題の立場から，オプティカルフローの計算法を概観する．90 年代から発展してきた数理画像解析は，画像解析や画像処理を応用数学の一部門にしてきた．ここでは，画像理解や画像処理の種々の方法をエネルギー最小化原理によって定式化し，問題を解く偏微分方程式としてアルゴリズムを記述することになる．したがって，アルゴリズムのプログラムとしての実現は，数値計算の実現となる．数理画像解析は数値科学の新展開とも関連している．画像理解で現れる種々の問題も最終的には画像を入力，あるいは初期値として数値計算を行うことになる．本稿では，動きの検出に関して，オプチカルフローの計算を主に，個々の応用例よりもその本質を最適化問題の立場から再構築する．
キーワード　オプティカルフロー，変分原理，最適化問題，微分幾何学，数理画像解析，尺度空間解析

# Mathematical Aspects of Temporal Image Analysis

Atsushi IMIYA†

† IMIT, Chiba University, Yayoi-cho 1-33, Inage-ku, Chiba 263-8522, Japan
E-mail: †imiya@faculty.chiba-u.jp

**Abstract**　In this paper, we review optical flow computation from the view point of optimisation in image analysis. In '90, mathematical image analysis was introduced to computer vision community as mathematical imaging which deals with problems in image analysis and image understanding as variational problems. The variational principal permits us to describe the problems in image analysis and image understanding as energy minimisation problems. This treatment of problem is the main dogma in modern mathematical physics. The dogma clarifies the relations among image analysis, statistical inference and computation by neural networks.
**Key words**　Optical flow, Variational principle, Riemannian geometry, Optimisation, Mathematical imaging Scale space analysis

## 1.　まえがき

動画解析の最も基本的な問題は連続画像列からの画像中に現れる特徴点あるいは画像中の全ての点の運動を計算することである．画像上に現れる点の運動はオプティカルフローと呼ばれる．オプティカルフローの概念はもともと視覚心理学の中の運動知覚の分野において Gibson によって導入されたものである．画像理解，動画像処理の分野において，画像面上の微小運動の抽出法として単に「オプティカルフロー」と呼ばれることがある．しかし，この場合定義，計算法，計算のための仮定などが混在して用いられることがある．本稿では数理画像解析 (Mathematical Imaging) の立場から，

- 入力．
- 出力．
- 数理モデル構築のための仮定．
- 問題をとくための制約条件

について区別して論じることにする．また，以下では，画像理解と Computer Vision を同義語として利用する．

上の項目で，入力は連続する多変数関数値の系列である．ただし，2 次元の場合画像と呼ばれることが多い．しかし，2 次元，あるいは 2 変数の関数に限ってみても現在，動画解析の対象とする画像は画像理解で対象とされる「通常の平面画像」(針穴カメラで撮像された映像) だけではなく，曲面上の上の画像，非中心点カメラによって撮像された画像，X 線-CT によって復元された 2 次元断層像，3 次元を考えると，視体積法などで構築された 3 次元 2 値画像，MRI や X 線で復元された 3 次元の物理量の分布まで考えることができる．特に 3 次元の分布の系列からその微小変化を計算する場合，「濃度一様条件」はその意味が，2 次元の場合とやや異なってくる．

オプティカルフローの画像理解への導入は Horn-Schunck [52] に始まり，Nagel-Enckelmann [78]-[80] が改良を加えた最適化問題による手法と共に，Lucus-Kanade [12], [17], [69] の重付最小二乗法によるものが知られている．同様に 3 次元の動きに関する解析も画像理解の立場からは同様の歴史を持っている．また，これらの手法に改良を加えたり，付加的な処理を加える手法がいく

つも存在する．ここでは，これら3つの手法に関して，フローを計算する手法を数値解析の立場から，眺めなおすことを主な目的とする．

画像理解におけるオプティカルフロー研究の当初から，オプティカルフローの計算は数値解析の研究者をひきつけてきた．これは，最適化問題そのものの形式が数値流体力学に現れる方程式と似ていることが原因の一つである．一時期，オプティカルフロー研究のためのオプティカルフロー研究は陰を潜めていた様である．しかし，現在，勾配法に限っても新しい最適化条件の導入[4],[8],[23],[44],[63]，精度の高い数値計算の進展[21],[22]，近似理論との融合[97]，全方位画像への適用[60],[114]，や気象画像などへの適用[30]など，いくつかの進展がある．さらに，視覚心理物理の立場からも新しい見直しが進んでいる[102]．また，古くて新しい問題として人工視覚の対象として運動の並列計算も新たな進展がみられる[35],[88].

以下本稿では，2次元以上の分布の時系列からの微小変動の計算法としてオプティカルフロー計算を捕らえ，旧来の勾配法，ブロック整合，微小運動理論を再整理する．また，最近，提案された全変動に基づく最適化法，さらに，ベクトル内挿法に基づく平滑化，曲面上の分布の微小変動の計算法，線形尺度空間解析と時間的微小変化との関係を，数理画像解析の立場から再構築する．

画像理解全体を眺めるとオプティカルフローの計算は画像系列の中の特徴点の抽出でるから，いわゆる前処理の一つに過ぎない．オプティカルフローを画像中の動いている部分，動いていない部分を分けるキューとして利用し，その後に3次元構築をおこなったり，カメラ自体が対象と相対的に運動していることがわかり，次の問題を解かないと3次元変動世界全体を理解することは一般には不可能である．それでも，多くの研究者を引きつけるのは，たとえば，簡単拘束条件の追加で，結果が改善される，数学的な問題の面白さ，動きの抽出の後に処理すべき問題の重要さ，動きの検出を不可欠とする画像処理分野の幅広さ，からであろう．本稿では，オプティカルフローを何のために抽出するかは必要最小限にとどめ，オプティカルフロー計算の数理を中心にまとめる．特に，90年代に始まった，数理画像解析の立場から眺めることにする．90年代後半から，応用解析の集団を引きつけてきた，数理画像解析は計算数学の画像理解への展開である．この集団がまず最初に研究の対象とした一つがノイズ除去とオプティカルフローの計算である．ノイズ除去と裏腹にある内挿よる欠落復元は映画産業に適用されている．オプティカルフローの計算は車載カメラから撮像される映像が動画でることと，自立ロボットの視覚系としての応用から，オプティカルフローそのものの計算よりもオプティカルフローをどの様に利用するかが重要な問題となる．そのため，工学よりの研究では，オプティカルフローの計算のための研究はあまりなされてこなかったのではないかと推測する．しかし，あいまいな特徴量をそのまま利用して，高次の推論を実行する事も重要であるが，特徴量の計算方法を改良することも重要である．たとえば，複数運動の分離とその特殊形である層の分離に関して，統計的な手法，確率的な手法など種々の手法が提案されているが，層の分離は本質的には，時空間周波数空間での面の分離問題である．このことから，種々の手法は，複数の面の分離をいかに精度よくおこなうかを表現したことに他ならない．また，画像符号化で動きの検出に利用されるブロック整合法[48],[54],[101]は，2画像間のワープをいかに高速高精度に離散化データから推定するかを定式化してものに他ならない．

さらに，最適化問題を直接解く回路構成を構成することで，オプティカルフローを実時間で計算する回路を設計する試みもある．ふた昔前のアナログ計算機の特殊化と考えることもできる．ブロック整合を高速に計算する回路の構成は動画配信との関係から膨大な研究成果がある．ブロック符号化の回路構成は画像を直に扱う符号化の立場から扱われるが，オプティカルフロー計算のための回路構成は生体工学，人間工学の立場から，装置がいかに実際の生体の網膜機構と運動知覚を模倣しているか調べる立場から研究されている．

## 2. 変形と整合

### 2.1 変形とワープ

ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ とその上で定義された順序 $\prec$，半順序 $\preceq$ に関して次の問題から考える．

**問題 1**
**入力** $f(x)$, $g(y)$
**仮定** $y = h(x)$ ただし $a \prec b$ ならば，$h(a) \preceq h(b)$
**出力** $f$ と $g$ との距離 $D(f,g)$ を最小とする $h(\cdot)$

ここで，$h(\cdot)$ はワープと呼ばれ，空間の位相構造を変えずに空間を局所的に変形させる関数である．順序と半順序は位相構造を変化させないための拘束条件である．

$n = 1$ とし，順序，半順序が実数の大小である場合，この問題はワープ $h(\cdot)$ を含んだ信号 $g$ のテンプレート $f$ との整合，たとえば

$$D(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(h(x))|^2 dx \tag{1}$$

を最小とする $h(\cdot)$ を求める問題となる．$f$, $g$ が離散関数である場合この問題は動的計画法（ダイナミックプログラミング）で解くことができる．$n = 2$ の場合，この問題は，図形認識においてラバーマッチングとして知られている．

次によく似た問題

**問題 2**
**入力** $f(x)$, $f(y)$
**仮定** $y = h(x)$ ただし $a \prec b$ ならば，$h(a) \preceq h(b)$
**出力** $f(x)$, $f(y)$ との距離 $D(f(x),f(y))$ を最小とする $h(\cdot)$

を考える．問題1と問題2との違いは，問題2では，観測がテンプレートからずれたものであるこことが事前にわかっている場合である．

$\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への関数 $h(x)$ を以下のようにおいてみる．

$$h(x) = x + d(x) \tag{2}$$

さて，$|d(x)| \ll 1$ ならば，

$$f(x + d(x)) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(d(x)^\top \nabla\right)^n f(x) \tag{3}$$

と展開できる．したがって，

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \int_{\mathbf{R}^n} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \left(d(\boldsymbol{x})^{\top}\nabla\right)^k f(\boldsymbol{x})\right|^2 d\boldsymbol{x} \quad (4)$$

を得る．ここで，

$$\left|\left(d(\boldsymbol{x})^{\top}\nabla\right)^k f(\boldsymbol{x})\right| \ll 1 \quad (5)$$

であれば

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \int_{\mathbf{R}^n} \left|\left(d(\boldsymbol{x})^{\top}\nabla\right) f(\boldsymbol{x})\right|^2 d\boldsymbol{x} \quad (6)$$

となり，さらに，定ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して $d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}$ であれば，

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \int_{\mathbf{R}^n} |\boldsymbol{d}^{\top}\nabla f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \quad (7)$$

となる．

また，$f(\boldsymbol{x}) \geqq 0$, $f(\boldsymbol{y}) \geqq 0$ であれば，

$$\begin{aligned} d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x})^2 d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{y})^2 \boldsymbol{x} \\ &\quad -2\int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x} \end{aligned} \quad (8)$$

となる．ここで，定ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} \quad (9)$$

であれば，

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = 2E - 2\int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})d\boldsymbol{x} \quad (10)$$

を得る．そこで，式 (10) の右辺を

$$C(\boldsymbol{z}) = 2\int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})d\boldsymbol{x} \quad (11)$$

とおけば，$C$ を最大化する $\boldsymbol{z}$ を求めれば，線形なワープを求めることが可能となる．$\boldsymbol{d}$ は

$$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{z}} = 0, \ \frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{z}} < 0 \quad (12)$$

の解であるただし，$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{z}}$ は $C$ の変数 $\boldsymbol{d}$ に関する勾配であり，$\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{z}} < 0$ は $C$ の変数 $\boldsymbol{z}$ に関するヘッシアンの固有値がすべて負であることを示している．

変化が位置による場合は

$$C(\delta(\boldsymbol{z})) = 2\int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x}-\delta(\boldsymbol{z}))f(\boldsymbol{x}+d(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \quad (13)$$

を最小化する関数 $\delta(\boldsymbol{z})$ を求める問題となる．そこで，$\mathbf{R}^n$ を点 $\boldsymbol{x}_i$ を中心とする微小領域 $\Omega(i)$, ただし

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_i \Omega(i) \quad (14)$$

に分解しそれぞれ領域の中ではワープを区分定数で近似すれば，

$$C_i(\delta(\boldsymbol{z}_i)) = 2\int_{\Omega(i)} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_i))f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_i)d\boldsymbol{x} \quad (15)$$

を最小化する $\boldsymbol{z}_i$ を求める問題となる．

2 つの表現から元の画像あるいは信号，もっと一般的にテンプレート $f$ が与えられた場合に，観測 $g$ とテンプレートとの差を最小にするワープを求める問題はワープの局所性，微小性，位相保存性を仮定すれば，式 (4) を最小化する $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との関係を求める問題となる．さらにワープに区分一定性を仮定すると，式 (7) を最小化する問題となることがわかる．

また，式 (8), (10), (12) より，ワープが位置不変で線形であれば，テンプレートと観測との相関から求まることがわかる．

### 2.2 オプティカルフローと画像整合

次に，ワープの計算法を利用して文献[69] の元の問題から導かれるオプティカルフローの求め方をまとめる．少し移動した点から撮影された二つの画像（あるいは，同じ視点から時間を置いて撮影した物体が，微小変形している場合）を $f(x,y)$, $g(x,y)$ とする．このとき，

$$\delta^2 = \sum_{\Omega(\boldsymbol{x})} |f(x,y) - g(u,v)|^2 \quad u = x+\alpha, \ v = y+\beta \quad (16)$$

を最小化する微小ベクトル $\boldsymbol{t} = (\alpha, \beta)^{\top}$ を求めれば，対応点の関係がわかり 2 つの画像を整合できる．

一般には，変形量は位置の変異

$$u = x - x', \ v = y - y' \quad (17)$$

の関数

$$\alpha = \alpha(u,v), \ \beta = \beta(u,v) \quad (18)$$

と考えるべきである．そして，更に級数

$$\alpha(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij}u^i v^j \quad (19)$$

$$\beta(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{ij}u^i v^j \quad (20)$$

とおけば，各点に関して一般の変形を表現することができる．ここで，変形が微小であれば，$|u|^m|v|^n \ll 1$, であるから，$x$, $y$ の高次の項を無視して，零次近似，一次近似

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \beta_{00} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \beta_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{01} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (22)$$

と考えることができる．一次近似が，局所変化のアファイン近似に対応していることが理解できる．

零次近似を採用すると，変動（変形）する画像間の単位時間の間の局所的関係を

$$f(x+\alpha, y+\beta, t+1) = g(x,y,t+1) \quad (23)$$

と近似できる．さらに，

$$f(x+\alpha, y+\beta, t+1) = f(x,y,t) + f_x\alpha + f_y\beta + f_t \quad (24)$$

なる近似を利用すれば，

$$\delta^2 = \sum_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |f_x\alpha + f_y\beta + f_t|^2 \quad (25)$$

となる．この問題において，変動する画像を離散化後，元の画像と単位時間後の画像とを最小二乗の意味で整合するための微小移動ベクトルがオプティカルフローであることがわかる．

## 3. 点の動きと画像の時間変化

### 3.1 オプティカルフローの支配方程式

時間的に変動する画像を $f(x,y,t)$ と表すことにする．このと

き画像 $f(x,y,t)$ は時空間 $x$-$y$-$t$ の中で値を持つ量と考えることができる．さて，時空間の中で各点 $\boldsymbol{x}=(x,y)^\top$ にある物理量の時間的な変化を表すベクトル

$$\boldsymbol{u}=\dot{\boldsymbol{x}}(x,y,t)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right) \tag{26}$$

を時間変化する画像の局所的な見かけの運動を表すと考えるとができる．この時空間の中で変化するベクトル $\boldsymbol{u}=\dot{\boldsymbol{x}}$ をオプティカルフローと呼ぶ．ワープの立場から見れば，オプティカルフローはワープの局所表現に他ならない．

オプティカルフローは局所的には，2 枚の連続する画像の対応点の画像面上での見かけの運動に対応している．したがって，オプティカルフローによって変動する画像列のなかの対応点の動きを追跡することがる．すなわち，

$$\boldsymbol{x}\begin{cases}\in \text{moving parts} & \text{if } \dot{\boldsymbol{x}}\neq 0\\ \notin \text{stationary parts} & \text{otherwise}\end{cases} \tag{27}$$

によって，画像列の中で運動部分を分離追跡できることがわかる [46], [71], [89], [104].

画像の $f(x,y,t)$ を時間に関する全微分は

$$\frac{d}{dt}f=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} \tag{28}$$

となり，ここで，

$$\frac{d}{dt}f=0 \tag{29}$$

と置けば，$\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{x},\dot{y})^\top$ に関する線形方程式

$$f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_t=0 \tag{30}$$

を得る．式 (30) は，画像が時間的にも空間的に変動が小さいと仮定すれば成立する関係式である．

式 (30) を解けば，画像 $f(x,y,t)$ から各点のオプティカルフロー $\dot{\boldsymbol{x}}$ を求めることができるのであるが，方程式一つに未知数が二つなので，不定方程式になるので，何らかの付加情報が必要となってくる．代表的な 3 つの付加的な条件を以下に掲げる．

- 任意の点 $\boldsymbol{x}$ の適当な近傍 $\Omega(\boldsymbol{x})$ において $\dot{\boldsymbol{x}}$ が一定であると仮定する [12], [17], [69].
- $H(\dot{x},\dot{y})=|\nabla\dot{x}|2+|\nabla\dot{y}|^2$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}^2}|f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_t|^2dxdy+\alpha H(\dot{x},\dot{y})dxdy \tag{31}$$

を小さくする $\dot{\boldsymbol{x}}$ を求める [52].

- $N(\dot{x},\dot{y})=\nabla\dot{x}^\top N\nabla\dot{x}+\nabla\dot{y}^\top N(\nabla f)\nabla\dot{y}$

$$\int_{\mathbf{R}^2}|f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_t|^2dxdy+\alpha N(\dot{x},\dot{y})dxdy \tag{32}$$

を小さくする $\dot{\boldsymbol{x}}$ を求める．ただし，

$$N=\frac{1}{|\nabla f|^2+2\delta}(\nabla f^\perp)(\nabla f^\perp)^\top.+\delta I, \tag{33}$$

$(\nabla f^\perp)^\top\nabla f=0.$

である [79].

1 番目の拘束条件からは

$$\int_\Omega|f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_t|^2dxdy$$

$$=(\dot{x},\dot{y},1)S\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$S=\int_{\Omega(\boldsymbol{x})}\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\\ f_t\end{pmatrix}(f_x,f_y,f_t)dxdy \tag{34}$$

を得る，したがって，$f(x,y,t)$ の時空間構造テンソル

$$S=\int_{\Omega(\boldsymbol{x})}\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\\ f_t\end{pmatrix}(f_x,f_y,f_t)dxdy \tag{35}$$

とオプティカルフローとが関係があることがわかる．式 (34) は

$$\dot{\boldsymbol{v}}^\top S\dot{\boldsymbol{v}}=0,\quad \dot{\boldsymbol{v}}=(\dot{\boldsymbol{x}}^\top,1)^\top \tag{36}$$

なる半正定値二次形式で表現できるので，$S$ の零固有値に対応するベクトル，すなわち零空間のベクトル

$$S\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{a}=(a,b,c)^\top \tag{37}$$

から,$c\neq 0$ であれば，$(\dot{x},\dot{y})=(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$，によって，フローを計算できることがわかる．この定式化がルーカス=カナデの拘束条件であれば，オプティカルフローを RANSAC によって解けることの数学的背景である．

**[命題 1]** ルーカス=カナデの拘束条件を満たすオプティカルフローは RANSAC によって推定できる．

逆に，ベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{x},\dot{y})^\top$ が一定であれば，

$$f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_t=0 \tag{38}$$

を満たすベクトル

$$\nabla_t f=(f_x,f_y,f_t)^\top \tag{39}$$

は，$\dot{\boldsymbol{x}}$ と直交しているので，$\nabla_t f|_{\boldsymbol{x}\in\Omega(\boldsymbol{x})}$ は原点を通る平面上に分布することになる．したがって，$\Omega(\boldsymbol{x})$ の時空間構造テンソルの階数は 2 となる．実際には，テンソル $S$ は零でない最小固有値を持つため，最小固有値に対応する固有ベクトルの方向を $\dot{\boldsymbol{x}}$ として採用する．

2 番目，3 番目の条件に関して，これらの関数はハミルトン関数の形式をしているので，$\dot{\boldsymbol{x}}$ に関する変分を計算すると，それぞれ，

$$\nabla^\top\nabla\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{\alpha}(\nabla_t f)^\top \boldsymbol{v}\nabla f, \tag{40}$$

$$\nabla^\top N\nabla\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{\alpha}\nabla_t f\boldsymbol{v}\nabla f, \tag{41}$$

を得る．このオイラー=ラグランジェ方程式から $\dot{x}$, $\dot{y}$ に関する反応拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\dot{x}=\nabla^\top\nabla\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{1}{\alpha}(\nabla_t f^\top\boldsymbol{v})\nabla f, \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\dot{y}=\nabla^\top N\nabla\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{1}{\alpha}(\nabla_t f^\top\boldsymbol{v})\nabla f, \tag{43}$$

を導き

$$\lim_{\tau\to}\dot{x}(\tau)=\dot{x},\ \lim_{\tau\to}\dot{y}(\tau)=\dot{y}, \tag{44}$$

を計算することによって，安定な解を得ることができる．(note 1)

(note 1) $x$ の関数 $y$ に対して，$y(x_0)$, $y(x_1)$ がわかっているとき，$y$, $y'$ で記

### 3.2 支配方程式の幾何学

関数のある点の近傍でテーラー展開して得られる関係式

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u},t+dt)=f(\boldsymbol{x},t)+\cdots \tag{45}$$

において2次以上の項を無視すると通常の支配方程式が得られる. 一方, 3次以上の項を無視すると

$$\nabla f^{\top}\boldsymbol{u}+f_t=0,\ \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\top}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}+\nabla f_t^{\top}\boldsymbol{u}=0 \tag{46}$$

が得られるこの方程式を連立させると.

$$\begin{pmatrix}\nabla f^{\top}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{pmatrix}f_t\\ \nabla f_t\end{pmatrix}=0 \tag{47}$$

を得る. すなわち, $\boldsymbol{H}$ のランクが1以上であれば, 2階微分を考慮すれば, オプティカルフローが求まることがわかる. さらに高次の項まで考えれば,

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}f(x,y,t)=0 \tag{48}$$

を考えることも可能である. しかし, 代数的には $n$ 次形式を取り扱う必要があるので, 数値計算上も代数的取り扱いもそれほど用意ではない.

さて, $(x,y,t,f(x,y,t))$ が4次元空間の3次元平面を決めることをからその曲面微分幾何学量

$$R_{2121}=\frac{f_{yy}f_{xx}-f_{xy}^2}{R}$$
$$R_{3131}=\frac{f_{tt}f_{xx}-f_{xt}^2}{R}$$
$$R_{3232}=\frac{f_{tt}f_{yy}-f_{yt}^2}{R}$$
$$R_{3121}=\frac{f_{yt}f_{xx}-f_{xt}f_{xy}}{R}$$
$$R_{3221}=\frac{f_{yt}f_{xy}-f_{yy}f_{xt}}{R}$$
$$R_{3231}=\frac{f_{tt}f_{xy}-f_{xt}f_{yt}}{R}$$
$$R=1+f_x^2+f_y^2+f_t^2$$

より,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=(\frac{R_{3221}}{R_{2121}},-\frac{R_{3121}}{R_{2121}})^{\top}\\&=(\frac{R_{3231}}{R_{3121}},-\frac{R_{3131}}{R_{3121}})^{\top}\\&=(\frac{R_{3232}}{R_{3221}},-\frac{R_{3231}}{R_{3221}})^{\top}\end{aligned} \tag{49}$$

をえる. 高次次空間の微分幾何学量がオプティカルフローであることがわかる [?], [15].

さらに, 線形支配方程式を時空間でフーリエ変換すると

$$(u\xi+v\eta+\omega)F(\xi,\eta,\omega)=0 \tag{50}$$

を得る. このことから, オプティカルフロー $(u,v)^{\top}$ は, 周波数空間で平面を決めることがわかる. そこで, 動きの方向が一定で, 領域によって速さが異なる場合.

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_0+\tau_i\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{x}_i\in\Omega_i \tag{51}$$

と仮定できるので, 動きの分離は時空間周波数空間の平面分離問題と考えることができる. これが, ビデオ画像列から層分離が可能となる根拠である. 種々の算法は基本的には, ノイズを含むデータからいかに精度よく面分離を実行するかの問題に帰着できることがわかる.

### 3.3 拘束条件の幾何学

ナーゲル=エンケルマンの拘束条件に使われる行列

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{|\nabla f|^2+2\lambda^2}(\nabla f^{\perp}\nabla f^{\perp\top}+\lambda^2\boldsymbol{I}) \tag{52}$$

の括弧の中の第二項を改めてると,

$$\nabla f^{\perp}\nabla f^{\perp\top}=|\nabla f|^2\boldsymbol{P}^{\perp}_{\nabla f},=(tr\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S} \tag{53}$$

となっていることとがわかる. ここで, 行列 $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{P}_{\nabla F}$ とはそれぞれ点 $\boldsymbol{x}$ における $f(\boldsymbol{x})$ の構造テンソル, ベクトル $\nabla f$ に直行する方向への正射影である. このことから, この拘束条件は画像の時間変化からもとまるオプティカルフローの画像勾配の方向に関する拘束であることがわかる.

実際の数値計算では, 画像の濃淡値の離散微分から, 行列 $\boldsymbol{S}$ を構成することを考慮すると

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{|\Omega(\boldsymbol{x})|}\int_{\Omega(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{S}d\boldsymbol{x} \tag{54}$$

によって定義される $\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{S}$ と置き換えて利用することになる. したがって, 拘束条件に使われる行列は

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{tr\boldsymbol{T}+2\lambda^2}((tr\boldsymbol{T})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}+\lambda^2\boldsymbol{I}) \tag{55}$$

と考えることができる. この行列を利用して, ホーン=シャンクの拘束条件とナーゲル=エンケルマンの拘束条件との関係を調

---

述される関数 $F(x,y,y')$ に対して,

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

を最小にする関数 $y(x)$ を求める問題を考える. このとき, $y$ を関数として微小量ずらせた関数 $y+\delta$ を考える. 変分

$$\begin{aligned}J(y+\delta)-J(y)&=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\delta,y'+\delta')dx\\&\quad-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\end{aligned}$$

の $\delta$ に関する2次以上の項を無視すると, 第一変分

$$\delta J(y)=\delta\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx$$

を得る. したがって, $J(y)$ を最小化する $y$ は偏微分方程式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

の解である. この原理を

$$\begin{aligned}F(x,y,\dot{x},\dot{y})&=|f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_t|^2\\&\quad+\alpha\nabla\dot{x}^{T}N\nabla\dot{x}+\nabla\dot{y}^{T}N\nabla\dot{y}\end{aligned}$$

に対して全平面で適用すれば, オプティカルフローを支配するオイラー=ラグランジェ方程式を得る.

べることにする.
半正値行列 $T$ を固有値分解して

$$Tu_i = t_i^2 u_i,\ \ i = 1,2,\ t_1^2 \geqq t_2^2 \geqq O \tag{56}$$

とすれば, ナーゲル=エンケルマンの拘束行列は

$$\begin{aligned} N &= UDU^\top, \\ D &= Diag(f(t_1), f(t_2)), \\ f(x) &= 1 - \frac{x^2 + \lambda^2}{trT + n\lambda^2} \end{aligned} \tag{57}$$

(58)

とあらわすことができる. さて,

$$y = Ux \tag{59}$$

によって座標変換を施すと,

$$\frac{d}{dt} f = x^\top \nabla f + f_t = y^\top \nabla y f + f_t. \tag{60}$$

より,

$$N = tr \nabla y \dot{y}^\top D \nabla y \dot{y}. \tag{61}$$

を得る. すなわち局所的に構造テンソルの主軸方向を座標軸として考えると, ナーゲル=エンケルマンの拘束式は, 構造テンソルの主軸の方向によって重みを変えてホーン=シャンクの拘束条件を考えていることが明らかになる. さらに, 構造テンソルの固有値が縮退していれば, すなわち濃淡勾配が等法的であれば, 二つの拘束条件が一致する. さらに,

$$\lim_{\lambda \to 0} f(x) = 1 - \frac{x^2}{trT},\ \ \lim_{\lambda \to \infty} f(x) = \frac{1}{2}. \tag{62}$$

より, $\lambda$ が大きすぎると構造テンソルの影響がなくなってしまい, 画像の濃淡勾配を考慮しないことになってしまうことがわかる.

### 3.4 フローベクトルの一様性

一番目の拘束条件をもう一度眺めると

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla f^\top u + f_t|^2 dx = \sum_i \int_{\Omega i} |\nabla f^\top u + f_t|^2 dx \tag{63}$$

と表すことができる. すなわち, 数値計算の立場から眺めれば, まず領域を分割することが本質であることがわかる. このことから領域を分割してその中でほかの拘束条件を利用することもできる. さらに, 通常, ルーカス=カナデの方法では, 数値安定化のために平滑化した画像 (通常, ガウス関数との畳み込み) の構造テンソルが利用される. そこで, ホーン=シャンク, ナーゲル=エンケルマンの計算法を第一項を平滑化構造テンソル $S_s$ の二次形式に置き換えた最適化問題

$$\int_{\mathbf{R}^2} v^\top S_s v dx dy + \alpha H(\dot{x}, \dot{y}) dx dy\ \ v = (u^\top, 1)^\top \tag{64}$$

を考えることができる [23].

### 3.5 最適化条件の変更と拘束条件の追加

式 (64) を眺めると, オプティカルフローを求めるためのワープの最小化の部分を

$$D(f_{(t+dt)}, f_{(t)}) = \int |Lf_{(t+dt)} - Lf_{(t)}|^2 dx dy \tag{65}$$

と変更することができる. ここで, $L$ は適当な作用素であり, $f_{(t+dt)} = f(x + dx, y + dy, t + dt)$ である.
特に

$$Lf = H\nabla f \tag{66}$$

ある場合の幾何学的意味を考えることにする.

$$\nabla f^\top H \nabla f = 0 \tag{67}$$

が Canny のエッジ抽出であることかことと, 動きが緩やかな場合には

$$\nabla f_{(t+dt)} \sim \nabla f_{(t)} \tag{68}$$

であることから,

$$\begin{aligned} &\nabla f_{(t+dt)}^\top H \nabla f_{(t+dt)} - \nabla f_{(t)}^\top H \nabla f_{(t)} \\ &= \nabla f_{(t)}^\top (H \nabla f_{(t+dt)} - H \nabla f_{(t)}) \end{aligned} \tag{69}$$

より, 領域のエッジのずれから, オプティカルフローを計算していることに相当する. このことから

$$Lf = \Delta\quad f,\ Lf = \nabla f \tag{70}$$

などを採用することもできる.
$u = \dot{x}, v = \dot{y}$ に関する制約条件として

$$\begin{aligned} &E(\cdot) \\ &= \int\int \left\{ \left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial^2 x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial^2 y}\right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \tag{71}$$

を考えることができる. この制約条件を満たす $(u, v)^\top$ は薄板スプラインを満たす.
ベクトル値関数の正則化条件として

$$J(u) = \alpha \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla div u|^2 dx + \alpha \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla rot u|^2 dx \tag{72}$$

が知られている [?]. 2 変数の場合

$$div u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},\ rot u = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{73}$$

よりこの拘束は 2 次微分の拘束になるので, ホーン=シャンク, ナーゲル=エンケルマンよりもさらに滑らかなあてはめを要求することになる.

さて, 3 次元の分布のフローの計算も動画 X 線 CT が実用化された 80 年代後半から研究されている. 現在ではゲート MRI によって得られた心臓動画像が対象である. 3 次元では, テンプレート整合が用いられることはなく勾配法しかもホーン=シャンクの拘束条件に第 2 の拘束条件

$$div u = 0 \tag{74}$$

が付加される. これは剛体の微小変形法則から導かれる. また, 心臓が非剛体であることを利用して, 変形体の境界を追跡するスネーク型の境界追跡によって動きを追跡することがおこなわれる. 形式的には, 2 次元 3 次元あるいは, 一般の次元でホーン=シャンク型の拘束条件を考えることが可能となる.

### 3.6 曲面上に生成される画像のフローの計算

平面から曲面への写像 $\Psi$

$$\Psi : \mathbf{x} \to \mathbf{p} = (p_1, p_2)^{\mathrm{T}} \in S$$

を考える. 曲面 $S$ 上での画像を $I_S(\mathbf{p}, t)$, 座標系を $(s_1, s_2)^{\mathrm{T}}$ とし, この写像では輝度は保たれると仮定すると,

$$I(\mathbf{x}, t) = I_S(\mathbf{p}, t)$$

が成立する. また, $I_S$ の全微分

$$\frac{dI_S}{dt} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}(\nabla_S I_S) + \frac{\partial I_S}{\partial t} = 0 \tag{75}$$

ただし, $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{p}} = (q_1, q_2)^{\mathrm{T}}$ を満たす $\mathbf{q}$ を, 任意の曲面 $S$ 上のオプティカルフローと呼ぶことにする. $\nabla_S$ は曲面 $S$ の座標系における勾配演算子である.

ここで, 写像 $\Psi$ に関して輝度は保たれているため,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I_S}{\partial t} = 0$$

が成立する. グラジアントに関して,

$$\nabla_S = \mathbf{J}\nabla = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial s_1}, h_2 \frac{\partial}{\partial s_2}\right)^{\mathrm{T}} \tag{76}$$

ただし, ここで $\mathbf{J}$ は写像 $\Psi$ に関するヤコビ行列であり, $\nabla_S$ は曲面 $S$ の座標系における微分演算子となる.

曲面の上での離散化は一般にはブロック整合に適したユクリッド格子と同じ構造にはなっていない. この問題は, 勾配法を数値計算する場合にも考慮しなければならない問題である. しかし, 勾配法では, 曲面上でそのまま偏微分方程式を数値的に解く手法や, 等角写像を施して, 通常のユークリッド格子に変換して解析する手法が開発されている. したがって, 現状では曲面上の画像の動きの検出には勾配法から導出される偏微分方程式を解く方法が最も効果的である. 画像符号化の分野では, 曲面上の画像を取り扱うことが まれであることからこの問題はあまり取り扱われていない.

### 3.7 3次元空間のフロー

3次元空間を移動する点 $x(t)$ の速度 $\dot{x}(t)$ を画像平面に投影した動きは

$$u = \frac{1}{z}\left(\left(\begin{array}{c}\omega_1\\ \omega_2\end{array}\right)\right) + \omega_3\left(\begin{array}{c}x\\ y\end{array}\right) \tag{77}$$

をり, 対応点がわかっていれば, 多数の方向から得られた画像から3次元の物体の表面の点の動きをを復元することが可能である[98], [99], [103].

先に, 物体を復元することを考えると, 視体積法で復元した物体の表面の点だけに3次元のオプティカルフローを求める算法を適用すればよいことになる. 視体積法で復元される物体は, その算法の性質からボクセル表現されていることが多い. したがって, 動きの検出に3次元のブロック整合法を適用することも可能である.

臓器の変形を決めることにオプティカルフロー計算が利用されるこのとき, 完全3次元でるとホーン=シャンクの手法をガウス=ザイデル法でとくことが最も多き利用されている. しかし, スライスを積み重ねて3次元を画像を構築する場合にスライス間の変化をブロック整合法でつなぎ合わせることがおこなわれる.

### 3.8 レンジ動画からの動きの推定

レーサーによってカメラの前の奥行き情報を二次元的に計測するレンジセンサーで得られる画像は

$$-z = g(x, y) \tag{78}$$

と表現できる. 時間的に変動するレンジ画像 $-z = g(x, y, t)$ から, 3次元空間の微小運動に関して

$$g_x\dot{x} + g_y\dot{y} + z + g_t = 0 \tag{79}$$

を得る[93]. これは, 3次元の分布に関して $g_z = 1$ とおいたオプティカルフロー拘束に等しい. したがって, この関係から, レンジ動画像からの3次元の点の変動を検出できることがわかる.

### 3.9 カラー動画のオプティカルフロー

カラー画像は $RGB$ の三色に分けて処理することが多い. もともと勾配法によるオプティカルフロー検出のの支配方程式は濃淡画像に関するものであるから, カラー画像を3色に分解して, $RGB$ に関する拘束条件

$$\nabla f_\alpha^{\mathrm{T}} u + f_{\alpha t} = 0 \ \alpha \in \{R, G, B\} \tag{80}$$

を得る. そこで, さらに種々の色の分解, (とえば, $YHS$ $HVC$ $CBW$) を利用して, そのなかから独立性の高い方程式を2つ連立させれば, カラー画像からオプティカルフローを計算できる[7], [70]. しかし, この中で, $R$ の画像に現れるオプチティカルフローが支配的であるこが実験的に確かめられている[13].

### 3.10 モデルとの照合による計算

動いている対象が自動車や人体のように物理的にわかっている問題の場合に, 画面上での対象の見え方を参照にして, 動きを取り出すことがおこなわれる. この問題を最適化問題として考えてみると,

**A** 1枚の画像の背景と目的物とを分ける.

**B** 目的物の3次元モデルを画像に投影した2次元モデルを当てはめる.

**C** 目的物の動きを抽出する.

の三つの操作に分けることができる. これらの操作を最適化問題として考えてみる.

**A** の操作はたとえば, マンフォード=シャーの評価基準のによる領域抽出が一般的であろう. マンフォード=シャーの評価基準は

$$M(f, K) = \int_{\Omega\setminus K}(f - g)dxdy + \lambda^2\int_{|\Omega\setminus K}|\nabla f|^2 + \mu\lambda^2 \mathrm{lenght} K \tag{81}$$

と定義される. ここで, $K$ は, データ $f_0$ を元に切り出されるべき領域である. また, $f$ は入力 $g$ を近似する区分連続なに関数である. この基準は, 入力 $g$ から, 評価の後ろから順に, 境界の長さが最小になり, 区分的になるべく滑らかで, $g$ を近似するを, 決定する問題である. $g$ が2関数の場合は, 値1の部分を切り出し, 濃淡画像の場合には, 第2項の働きによって, 濃淡値が急激に変化ところを境界として抽出する.

**B** の操作は, 運動する3次元モデルの3次元空間に占める領

域を $\mathrm{M}(t)$ とすれば，その画像平面への変換 $\mathrm{P}(t)$ を求め，

$$u = 0,\ x \in \overline{\mathrm{P}(t)} \tag{82}$$

とおくことに他ならない．

C は当然，オプティカルフローを求めることで，実行される．

三つの処理の順に関して幾つかの組合せを考えることができる．

(1) C, B, A の順に実現すると，通常おこなわれるオプティカルフローからの運動物検出となる．

(2) A C の順に実現すると，境界による運動抽出となる．

(3) B C の順に実現すると，モデル規範の運動抽出となる．顔や心臓の動きの抽出に利用されることがある．

(4) A C を同時に満たす最適化問題を解く．

(5) A BC を同時に満たす最適化問題を解く．

問題 A, C は共に凸最適化問題として定式化できるので，3 の手法は凸最小化問題であるが，B は凸最小化問題ではない．しかし，緩和した問題を

$$F(B) = \int_B (1 - f(x)^2)dx,\ 0 \leqq f(x) \leqq 1 \tag{83}$$

を最大化する凸領域 $A$ を、B で抽出された領域を取り囲むように決めることを考えることによって 4 の手法も凸最適化問題として定式化することが可能となる．式 (83) をピクセル単位に分解すると

$$F = \sum_{ij}(1 - x_{ij}^2)\ 0 \leqq x_{ij} \leqq 1,\ (i,j)^\top \in B \tag{84}$$

となり，2 値整数計画法で導入される緩和項となる．

また，B の処理として，3 次元の変形体の最適化問題を連立させることも可能である．実際，オプティカルフローを，引き続く画像の中の微小変化 (ワープ) と考えた，臓器や腫瘍の変化の時系列的変化を捕らえる場合には，元も対象のモデルとして，変形体の力学から導かれる対象の性質を B の処理として利用することが行われる [26], [44], [62].

## 4. 当てはめ問題としての最適化

### 4.1 近似理論としての定式化

2 次元平面 $\mathbf{R}^2$ の直線当ては問題は，直線を

$$ax + by + c = 0 \tag{85}$$

とすれば，$|a| = 1$ の基で

$$\epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} |ax_i + by_i + c|^2 \tag{86}$$

を最小とするベクトル $a$ を決定する問題となる．このベクトルは行列

$$Mu = \lambda u,\ M = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} (x_i, y_i, 1) \tag{87}$$

の最小固有値に対応する．この表現はルーカス=カナデの問題が直線当てはめ問題とよく似た問題であることがわかる．

そこで，互いに直行するベクトル $u_0, v_0$ ただし $|v_0| = 1$

$$u = u_0 + \tau v_0 \tag{88}$$

とする．カメラの動きが，光軸に垂直でカメラがロールをしないとき

$$u_0 = (-\omega_y, \omega_x)^\top + \frac{1}{Z}(t_x, t_y)^\top \tag{89}$$

当てはめる関数も自動的に決めることを考える．関数の微分滑らかにつながることを仮定すると，当てはめ関数 $f$ の二回微分に関する条件を付け加えることができる．したがって，

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=x} dx, \tag{90}$$

を最小化する $f$ を求めればよい．この最適化問題の解が 3 次のスプライン関数であることが知られている．

さらに，これらの当てはめ問題では全ての点で 2 点 $(x_i, f(x_i))^\top$ と $(x_i, y_i)^\top$ との距離を均等に評価している．そこで，$(x_i, f(x_i))^\top$ と $(x_i, y_i)^\top$ との距離があまりにもかけ離れる標本を例外値として除くために，適当な関数 $rho(\cdot)$ を用意して

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n} \rho(|y_i - f(x_i)|) + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=x} dx, \tag{91}$$

$$\epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i - (Ax_i + B)), \tag{92}$$

$$J(a) = \sum_{i=1}^{n} \rho((ax_i + by_i + c)) + \lambda(1 - a^\top a) \tag{93}$$

を最小化する問題に変形される．特に $\rho(x) = |x|^2$ であるとき．最小二乗法が導かれることは明らかである．$\rho(\frac{x}{\tau})$ としてを Huber の関数

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & |x| \leqq \gamma \\ \gamma|x| - \frac{1}{2}\gamma^2 & |x| > \gamma \end{cases} \tag{94}$$

などが利用される．この関数は微分可能で

$$\rho'(x) = \begin{cases} x, & |t| \leqq \gamma \\ \gamma sign(x), & |c| > \gamma \end{cases} \tag{95}$$

$$\rho'(x) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq \gamma \\ 0, & |c| > \gamma \end{cases} \tag{96}$$

なる性質を持つため，例外値を排除する働きをもっている．

当てはめ問題としてフローの推定を考えるとき最小自乗拘束ではなく，絶対拘束を考えることができる．たとえば，

$$\int_\Omega |\nabla f^\top u + f_t| dxdy + \int_\Omega |\nabla u| dxdy \tag{97}$$

これは，画像修復における全変動拘束

$$\int_\Omega |f(x,y) - u(x,y)| dxdy + \int_\Omega |\nabla u| dxdy \tag{98}$$

に対応して導入されたものである．画像修復の場合，全変動拘束のほうが，不連続部分での鈍りが現れないことがしられている．

そこで，フローの計算も不連続部分の鈍りを防ぐために全変動を利用するのは自然である[?]．このとき，全変動拘束のままフローを計算する代わりに近似として凸関数

$$\Psi(s) = \sqrt{s^2+\epsilon^2},\ |\epsilon| \ll 1 \tag{99}$$

を導入し

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla f^{\top} u + f_t|^2) dxdy + \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|^2) dxdy \tag{100}$$

を最適化することが提案されている[?]．ここで，

$$\lim_{\epsilon\to 0} \Phi(s) = |s| \tag{101}$$

となるため，この凸最適化問題が全変動問題を近似するとともに，$s$ の値が零に近い場合の微分の特異性を回避している．

平面上のベクトル値を補間する関数 $F$ を制御点の上では $u_i = u(x_i)$ を満たし

$$J(u) = \alpha \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla div u|^2 dx + \alpha \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla rot u|^2 dx \tag{102}$$

を最小化する関数として求めることがおこなわれる[6], [18].

このことを利用して制御点の上で，

$$\nabla f \top u(x_i) + f_t(x_i) = -f(x_i) div u \tag{103}$$

を満たす関数をフローとして計算する方法がある[57] ここで利用されるもとフローの支配方程式

$$\nabla f \top u + f_t u + f div u = 0 \tag{104}$$

は画像を輝度と速度の積 $fu$ と表した場合に成立する連続の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div(fu) = 0 \tag{105}$$

と $f$ に関する拘束式を連立させて導かれる. [57]

### 4.2 確率モデルとしての定式化

オプティカルフローによる画像の変形を確率過程として考えることができる．各点において $f_{(t+dt)}$ が $f_{(t)}$ からワープ $w$ によって引き起こされたとすると，ベイズの公式

$$p(f_{(t+dt)}, f_{(t)}) = \alpha p(f_{(t+dt)}|f_{(t)}) p(w) \tag{106}$$

を得る．ここで，

$$p(f_{(t+dt)}|f_{(t)}) = \frac{1}{a}\exp(-\int |f_{(t+dt)} - f_{(t)}|^2 dxdy) \tag{107}$$

$$p(w) = \frac{1}{Z(\lambda)}\exp(-H(u,v)) \tag{108}$$

とおくことができる．このとき，最尤推定が勾配法による推定法と一致する．これが，ベイズの推定による動き推定の基礎となる表現である．

スネークによる境界追跡も

$$J_S(x(s)) = \int_0^1 \left(\alpha|x(s)|^2 + \frac{1}{2}\beta|x(s)|^2\right) ds + \int_0^1 P(x(s)) ds, \tag{109}$$

のように，凸の 2 条拘束の和になるので，同様な形式でベーズ推定の問題として定式化できることがわかる．

エネルギー最小化問題を多層型の神経回路網によってとくことができることから，適切な自乗の凸な半関数の最適化として，オプティカルフローの計算問題を定式化すれば，オプティカルフローを計算する神経回路網を構成できることになる．これが，後述する人工網膜設計の原理の一つになっている．

## 5. 尺度空間解析とオプティカルフロー

### 5.1 線形尺度空間解析

画像 $f(x,y)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial\tau} f(x,y,\tau) = \delta f(x,y,\tau),\ f(x,y,0) = f(x,y),\ \tau > 0 \tag{110}$$

の解となる関数 $f(x,y)$ を一般化画像という．一般化画像は

$$f(x,y,\tau) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\tau})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') \exp(-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{\tau}) dxdy, \tag{111}$$

によって計算される．式 (111) は 2 次元ガウス関数と画像の 2 次元重畳積分である．この式を離散化すると，離散化ガウス窓による移動平均になっていることがわかる．離散化ガウス窓を定値窓関数に単純な移動平均となり，更に，窓の大きさを $2\times 2$ に限るとピラミッド変換となる．すなわち，移動平均によって変換された関数によって，画像の大域的な特徴を取り出すことは，尺度空間解析になっていることがわかる．

線形尺度空間の数理的な性質とそのパターン認識おける役割に関しては飯島[115] を参照されたい．

空間 $\mathbf{R}^2 \times \{\tau > 0\}$ を尺度空間といい，尺度空間のなかで，線形方程式によって支配される一般化画像を解析することを線形尺度解析という．線形尺度空間のなかで，

$$\nabla f(x,y,\tau) = 0 \tag{112}$$

を満たす点の集合を視点と呼ぶ．視点をつなげた曲線は

$$H\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = -\nabla\Delta f(x(\tau), y(\tau), \tau) \tag{113}$$

なる非線形方程式の解となる．ここで，$H$ は

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,\tau), & f_{xy}(x,y,\tau) \\ f_{yx}(x,y,\tau), & f_{yy}(x,y,\tau \end{pmatrix} \tag{114}$$

なるヘッセン行列である．

### 5.2 フローの多重解像解

次に，平滑化と多重解像度によるオプティカルフローの計算法を可能な限り数式によって表現する．

時間軸に関して平滑化された画像

$$g(x,y,t) = \int_{t-a}^{t+a} w(\theta) f(x,y,\theta) d\theta \tag{115}$$

をガウス関数によってぼかした画像 $g(x,y,\tau,t)$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} g(x,y,\tau,t) = \Delta g(x,y,\tau,t)$$

$$g(x,y,\tau,t) = g(x,y,t) \tag{116}$$

の $\tau$ を固定した場合のオプティカルフローを $\dot{x}(\tau)$ とする. $\tau$ を大きくすることは, 解像度の低い画像を生成することに相当する.

このとき, 解像度方向そってフローを統合することは,

$$\dot{x}_0 = \int_0^\infty w(\tau)\dot{x}(\tau)d\tau \tag{117}$$

と表現することができる. 重み関数を

$$\int_0^\infty w(\tau)d\tau = 1 \tag{118}$$

$$0 \leq w(\tau) < 1 \tag{119}$$

$$\frac{d}{d\tau}w(\tau) > 0 \tag{120}$$

とすれば, ぼかした画像から計算された大局的な動きに重きをおいて解像度の違う画像から抽出されたオプティカルフローを統合できる.

### 5.3 線形尺度変化す画像のオプティカルフロー

時空間変化する関数に空間方向だけ線形尺度変化を考え線形尺度空間の中の極値の時間変化を考える. すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial}f(x,t,\tau) = \delta f(x,t,\tau),\ \frac{d}{dt}\nabla f(x,t,\tau) = 0 \tag{121}$$

を考えると,

$$Hu + \nabla\Delta f\dot{\tau} + \nabla f_t = 0 \tag{122}$$

を得る. この方程式の解 $(u^\top, \dot{\tau})^\top$ は時間的に焦点ボケをしたり鮮明になったりする変動画像の劣化の時間変化 $\dot{\tau}$ を記述する方程式になっていることがわかる. したがって, 動きが推定できていれば, 劣化を修復できる可能性を数式の上で示唆していることがわかる. また, このことを利用して運動物体を追跡する場合の視野の広がりを計算するこころみがある.[27]

## 6. 運動を検出する人工網膜

画像解析で抽出される特徴量を撮像面で直接計算できる回路を持つ撮像素子を人工網膜 (Silicon Retina) と呼ぶことがある [96]. 本節では, オプティカルフローを直接計算する人工網膜についてまとめる. ブロック整合を直接計算する回路も広義の人工視覚とも考えることができる. 狭義の人工網膜は画像の画素値から直接, 特徴量を計算する方式のみについてまとめる. さて, ホーン=シャンクの拘束条件にさらに, 平均速度からのずれ $(u - u_a)$ を拘束項として付け加える. そして, 導かれるオイラー=ラグランジェ方程式の解を, 拡散方程式にによって求める回路を直接構成することができる.

この問題は, 以下のような 3 段論法から導かれる.

- オプティカルフロー計算をエネルギー最小化問題 (ベイズ推定問題) として定式化できる.
- エネルギー最小化問題 (ベイズ推定問題) を, ある種の神経回路網で解くことができる.
- ある種の神経回路網を, アナロ=グデジタル混合回路で実現できる.

ブロック整合によってワープ関数を推定する手法も当然, エネルギー最小化あるいはベイズ推定問題として定式化できるので, この問題に対しても, 当然神経回路網を構成できることがわかる. しかし, ブロック整合法では, 格子状に配列されたデータ同士の整合探索問題として定式化される. 実際

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \nabla E(x)\\ x &= f(y)\end{aligned} \tag{123}$$

なる勾配力学系が最小値を求める神経回路網のメカニズムである. さらに, 行列の対角和の性質から

$$E = vSv = tr(SV),\ V = vv^\top \tag{124}$$

に対して勾配法を再連続化するとルーカス=カナデの方法を解く勾配力学系

$$\frac{d}{dt}V = -[V[VS]] \tag{125}$$

を得る. ここで,

$$[AB] = AB - BA \tag{126}$$

である.

## 7. ブロック整合

ブロック整合は

$$C_i(\delta(z_i)) = 2\int_{\Omega(i)} f(x - z_i))f(x + d_i)dx$$

を離散化した問題を最大化する窓の中心を探索する問題となる. 最も基本的な手順は以下のように記述される.

(1) ステップサイズの初期値を決める

(2) 中心ピクセルの周りのステップサイズで 8 近傍の点の中で画素値が近いピクセルを探す.

(3) 2 で見つけたピクセルを中心とし, ステップサイズを半分にした 8 近傍を決めて, 1 に戻る.

このことから, わかるように, 広い領域での動きから徐々に狭い範囲に向けて整合するブロックの位置を絞って行く処理を繰り返すことがわかる. その意味では, ピラミッド変換による大局的変異から微小変異への絞込みと似た処理を繰り返すことがわかる.

上の処理を高速化するために, 垂直, 水平方向の探査を分解したり, あらかじめ, 動きのおおよその方向がわかっている場合には, 探索の範囲を絞り込むことが可能となる.

もともと, 画像理解におけるオプティカルフローは, 画像列の中で行われる動作の理解の基本情報として利用することが目的である. したがって, 「画像列の中に存在していてほしい情報」である. 現在の, 画像符号化おける動きの抽出は, 動きによるブレの補正や画像が微小に変動している場合に動き部分だけの符号化に利用される. したがって, 場合によっては, 「画像の中に存在してもらいたくない情報」と考えるできる. このことから, 同じ動きであっても, その利用法が異なれば, 抽出方法も異なることになる.

しかし, 現在では, 勾配法と最適化問題によるオプティカルフローもソフト的に実時間で計算することが可能である. この結果を利用いて, ブロック整合による動画符号化を再構築することも可能であろう.

## 8. 文　　献

以下に挙げた文献は直接本文中で引用していないもの多数ある。この文献は，ほとんど，Web から入手可能なものである．最近 15 年の文献を中心に集めてある．この文献表から読み取れる動向を研究動向を最後にまとめることにする．

80 年代は離散画像処理が盛んに研究されてきたが，90 年代に入りレベルセット法[82],[90] の画像処理への導入の成功を受け画像解析手法の偏微分方程式による記述とその解析が境界抽出，セグメンテーション，ノイズ除去などが研究の主流を占めるようになってきている [9],[77]．そのなかでも，90 年代前半は，グラッフィクでモフィングをの微小変形の連続として取り扱うなかで，ワープの計算が行われている．90 年代後半は，レベルセット法と尺度空間解析との中でオプティカルフローの計算ががが再構築されることが行われてきた．

現在，数理画像解析の研究と応用が一段落し，一部は，映画産業に実際に応用されているが，全変動の導入のように，非凸形問題としての定式も提案されているこれは，非凸問題の解法理論の進展にも関係している．今後，さらに高精度な数値計算法が展開されると思われる．

## 9. む す び

本稿では，対象オプティカルフローに絞り，偏微分方程式と偏分原理に基づく，画像解析法に関して最近 5 年間の研究の進展を中心に，90 年代の成果を概観した．最後の節では，オプティカルフローが動画理解の何に使われているかをまとめた．

今後の展開として，3 次元画像列からのオプティカルフローの計算とその心臓手術ロボットへの応用が興味深い．ここでは，変形体の力学，粘性流体の力学，その計算モデル，画像計測とのデータ同化などが問題となる．さらに，流体そのもの映像化も，密接に関係するしかも伝統がある分野である．

本稿の参考文献の収集には，千葉大学大学院自然科学研究科博士課程の鳥居秋彦君，大西直哉君に手伝っていただいた．記して感謝する．本文中で直接引用されていない文献もあるが，本稿をまとめるのに参考にした文献を掲げてある．なお，[1],[3] には評価用の基準画像列が用意されている．また，[2] には，ルーカス=カナデの手法による動画追跡用のプログラムソースが用意されている．これらの，画像系列は画像理解のためのベンチマークの画像列であることを付記しておく．

### 参 考 文 献


[1] Marbled-block sequence: recorded and first evaluated by otte and nagel. http://i21www.ira.uka.de/image_sequences/.

[2] Opencv. http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/.

[3] Rotating blocks: Otago optical flow evaluation sequences. http://www.katipo.otago.ac.nz/research/vision/.

[4] L. Alvarez, Weickert J., and Sánchez J. A scale-space approach to nonlocal optical flow calculations. In *Second International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*, pp. 235–246, 1999.

[5] A.A. Amini, T.E. Weymouth, and R.C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 12, No. 9, pp. 855–867, 1990.

[6] L Amodei and M.N. Benbourhim. A vector spline approximation. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 67, pp. 51–79, 1991.

[7] R.J. Andrews and B.C. Lovell. Color optical flow. In B.C. Lovell and A.J. Maeder, editors, *Workshop on Digital Image Computing*, Vol. 1, pp. 135–139, 2003.

[8] G. Aubert, R. Deriche, and P. Kornprobst. Computing optical flow via variational techniques. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 60, No. 1, pp. 156–182, 1999.

[9] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing:Partial Differencial Equations and the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 2002.

[10] A. Averbuch and Y. Shkolnisky. 3d discrete x-ray transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 17, pp. 259–276, 2003.

[11] S. Baker and I. Matthews. Lucas-kanade 20 years on: A unifying framework. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 56, No. 3, pp. 221–255, 2004.

[12] J.L. Barron, D.J. Fleet, S.S. Beauchemin, and T.A. Burkitt. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 12, No. 1, pp. 43–77, 1994.

[13] J.L. Barron and R. Klette. Quantitative colour optical flow. In *International Conference on Pattern Recognition*, Vol. 4, pp. 251–255, 2002.

[14] J.L. Barron and N.A. Thacker. Tutorial: Computing 2d and 3d optical flow. Technical report, Tina Memo No. 2004-012, 2005.

[15] E. Barth, I. Stuke, and C. Mota. Analysis of motion and curvature in image sequences. In *IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation*, pp. 206–210, 2002.

[16] E. Barth and A.B. Watson. A geometric framework for nonlinear visual coding. *Optics Express*, Vol. 7, pp. 155–165, 2000.

[17] S.S. Beauchemin and J.L. Barron. The computation of optical flow. *ACM Computer Surveys*, Vol. 26, pp. 433–467, 1995.

[18] M.N. Benbourhim and A. Bouhamidi. Approximation of vectors fields by thin plate splines with tension. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 136, pp. 198–229, 2005.

[19] R. Benosman and S.-B. Kang, editors. *Panoramic Vision: Sensor, Theory, and Applications*. Springer-Verlag, 2001.

[20] S. Bonnet, A. Koenig, S. Roux, P. Hugonnard, R. Guillemaud, and P. Grangeat. Dynamic x-ray computed tomography. In *Proceedings of the IEEE*, Vol. 91, pp. 1574–1587, 2003.

[21] A. Brandt. Multiscale scientific computation: Review 2001. In T. J. Barth, T. F. Chan, and R Haimes, editors, *Multiscale and Multiresolution Methods: Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2001.

[22] A. Brandt and D. Ron. Multigrid solvers and multilevel optimization strategies. In *Multilevel Optimization and VLSI-CAD*, chapter 1. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[23] A. Bruhn, J. Weickert, and C. Schnörr. Lucas/kanade meets horn/schunck: Combining local and global optic flow methods. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 61, No. 3, pp. 211–231, 2005.

[24] D. Calow, N. Krüger, N. Wörgötter, and M. Lappe. A biologically motivated mid-level stage of robust optic flow processing. In *Early Cognitive Vision Workshop*, 2004.

[25] S. L. Campbell and C. D. Jr. Meyer. *Generalized Inverse of Linear Transformation*. Dover Edition, Dover, New York, 1991.

[26] P.G. Ciarlet, editor. *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 7. Elsevier Science, 2004.

[27] R. Collins. Mean-shift blob tracking through scale space. In *CVPR'03*, Vol. 2, pp. 234–240, 2003.

[28] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Dense estimation of fluid flows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 3, pp. 365–380, 2002.

[29] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Dense motion analysis in fluid imagery. In *ECCV'02*, pp. 676–691, 2002.

[30] T. Corpetti, É. Mémin, and P. Pérez. Extraction of singular points from dense motion fields: An analytic approach. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 19, No. 3, pp. 175-198, 2003.

[31] T. Corpetti, E. Mémin, A. Santa-Cruz, D. Heitz, and G. Arroyo. Optical flow estimation in experimental fluid mechanics. In *Seventh International Symposium on Signal Processing and its Applications*, 2003.

[32] Davis. C.Q., Z.Z. Karu, and D.M. Freeman. Equivalence of subpixel motion estimators based on optical flow and block matching. In *Symposium on Computer Vision*, pp. 7-12, 1995.

[33] D. Cremers. A variational framework for image segmentation combining motion estimation and shape regularization. In *CVPR*, Vol. 1, pp. 53-58, 2003.

[34] D. Cremers, f. Tischhäuser, J. Weickert, and C Schnörr. Diffusion snakes: Introducing statistical shape knowledge into the mumford-shah functional. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 50, No. 3, pp. 295-313, 2002.

[35] T. Delbruck. Silicon retina with correlation-based velocity-tuned pixels. *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 4, No. 3, pp. 529-541, 1993.

[36] R. Deutschmann and C. Koch. An analog vlsi velocity sensor using the gradient method. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 649-652, 1998.

[37] R.A. Deutschmann, C.M. Higgins, and C. Koch. Real-time analog vlsi sensors for 2-d direction of motion. In *International Conference on Artificial Neural Networks*, pp. 1163-1168, 1997.

[38] A. Duchon. Maze navigation using optical flow. In *4th International Conference on Simulation of Adaptive Behavior*, pp. 224-232, 1996.

[39] W. Enkelmann. Obstacle detection by evaluation of optical flow fields from image sequences. *Image and Vision Computing*, Vol. 9, pp. 160-168, 1991.

[40] J. Ens and Z.N. Li. Real-time motion stereo. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 130-135, 1993.

[41] R. Etienne-Cummings, S.A. Fernando, J. Van der Spiegel, and P. Mueller. Real-time 2d analog motion detector vlsi circuit. In *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, Vol. 4, pp. 426-431, 1992.

[42] F. Fraundorfer. A map for mobile robots consisting of a 3d model with augmented salient image features. In *26th Workshop of the Austrian Association for Pattern Recognition*, pp. 249-256, 2002.

[43] D.M. Gavrila. The visual analysis of human movement: A survey. *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 73, No. 1, pp. 82-98, 1999.

[44] J.-M. Gorce, D. Friboulet, and I.E. Magnin. Estimation of three-dimensional cardiac velocity fields: assessment of a differential method and application to three-dimensional ct data. *Medical Image Analysis*, Vol. 1, No. 3, pp. 245-261, 1997.

[45] N. D. Guilherme and C. K. Avinash. Vision for mobile robot navigation: A survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 24, pp. 237-267, 2002.

[46] M. Haag and H.-H. Nagel. Beginning a transition from a local to a more global point of view in model-based vehicle tracking. In *ECCV'98*, Vol. 1, pp. 812-827, 1998.

[47] D. Hahnel, R. Triebel, W. Burgard, and S. Thrun. Map building with mobile robots in dynamic environments. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1557-1563, 2003.

[48] A. Hamosfakidis and Y. Paker. A novel hexagonal search algorithm for fast block matching motion estimation. *Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 6, pp. 595-600, 2002.

[49] P. Hasler, A. Bandyopadhyay, and D.V. Anderson. High fill-factor imagers for neuromorphic processing enabled by floating-gate circuits. *Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 7, pp. 676-689, 2003.

[50] N. Hata, A. Nabavi, W.W. Wells, S. Warfield, R. Kikinis, P.M. Black, and F.A. Jolesz. Three-dimensional optical flow method for measurement of volumetric brain deformation from intraoperative mr images. *Journal of Computer Assisted Tomography*, Vol. 24, No. 4, pp. 531-538, 2000.

[51] B.K.P. Horn. *Robot Vision*. McGraw-Hill Higher Education, 1986.

[52] B.K.P. Horn and B.G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, Vol. 17, pp. 185-203, 1981.

[53] C.-L. Huang, Y.-R. Choo, and P.-C. Chung. Combining region-based differential and matching algorithms to obtain accurate motion vectors for moving object in a video sequence. In *22nd International Conference on Distributed Computing Systems*, pp. 202-207, 2002.

[54] J. Hung, H.-S. Wong, and J.-H. Wang. A novel cellular search algorithm for block-matching motion estimation. In *ITCC*, pp. 629-633, 2001.

[55] A. Imíya and K. Iwawaki. Voting method for the detection of subpixel flow field. *Pattern Recognition Letters*, Vol. 24, pp. 197-214, 2003.

[56] A. Imiya, K. Iwawaki, and K. Kawamoto. An efficient statistical method for subpixel optical flow detection. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 15, pp. 169-176, 2002.

[57] T. Isambert, J.P. Berroir, I. Herlin, and E. Huot. Apparent motion estimation for turbulent flows with vector spline interpolation. In *XVII IMACS world congress, Scientific Computation Applied Mathematics and Simulation*, 2005.

[58] Bouguet J.-Y. Pyramidal implementation of the lucas kanade feature tracker description of the algorithm. Technical report, Intel Corporation, Microprocessor Research Labs, OpenCV Documents, 1999.

[59] E. M. Kalmoun and U Rüde. A variational multigrid for computing the optical flow. In *Vision Modeling and Visualization*, pp. 577-584, 2003.

[60] S.B. Kang and R. Szeliski. 3d environment modeling from multiple cylindrical panoramic images. In R. Benosman and S.-B. Kang, editors, *Panoramic Vision: Sensors, Theory, Applications*. Springer-Verlag, 2001.

[61] J.D. Kim and J. Kim. Effective nonlinear approach for optical flow estimation. *Signal Processing*, Vol. 81, No. 10, pp. 2249-2252, 2001.

[62] G.J. Klein and R.H. Huesman. Four-dimensional processing of deformable cardiac pet data. *Medical image analysis*, Vol. 6, No. 1, pp. 29-46, 2002.

[63] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Image sequence analysis via partial differential equations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 11, No. 1, pp. 5-26, 1999.

[64] F Lauze, P. Kornprobst, and E. Mémin. A coarse to fine multiscale approach for linear least squares optical flow estimation. In *British Machine Vision Conference*, Vol. 2, pp. 767-776, 2004.

[65] A. Le Thi Hoai and T. Pham Dinh. The dc (difference of convex functions) programming and dca revisited with dc models of real world nonconvex optimization problems. *Annals of Operations Research*, Vol. 133, pp. 23-46, 2005.

[66] F. Leymarie and M.D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 15, No. 6, pp. 617-634, 1993.

[67] W. Li and J.J. Swetits. The linears $l_1$ estimation and the huber $m$-estimator. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 8, pp. 457-475, 1998.

[68] M. Liebling, A.S. Forouhar, M. Gharib, S. E. Fraser, and M.E. Dickinson. Four-dimensional cardiac imaging in living embryos via postacquisition synchronization of nongated slice sequences. *Journal of Biomedical Optics*, Vol. 10, , 2005.

[69] B. Lucas and T Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo. In *7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 674-679, 1981.

[70] H. Madjidi and S. Negahdaripour. On robustness and localization accuracy of optical flow computation from color imagery. In *Second International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission*, pp. 317-324, 2004.

[71] H.A. Mallot, H.H. Bulthoff, J.J. Little, and S. Bohrer. Inverse perspective mapping simplifies optical flow computation and obstacle detection. *Biological Cybernetics*, Vol. 64, pp. 177-185, 1991.

[72] O.L. Mangasarian and D.R. Musicant. Robust linear and support vector regression. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, pp. 950-955, 2000.

[73] E. Mémin and T. Risset. Full alternate jacobi minimization and vlsi derivation of hardware for motion estimation. In *International Workshop on Parallel Image Processing and Analysis*, 1999.

[74] E. Mémin and T. Risset. On the study of vlsi derivation for optical flow estimation. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, Vol. 14, No. 4, pp. 441-461, 2000.

[75] F. Mendels, P. Vandergheynst, and J.-Ph. Thiran. Affine invariant matching pursuit-based shape representation and recognition using scale-space. Technical Report 04.03, ITS-TR, 2003.

[76] A. Mitiche, R. Feghali, and A. Mansouri. Motion tracking as spatio-temporal motion boundary detection. *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 43, No. 1, pp. 39-50, 2003.

[77] J.-M. Morel and S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*. Rirkhaäuser, 1995.

[78] H.-H. Nagel. Displacement vectors derived from second-order intensity variations in image sequences. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, Vol. 21, pp. 85-117, 1983.

[79] H.-H. Nagel. On the estimation of optical flow:relations between different approaches and some new results. *Artificial Intelligence*, Vol. 33, pp. 299-324, 1987.

[80] H.-H. Nagel and W. Enkelmann. An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, pp. 565-593, 1986.

[81] M. Nicolescu and Medioni G. Layered 4d representation and voting for grouping from motion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 25, No. 4, pp. 492-501, 2003.

[82] S. Osher and N. Paragios, editors. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag, 2003.

[83] N. Papenberg, A. Bruhn, T. Brox, S. Didas, and J. Weickert. Highly accurate optic flow computation with theoretically justified warping. *International Journal of Computer Vision (To appear)*, 2005.

[84] N. Peterfreund. The velocity snake. In *IEEE Workshop on Motion of Non-Rigid and Articulated Objects*, pp. 70-79, 1997.

[85] F. Ranchin and F. Dibos. Moving objects segmentation using optical flow estimation. In *Workshop on Mathematics and Image Analysis*, 2004.

[86] C.R. Rao and S.K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons, 1971. Japanese Edition, Tokyo Tosho, Tokyo 1973.

[87] F. Ruffier, S. Viollet, S. Amic, and N. Franceschini. Bio-inspired optical flow circuits for the. visual guidance of micro-air vehicles. In *IEEE International Symposium on Circuits And Systems*, Vol. 3, pp. 846-849, 2003.

[88] G. Sandini and G. Metta. Retina-like sensors: motivations, technology and applications. In T.W. Secomb, F. Barth, and P. Humphrey, editors, *Sensors and Sensing in Biology and Engineering*. Springer-Verlag, 2002.

[89] J. Santos-Victor and G. Sandini. Uncalibrated obstacle detection using normal flow. *Machine Vision and Applications*, Vol. 9, pp. 130-137, 1996.

[90] G. Sapiro. *Geometric Partial Differencial Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, 2001.

[91] B. W. Silverman. Some aspects of the spline smoothing approach to non-parametric regression curve fitting. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 47, pp. 1-52, 1985.

[92] S.M. Song and R.M. Leahy. Computation of 3-d velocity fields from 3-d cine images of a human heart. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 10, No. 3, pp. 295-306, 1991.

[93] H. Spies, B. Jahne, and J. L. Barron. Range flow estimation. *Computer Vision Image Understanding*, Vol. 85, No. 3, pp. 209-231, 2002.

[94] A.A. Stocker. Analog vlsi focal-plane array with dynamic connections for the estimation of piecewise-smooth optical flow. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 51, No. 5, pp. 963-973, 2004.

[95] A.A. Stocker. Integrated 2-d optical flow sensor. Technical report, submitted for journal publication, 2004.

[96] A.A. Stocker and R.J. Douglas. Analog integrated 2-d optical flow sensor with programmable pixels. In *International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, pp. 9-12, 2004.

[97] K. Strahlen. Reconstructing support and curl of flow from doppler tomography data using an art approach. In *BIOSIGNAL'98*, pp. 41-44, 1998.

[98] C. Theobalt, J. Carranza, M. Magnor, J. Lang, and H.-P. Seidel. Combining 3d flow fields with silhouette-based human motion capture for immersive video. *Graphical Models (Special Issue on Pacific Graphics'03)*, Vol. 66, No. 6, pp. 333-351, nov 2004.

[99] C. Theobalt, M. Magnor, P. Schüler, and H.-P. Seidel. Combining 2d feature tracking and volume reconstruction for online video-based human motion capture. *International Journal of Image and Graphics*, Vol. 4, No. 4, pp. 563-584, oct 2004. Pacific Graphics 2002.

[100] M. Tistarelli. Computation of optical flow and its derivatives from local differential constraints. In *International Symposium on Computer Vision*, pp. 19-24, 1995.

[101] J.-C. Tuan and C.-W. Jen. An architecture of full-search block matching for minimum memory bandwidth requirement. In *Great Lakes Symposium on VLSI*, pp. 152-156, 1998.

[102] L.M. Vaina, S.A. Beardsley, and S.K Rushton, editors. *Optic Flow and Beyond*. Kluwer Academic Publishers, 2004.

[103] S. Vedula, S. Baker, P. Rander, R. Collins, and T. Kanade. Three-dimensional scene flow. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 27, No. 3, pp. 475-480, March 2005.

[104] S. Wachter and H.-H. Nagel. Tracking persons in monocular image sequences. *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 74, pp. 174-192, 1999.

[105] J. Weickert and C. Schnorr. A theoretical framework for convex regularizers in pde-based computation of image motion. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 45, No. 3, pp. 245-264, 2001.

[106] C. Xu and J.L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow,. In *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 7, pp. 359-369, 1998.

[107] C. Xu and J.L. Prince. Gradient vector flow deformable models. In I.N. Bankman, editor, *Handbook of Medical Image Processing and Analysis*. Academic Press, 2000.

[108] Z Yang, A. Murray, F. Wörgötter, K. Cameron, and V. Boonsobhak. A neuromorphic depth-from-motion vision model with stdp adaptation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006.

[109] M. Ye and R.M. Haralick. Two-stage robust optical flow estimation. In *CVPR'00*, Vol. 2, pp. 623–628, 2000.

[110] Z. Yu and C. Bajaj. Anisotropic vector diffusion in image smoothing. In *9th IEEE International Conference on Image Processing*, Vol. 1, pp. 828–831, 2002.

[111] Z. Yu and C. Bajaj. Image segmentation using gradient vector diffusion and region merging. In *International Conference on Pattern Recognition*, Vol. 2, pp. 941–944, 2002.

[112] Z. Yu and C. Bajaj. Normalized gradient vector diffusion and image segmentation. In *ECCV*, Vol. 3, pp. 517–530, 2002.

[113] Z. Zhou, C. Synolakis, R. Leahy, and S. Song. Calculation of 3d internal displacement fields from 3d x-ray computer tomographic-images. *Royal Society*, Vol. 449, pp. 537–554, 1995.

[114] 菅谷裕信. 全方位画像からのオプティカルフローの計算. Master's thesis, 千葉大学大学院 自然科学研究科 知能情報工学専攻基礎情報学講座, 2003.

[115] 飯島泰蔵. パターン認識. コロナ社, 1973.