

# 未校正画像対中の点对応に基づくエピポールの1次元探索法

右田 剛史 尺長 健

岡山大学 工学部 情報工学科

〒700-8530 岡山市津島中 3-1-1

{migita,shaku}@chino.it.okayama-u.ac.jp

あらまし: 未校正画像対上で得られた7組以上の対応点から基礎行列を求める問題は, エピポールに関する半球面上の2次元探索に着るることが知られている. しかし, 目的関数が非線形であるため一般には解の一意性は成立しない. 一方, 線形計算で一意の解が得られるとされる8点アルゴリズムは, 基礎行列のランクに関する制約を無視した近似により解が劣化することや, 本来複数あり得る局所解のうち1つしか得られないという問題がある. そこで, 本稿ではランクの制約を厳密に考慮した解を導く. 具体的には, 代数的誤差の2乗和を最小化するエピポールの座標  $(x, y, z)$  の比  $(x/z)$  等が1変数の1728次方程式の解であることを示す. これにより, 原理的には局所解を含む解の候補を全て得られる. ただし, 実用上は次数が高い方程式を解くことは容易ではないため, 近似を導入した75次方程式によるエピポール推定を行う. 実画像を用いた実験により, 従来の8点アルゴリズムと比較し, 本手法の有効性を示す.

## One Dimensional Epipole Search based on Point Correspondences in Two Uncalibrated Views

Tsuyoshi MIGITA and Takeshi SHAKUNAGA

Department of Information Technology, Faculty of Engineering, Okayama University  
3-1-1 Tsushima-naka, Okayama, 700-8530, JAPAN  
{migita, shaku}@chino.it.okayama-u.ac.jp

**Abstract:** The fundamental matrix can be estimated from 7 or more point correspondences in two uncalibrated views, and essentially it is an epipole search in 2-dimensional space (hemisphere). However, since the corresponding cost function is a non-linear one, unique solution is not guaranteed. While the well-known 8-point algorithm gives an approximate solution, neglecting the rank constraint on the fundamental matrix, we strictly take the constraint into account and obtain a better solution. Specifically, we reduce the problem into a high-order polynomial equation in one variable, which is satisfied by the ratio (e.g.  $x/z$ ) of all the optimal or locally optimal epipole coordinates  $(x, y, z)$ . We also show a lower-order equation by introducing an approximation, which still outperforms the 8-point algorithm.

### 1 はじめに

同一のシーンを撮影した1対の透視投影画像に基づいてシーンの幾何学的解析を行う場合, 基礎行列が重要な役割を果たす [3]. 基礎行列と各画像上の対応点の座標はしかるべき関係式を満たすの

で, この関係式の残差を最小化することで, 画像から基礎行列を推定することができる. 本来, この推定は多変数の非線形最適化問題であり, 解を陽に表現することは不可能である. 代表的な手法として知られる8点アルゴリズム [2] は, 線形代数の行列操作のみで実現されるが, これは, 基礎行

列がランク 2 であるという制約を厳密に考慮せず  
に線形解法を適用しているためである。本稿では、  
この制約を無視することなく、代数的誤差の最小  
化による基礎行列の推定の本質的部分が 1 変数の  
多項式方程式で表されることを示す。なお、[7] で  
は、回転と並進が  $x-z$  平面に限定される場合につ  
いて、類似の 1 変数の定式化を行っているが、本  
稿ではこのような制限は行わない。

本稿では、基礎行列とエピポールがスケールを除  
いて 1 対 1 対応であること [3, §11.3] を利用し、エ  
ピポールの座標  $(x, y, z)$  の比  $(x/z)$  等の満たす 1  
変数の多項式方程式を導く。1 変数の多項式方程式  
では、全ての解を列挙することが可能であるため、  
局所解を含む全ての解候補を得ることができる。こ  
れらの解を初期値として、より精度の高い解に修  
正するための非線形最適化 (bundle-adjustment[6]  
等) を行うことを考えると、解候補が 1 つしか得ら  
れない線形解法よりも有利である。解候補が 1 つ  
の場合、その解からの非線形最適化が局所解に陥っ  
た場合に救済する方法がないが、複数の候補があ  
る場合、その中に有効な近似解が含まれる可能性  
が増すためである。

以下、2 章では、本稿で用いる基本的原理 (エピ  
ポーラ幾何、本稿で扱う推定問題の定式化、非線  
形連立方程式からの変数消去法) を示す。また、従  
来研究に対する本研究の位置付けを行う。3 章では  
探索を 1 次元化する具体的手法を述べる。3.4 節で  
は、厳密解が満たす 1728 次方程式を導くが、この  
方程式の構成に要する計算量は極めて多く、現実  
的ではない。そこで 3.5 節では、近似を導入した  
75 次方程式を導く。4 章では、実画像に基づく実  
験によって、近似手法でも 8 点アルゴリズムより  
も精確な解が得られることを示す。

## 2 基本原理

### 2.1 エピポーラ幾何

3 次元空間にある  $P$  個の点を考える。各点を表  
す添字として  $p \in \{0, \dots, P-1\}$  を用い、各点の座  
標を 3 次元ベクトル  $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)^T$  で表す。2  
つのカメラは透視投影モデルに従い、各点の像の  
座標は、同次座標によってそれぞれ  $l_p, r_p$  と表す。  
数値計算の安定性確保のため、各カメラの焦点距  
離はほぼ 1 であるとする。

このとき、全ての  $p$  に対して次式 (エピポーラ拘

束) が成立する。

$$l_p^T F r_p = 0 \quad (1)$$

この  $F$  は基礎行列と呼ばれる。この行列から 2 つ  
のカメラの内部パラメータと、相対的な位置姿勢  
を計算することができ、未校正画像対の解析に重  
要な役割を果たす。

基礎行列はランク 2 の  $3 \times 3$  行列であるため、次  
式を満たす  $e$  が存在する。

$$F e = 0 \quad (2)$$

このような  $e$  はエピポールと呼ばれる<sup>1</sup>。

### 2.2 基礎行列推定の原理

式 (1) に基づき基礎行列を推定する場合、次の  
定式化を考えることができる。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_p \left( l_p^T F r_p \right)^2 \\ & \text{subject to} && |F|_F = 1 \text{ and } |F| = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $|\cdot|_F$  は行列の Frobenius ノルムであり、  
 $|\cdot|$  は行列式である。ここで用いられている目的関  
数は代数的誤差 (Algebraic error) と呼ばれる。

上の式で  $|F| = 0$  の制約を無視すると、2 次関数  
の最適化であり、簡単な行列演算のみで解が得ら  
れる [2]。この方法は 8 点アルゴリズムと呼ばれ、  
広く用いられている。即ち、 $F$  の行ベクトルを 3  
つ並べた 9 次元ベクトルを  $f^T$  とすると、上記の  
目的関数は  $f^T H f$  と書くことができる。 $H$  は適当  
な  $9 \times 9$  対称行列である。この  $H$  の最小固有値に  
対応する固有ベクトルを求めれば良い。得られた  
解から  $|F| = 0$  を満たす様に補正することも、特  
異値分解で容易に実現できる。

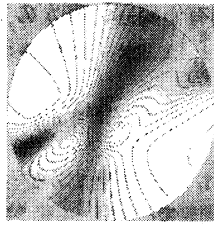
本稿では、このような近似を導入せずに式 (3) の  
厳密解を 1 変数の方程式に帰着する。

### 2.3 代数的誤差と再投影誤差

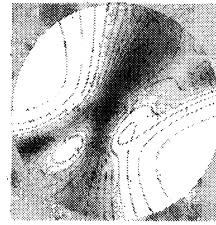
最良の推定には式 (3) の代わりに再投影誤差を  
最小化すべきであるが、その最小化は代数的誤差  
最小化よりも困難な非線形最適化問題である。そ  
こで、通常は 8 点アルゴリズムの解を初期値とし  
て再投影誤差を最小化する。しかし、再投影誤差  
最小化には複数の局所解があり得る一方で、8 点  
アルゴリズムの解は一つしかないので、必ずしも  
最適解に近い初期値が得られる保証はない。また、

<sup>1</sup> $F$  の左零空間もエピポールと呼ばれるが、本稿では用いない。





(a) 代数的誤差



(b) 代数的誤差の近似

図 1: 探索空間の例:  $e$  を与えた時の代数的誤差をグレースケールで表示. 誤差が 0 に近いほど暗い. 円は  $e$  の探索空間 (半球) を魚眼投影したもの. 代数的誤差の等高線も表示.

ここで,  $f$  の要素ではなく,  $e$  の要素の探索 (球面上の 2 次元探索) に書き換えられたことに注意を要する.  $e$  は  $B$  を構成するために使われ,  $e$  が決まると行列  $F$  は一意に定まる.

上の式は結局次のようになる.

$$\arg \min_e \lambda, \quad \text{ただし } f_6(\lambda; e) = 0, \quad (11)$$

$$f_6(\lambda; e) := \frac{d^3}{d\nu^3} |H - \lambda I + \nu BB^T| \quad (12)$$

以下, この導出を行う. 式 (10) を微分すると,

$$[Hf - \lambda f + \nu BB^T f] = 0 \quad (13)$$

$$\text{即ち } f_9(\lambda) := |H - \lambda I + \nu BB^T| = 0 \quad (14)$$

$f_9$  は  $\lambda$  に関しては 9 次式,  $\nu$  に関しては 3 次式である. これらの次数は, 上の式で  $\lambda$  や  $\nu$  にかかっている行列のランクによって決まる.

$\nu \rightarrow \infty$  の極限を考えるには,  $f_9$  のうち  $\nu^3$  の項が重要である. 式 (14) の行列式で,  $\nu^3$  の係数を  $f_6$  とすると, これは  $\lambda$  の 6 次以下の項から成る.

$$f_9(\lambda) = \nu^3 f_6(\lambda) + O(\nu^2). \quad (15)$$

$\nu \rightarrow \infty$  では,  $f_9(\lambda) = 0$  の解のうち 6 個は  $f_6(\lambda) = 0$  の解に収束し, 残り 3 つは  $\infty$  に近づく.

また, 式 (13) の左から  $f^T$  を掛けることによって  $\lambda = f^T H f$  であることがわかる. 即ち,  $f_6(\lambda) = 0$  は最小化すべき目的関数値  $\lambda$  が満たすべき方程式である. なお, 式 (12) における 3 回微分は,  $\nu$  の 3 次式 ( $f_9$ ) から, 3 次の係数 ( $f_6$ ) のみを取り出すためのものであり, この効果を持つなら別の演算子を用いても良い (例えば  $f_6 := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-3} f_9$ ).

図 1(a) に,  $e$  に対する  $\lambda$  の変化の例を示す. また, 式 (14) の行列において,  $\nu$  には  $e$  の要素  $(x, y, z)$  の 2 次同次式がかかっているため,  $f_6$  の係数は  $(x, y, z)$

表 1:  $c_0$  から  $c_6$  の項数

項数		項数		項数	
$c_0$	524880	$c_2$	108864	$c_4$	2466
$c_1$	349920	$c_3$	20412	$c_5$	189
				$c_6$	10

の 6 次同次式である. 従って,

$$f_6(\lambda) := c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_6 \lambda^6 \quad (16)$$

$$\text{ここで, } c_i = c_{i600} x^6 + c_{i510} x^5 y + \dots$$

式 (14) の行列式を展開すると,  $\nu^3$  の係数 ( $f_6$ ) は 1,006,741 項から成ることが判る. 各  $c_i$  の項数は表 1 の通りである. このうち  $c_6$  から  $c_4$  は比較的簡単な式で表すことができる.

$$c_6 = |e|^6$$

$$c_5 = |e|^4 e^T ((\sum_i h_{ii}) I - S_{00} - S_{11} - S_{22}) e \quad (17)$$

ここで  $h_{ij}$  は  $H$  の要素,  $S_{ij}$  は  $H$  を  $3 \times 3$  のブロックに分割した時の部分行列を表す.  $c_4$  は紙面の都合上省略する.

なお, 実際に  $c_i$  の値を計算するには, 数式処理よりも数値計算による方が効率的である. 即ち, 線形独立な 28 組以上の  $(x, y, z)$  において, 相異なる 4 つ以上の  $\lambda$  に対する  $f_9$  の値を計算し,  $c_i$  に関する連立方程式 (最小 2 乗方程式) を構成して解けば良い.

### 3.2 3 次元探索

前節の式 (11), 即ち  $f_6(\lambda; e) = 0$  は, 与えられた  $e$  に対する代数的誤差の最小値 ( $\lambda(e)$ ) が満たすべき方程式である. この  $\lambda$  が最小 (極小) になる  $e$  は次の方程式を満たす.

$$\nabla c_0 + \nabla c_1 \lambda + \dots + \nabla c_6 \lambda^6 = w e \quad (18)$$

$\nabla$  は  $e$  の各要素に対する偏微分を表す。また、 $\omega$  は Lagrange 乗数であるが、 $f_6(\lambda; e) = 0$  は  $e$  のスケール対して不変であるので、 $\omega = 0$  である。

この式 (18) の探索空間は、 $e$  の球面 2 自由度と  $\lambda$  であり、全部で 3 次元である。

### 3.3 2次元探索

ここでは終結式を用いて式 (18) から  $\lambda$  を消去する。式 (18) は 3 つの方程式からなるが、これらをそれぞれ  $p_0(\lambda) = 0$ ,  $p_1(\lambda) = 0$ ,  $p_2(\lambda) = 0$  と書くことにし、 $p_1$  と  $p_2$ ,  $p_2$  と  $p_0$ ,  $p_0$  と  $p_1$  の 3 組の多項式に対する終結式をそれぞれ  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  とすると、

$$d_0 = d_1 = d_2 = 0 \quad (19)$$

である。これは、 $e$  の満たすべき、 $\lambda$  の消去された拘束式である。これらの例を図 3 に示す。画像対は図 1 と同じものである。これら 3 組の曲線群が交わる点で  $\lambda$  は極値となる。ただし、 $\lambda$  は 6 次方程式の解であるから、一つの  $e$  に対して 6 個の  $\lambda$  の候補があり、各々の極大/極小/鞍点が全て上記の 3 曲線の交点となる。

ここで、各  $d_i$  の実質的な次数について考える。 $p_i$  は  $\lambda$  の 6 次式なので、 $d_i$  は  $12 \times 12$  行列の行列式である。この行列の各要素は  $\nabla c_i$  の要素なので、 $e$  の要素  $(x, y, z)$  の 5 次同次式であり、 $d_i$  は  $5 \times 12$  次である。ここで、式 (17) に示した  $c_0$  と  $c_5$  および  $c_4$  の構造を考慮すると、 $d_i$  の全ての項に  $|e|^8$  が因数として含まれることは容易に判る。更に行列式の計算において  $|e|^8$  と  $|e|^{10}$  の項は全て打ち消しあい、 $|e|^{12}$  以上の項しか残らないことを示すことができる。よって、実際には  $d_i$  を  $|e|^{12}$  で除して得られる 48 次式を考えれば良く、以下ではこれを  $d_i$  と書く。

即ち、式 (19) は 3 変数の 48 次同次方程式が 3 本であり、解のスケールが意味を持たない 2 自由度の探索問題である。

### 3.4 1次元探索 (厳密解)

式 (19) の 3 変数  $x, y, z$  のうち  $z$  の絶対が最大であると仮定し、 $x/z$  と  $y/z$  に対する 2 変数の 48 次方程式とみなす。また、このとき  $z = 1$  としても差し支えないため、今後は分数表記は行わず単に  $x, y$  と書く。なお、この議論は  $x, y, z$  の役割を入れ換える全 6 通りの場合に対して可能であり、このうち 2 通りは前述の絶対値条件を満たす。ただ

し、 $x, y, z$  の値は事前には判らないので、実際には 6 通りの組み合わせ全てで探索を行った後に、条件を満たす解を採用する。

式 (19) に  $z = 1$  を代入し、 $y$  に関する 3 つの多項式とみて (係数は  $x$  の多項式である)、前節と同様に係数を積んだ行列を構成する。式が 3 つの場合には 2.4 節の Sylvester 行列の場合とは異なり、必ずしも全ての式を同一の回数使った正方行列ができるわけではないが、この場合は 3 つの式を 24 回づつ用いて都合良く  $72 \times 72$  行列を構成することができる。即ち、

$$A := \begin{bmatrix} \boxed{D} & & & \\ & \boxed{D} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{D} \\ & & & & \boxed{D} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{ただし、} D := \begin{bmatrix} d_{0,0} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{0,48} \\ d_{1,0} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{1,48} \\ d_{2,0} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{2,48} \end{bmatrix} \quad (21)$$

また、 $d_{ij}$  は  $d_i$  の  $y^j$  に対する係数であり、 $x$  に関する  $(48 - j)$  次式である。3 つの方程式  $d_i$  が共通解  $y$  を持つ条件はこの行列  $A$  の行列式が 0 であることであり、この条件から  $x$  が得られ、そのときの  $A$  の右零ベクトルは公比が  $y$  の幾何級数である。即ち式 (2.5) の形に帰着されたことになる。 $A_i$  は行列  $A$  中の  $y^i$  の係数であり、 $D = 48$  である。行列式  $|A|$  の次数は、対角項の次数の和によって計算でき、1728 である。 $x$  に対しては全探索を行い、 $y$  は従属的に得られる。

しかし、この手法の実現は容易ではない。 $d_i$  の係数を直接計算するには、3 元 5 次同次多項式を要素とする  $12 \times 12$  行列の行列式を 3 元の 48 次同次多項式として求める必要があり、要する計算量は天文学的な数字になる。また、数値計算で求めるには、倍精度 (53bit) では精度が不足するため、多倍長計算を要する。

### 3.5 1次元探索 (近似解)

前節の厳密解は膨大な計算量を要するので現実的ではない。そこで、近似を行い計算量を削減する。 $\lambda$  は最小化すべき残差であり、十分に小さい (通常、 $10^{-4}$  程度) ので、 $f_6$  において  $\lambda^2$  以上の項を無視する。このとき、

$$\lambda = -c_0/c_1 \quad (22)$$

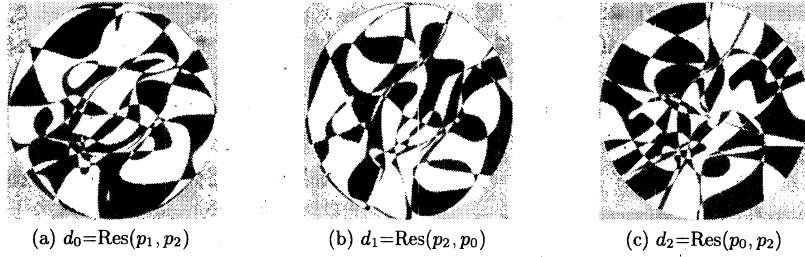


図 2: 3つの終結式. 終結式  $\text{Res}(p_i, p_j)$  の符号を白黒で表す. その境界線が  $d_i = 0$  を満たす曲線(群)である.

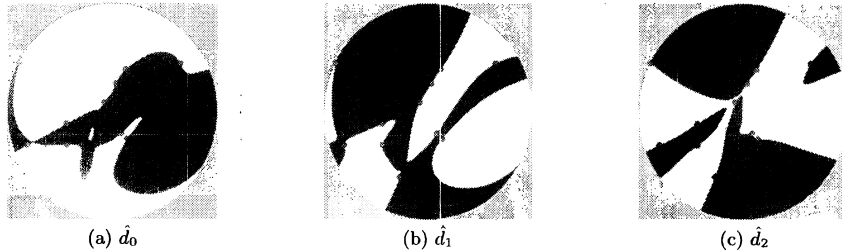


図 3:  $\nabla c_0 \times \nabla c_1 = (\hat{d}_0, \hat{d}_1, \hat{d}_2)^T$  の符号. 白と黒の境界線が曲線  $\hat{d}_i = 0$  であり, これらの交点において  $\lambda$  は極値を取る. それらの交点を小さい丸印で示す.

である. 図 1(b) は, 同図 (a) に対する近似である.  $\lambda$  の小さい暗い部分で, これらの図は, よく一致していることが判る. また, 式 (18) は,

$$\nabla c_0 + \nabla c_1 \lambda = 0 \quad (23)$$

となり, ここから  $\lambda$  を消去すると, 次式に示す 3 つの 10 次式が得られる.

$$(\hat{d}_0, \hat{d}_1, \hat{d}_2)^T := (\nabla c_0) \times (\nabla c_1) = 0 \quad (24)$$

これは前節の  $d_i$  に相当する. 例を図 3 に示す. 前節の  $72 \times 72$  行列  $A$ (式 (20)) を構成した場合と同様に,  $\hat{d}_i$  の係数を並べた  $3 \times 11$  行列を 5 段積んで,  $15 \times 15$  行列を作ると, この行列の行列式が 0 とならねばならない. この条件から  $x$  が, この行列の右零空間から  $y$  が得られる.

式 (2.5) の形で考えると,  $A_i$  は  $15 \times 15$  行列,  $D = 10$ , 行列式の次数は 75 である.

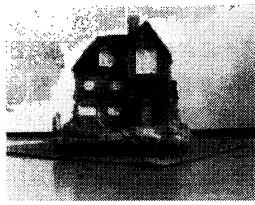
この手法では,  $e$  が与えられた時の  $\lambda$  は 1 次方程式の解であるから, 候補は 1 つしかないため, 前節の厳密法よりは解の数が少ない. しかし, 依然として極大や鞍点も含まれる. これを除くため,  $\lambda$  のヘッセ行列  $H := \nabla \nabla^T \lambda$  を考慮する.  $\lambda$  の値は  $e$  のスケールに依らないため,  $H$  の固有値の一つは 0 であり, これに対応する固有ベクトルは  $e$  で

ある. 極小点において残り 2 つの固有値は正でなければならない.

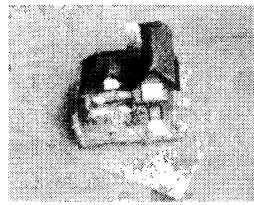
## 4 実験

ここでは, 提案手法 (75 次の近似法) の効果を検証するための実験結果を示す<sup>2</sup>. 実験には, 家の模型を撮影した 37 枚の実画像を用いた. このうち 2 枚を図 4 に示す. 37 枚の画像中で 100 個の対応点の座標を手動で与えた. 誤対応はないが, 平均約 3pixel の誤差が含まれている. このような入力データを用いることにより, 正規分布誤差を加えたシミュレーションでは見られない性質のノイズが現れると考えられる. 物体形状とカメラの配置を図 5 に示す. なお, この図は家の模型を中心としてほぼ等距離から等間隔に撮影した 30 枚の画像を用いた bundle adjustment の結果である. 残りの 7 画像は物体との距離や焦点距離が異なる. 図 4(b) は, その一例である. これらにより, エビボールの位置は画像中心付近から画像辺縁部まで, 画像対によって様々に異なる. また, 物体中の一平面のみしか撮影されていない画像もあり, 復元問題の性質に大きな影響を与える「シーンの厚み」も多様である. これらの画像中で 7 点以上の対応点

<sup>2</sup>厳密法は実現されていない.



(a) 第0画像



(b) 第31画像

図4: 入力画像の例. 640×480 pixel, 全37枚中2枚.

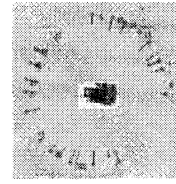


図5: 対象物体(中心付近)とカメラ位置(周囲の円)

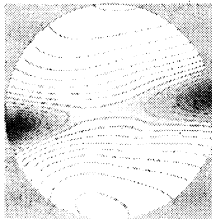


図6: 例1—単純な空間の例

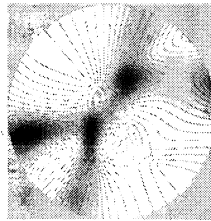


図7: 例2—複数の局所解がある例

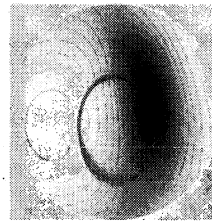


図8: 例3—特異配置に近い例

が存在する対は397通りあり、これら全てについて実験を行った。対応点数の最大値は51である。対応点座標は平均が原点、分散が $\sqrt{2}$ になるように変換した後、提案手法を適用した。

また、bundle adjustmentの結果を再投影して得られる対応点座標を用いたノイズのないシミュレーション実験も行い、8点アルゴリズムでも本手法でも正解が得られることを確認した。なお、この結果については、これ以上触れない。

#### 4.1 探索空間の例

図6から8は、幾つかの画像対における、 $e$ に対する $\lambda$ の変化の例である。図6は非常に単純な例であり、解は1つで等高線も滑らかである。このような場合、提案手法でも8点アルゴリズムでも、正解に近い解を得ることができる。

図7には、3つの暗い領域がある。すなわち、局所解があるため、全ての候補を列挙する必要があるが、従来手法ではどの解が得られるか判らない。どの解にも近くない可能性もある。通常、3つの局所解のうち、 $\lambda$ が最小のものが「最適」と考えるが、これは必ずしも正しくはない。ここで用いた397画像対の中に、bundle adjustmentで得られた「正解」に最も近い局所解と、 $\lambda$ が最小の局所解が異なる場合があった。

図8は、特徴点が7つしかなく、ほぼ2次曲線

表2: 特徴点数と解数の関係

解数	画像対数	特徴点数
1	75	13-48
2	129	8-44
3	139	7-51
4	40	7-30
5	10	10-14
6	3	7-11
14	2	7-8

状に分布している画像に対する例である。この例では、 $\lambda$ の小さい領域が細長い環状の「溝」として現れている。このような「溝」は、非線形最適化の反復法によるエビボールの探索にとって極めて有害である。

#### 4.2 解の数

図2では、得られた解の数によって画像対を分類した。また、それらの画像対での特徴点数も示した。表から、対応点数が多い場合には解の数が少なくなる傾向があると言える。

なお、解の数の理論的上限は不明であるが、6を越える場合は、数値計算誤差によって現れた誤りであると思われる。例えば、Secant法において2つの解が非常に近接していると1次収束となるため、反復が打ち切られて十分な精度が得られない。

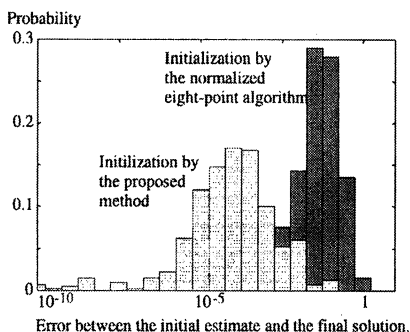


図 9: 誤差の分布

このような場合や、その他の数値計算誤差によって誤った解が現れ、得られた解の数が実際の解よりも多くなる可能性がある。なお、 $x, y, z$  の 6 通りの組み合わせについての探索は冗長であり、1 つの解は 2 回から 3 回発見されるはずなので、このことを利用して 1 回しか得られなかった解は除外してある。

### 4.3 精度

提案手法で得られた解を初期値として、非線形最適化によって代数的誤差を最小化するエビボールを求め、初期値との差を調べた。なお、初期値候補は複数あるので、最も差の小さいものを選択した。また、同様の実験を 8 点アルゴリズムに対して行い提案手法と比較した。初期値との差は SSD を用いた。ただし、 $SSD(x, y) := |x - y|^2$  とする。397 通りの画像対に対する SSD の頻度分布を図 9 に示す。提案手法の山は 8 点アルゴリズムよりも左にあり精度が高いことが判る。8 点アルゴリズムの方が良い結果を与える場合もあるが、提案手法の解の精度は平均 3 桁程度良いといえる。

### 4.4 計算時間

1 次元探索によって全ての解を得るための計算時間は、3.2-GHz の Pentium4 上で 100ms 程度である。図 6 の様な図を描くには、6 次方程式の求解を数十万回行う必要があるため、数秒の時間を要する。即ち、1 次元探索法は 2 次元探索法よりも、数十倍高速である。

## 5 おわりに

本稿では 2 画像の点对応からエビボールを推定する問題を、1 次元の探索問題に帰着する方法を述べた。厳密解の実現は容易ではないため、多少

の近似を行ったが、これによる解の劣化は従来の 8 点アルゴリズムにおいてランク制約を無視することによる劣化よりも軽微である。特に、本手法では全ての解候補を列挙できるという利点があり、これは非線形最適化による最尤推定の初期化に有効である。

本手法では 75 次方程式を解く必要があるが、この解法には改良の余地がある。また、これよりも低い次数の定式化が可能か否かは今後の検討を要する。これは厳密解に対する 1728 次の定式化についても同様である。また、 $|F|_F = 1$  の代わりに [5] で述べられている拘束の下での解も同様の方法で表すことができると考えられる。基礎行列よりも制約の多い基本行列の場合は幾分困難になる。また、Sampson 誤差やある種のロバスト関数等、目的関数が有理関数の場合に関して、原理的には同様の手段によって 1 次元化が可能と考えられるが、結果の方程式は更に高い次数になるため、別の工夫が必要であろう。

## 参考文献

- [1] FUSIELLO, A., BENEDETTI, A., FARENZENA, M. and BUSTI, A., Globally Convergent Autocalibration Using Interval Analysis, *IEEE Trans. PAMI*, **35**, 12 (2004), 1633–1638.
- [2] HARTLEY, R. I., In Defence of the 8-point Algorithm, *IEEE Trans. PAMI*, **19**, 6 (1997), 580–593.
- [3] HARTLEY, R. I. and ZISSERMAN, A., *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, second edition (2004).
- [4] KAHL, F. and HENRION, D., Globally Optimal Estimates for Geometric Reconstruction Problems, *Proc. ICCV2005* (2005), 978–985.
- [5] TORR, P. H. S. and FITZGIBBON, A. W., Invariant Fitting of Two View Geometry, *IEEE Trans. PAMI*, **26**, 5 (2004), 648–650.
- [6] TRIGGS, B., MCLAUCHLAN, P. F., HARTLEY, R. and FITZGIBBON, A. W., Bundle adjustment — A modern synthesis, *Lecture Notes in Computer Science*, **1883** (2000), 298–375.
- [7] TRIVEDI, H., A Semi-Analytic Method for Determining Stereo Camera Geometry from Matched Points in a Pair of Images: Coincident Meridional Planes, Exact or Noisy Data, *CVGIP*, **51**, 3 (1990), 299–312.
- [8] WEISSTEIN, E. W., Resultant, *From MathWorld — A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/Resultant.html> (1999).