

非剛体レジストレーションによる時系列画像中の揺らぎ除去

吉村 真 清水 雅夫 田中 正行 奥富 正敏

東京工業大学 大学院理工学研究科 機械制御システム専攻

{yoshi, mas, mtanaka}@ok.ctrl.titech.ac.jp, mxo@ok.ctrl.titech.ac.jp

概要 時系列画像を用いた画像処理には、安定で高精度な画像レジストレーションを必要とするものが多い。このような画像レジストレーションでは、多くの場合、アフィン変換や射影変換などの、比較的自由度が低いモーションモデルが採用されてきた。しかし、このようなモーションモデルでは正確に表現できないような変形をする撮影対象もある。本論文では、画像上に多数配置した制御点の移動をパラメータとする、B-Spline 画像変形を用いた画像間レジストレーション手法を検討する。従来、このような非剛体レジストレーションでは、画像の輝度勾配を用いた勾配法によってモーションパラメータを求めていたが、テクスチャが少なく輝度勾配が小さい領域では勾配法が安定に収束しない問題があった。そこで、輝度勾配に応じて変化する安定化項をコスト関数に導入し、画像によらず高精度でしかも安定にモーションパラメータを推定できるようにした。非剛体変形する対象の例として、望遠レンズで遠方の対象を撮影するとき生じる大気揺らぎ（かげろう）と、水面を通して水中物体を撮影するとき生じる揺らぎを取り上げる。これらの揺らぎは、観測時間を十分に長く取れば平均位置に対して対称になる。そこで、このような揺らぎを含む時系列画像を時間方向に平均化することで、空間的にぼやける代わりに揺らぎを除去できる。この平均化画像に対して各入力画像を非剛体レジストレーションすることで、入力時系列画像から揺らぎを除去することができる。揺らぎを含む実画像を利用した実験を行い、効果を確認した。

Elimination of Fluctuations from Sequential Images with Non-Rigid Motion Model

Shin Yoshimura Masao Shimizu Masayuki Tanaka Masatoshi Okutomi

Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

{yoshi, mas, mtanaka}@ok.ctrl.titech.ac.jp, mxo@ok.ctrl.titech.ac.jp

Abstract

A stable and highly accurate image registration technique is required for sequential image processing. Affine and projective transforms are often used for motion models of the image registration, but some objects cannot be modeled with the motion models using such a limited number of parameters. In this paper we discuss a non-rigid registration that utilizes a B-Spline image transformation with a parameter-set of the control vertex positions. The parameter-set can be estimated using a gradient-based parameter optimization method. The optimization method is, however, sometimes unstable at texture-less regions with image noise. We have introduced a stabilization term that varies with the magnitude of image gradient to the cost function, which allows estimating a stable and accurate parameter-set even if the image has a weak texture. In the experiments, we have applied the stable non-rigid registration technique to eliminate two types of fluctuations in image sequences; an atmospheric fluctuation and a fluctuation through a watter surface. A deformation-eliminated reference image is obtained by averaging image frames in the sequence, and then each frame is non-rigidly registered to the reference image. The experimental results demonstrate the stability and accuracy of the proposed non-rigid image registration technique.

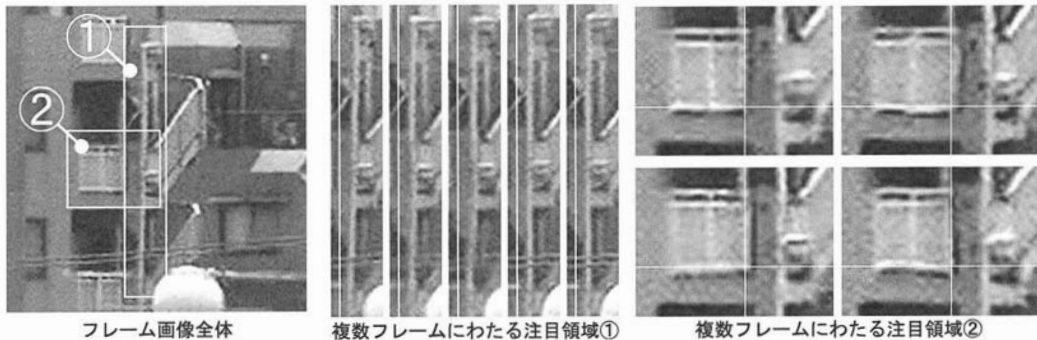


図 1: 遠方を撮影した時系列画像. 拡大図中の白線は, 変形を分かりやすく表示するためのガイドである.

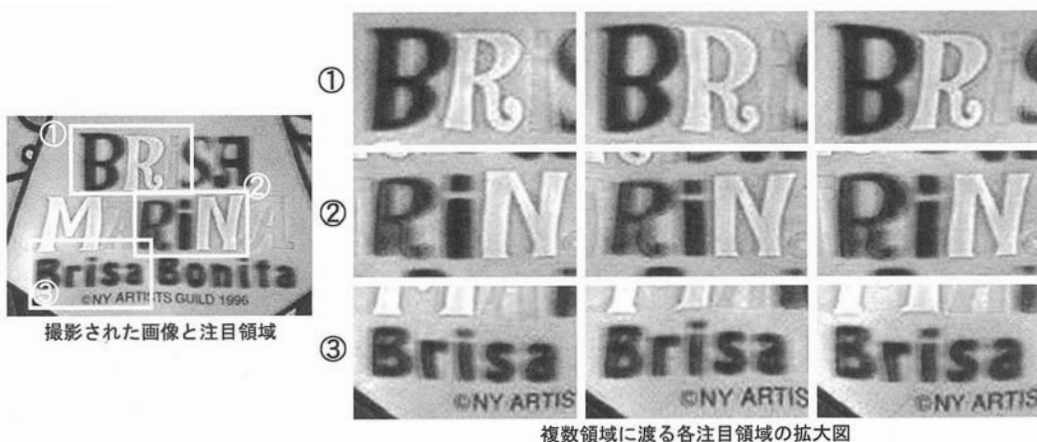


図 2: 水中物体を水面上から撮影した時系列画像

1 はじめに

同一の撮影対象を含む 2 枚の画像間で座標対応を求め, 位置を合わせることを, 画像のレジストレーションという. この座標対応を定義する座標変換関数をモーションモデルと呼び, そのパラメータをモーションパラメータと呼ぶ. 現在広く利用されている画像間のモーションモデルには, アフィン変換や射影変換などの座標変換が利用されているが, 画像のモーションがこれらの変換で完全に表現できる場合は限られており, 撮影対象が平面近似できない場合や非剛体の場合は, 画像を高精度にレジストレーションすることができない.

医療分野で, MRI や CT から得られた人体の画像同士をレジストレーションする研究が行われている [6]. 人体は剛体ではないため, 非剛体変形モーションモデルが利用される [3, 4]. 非剛体変形モーションモデルでは, B-Spline 関数 [7] や Thin-Plate Spline (TPS) 関数 [2]

を用いた座標変換が利用されている. B-Spline 関数を用いた座標変換では, 変換の計算コストを少なくできるが, 制御点による画像の変形が直感的に理解しにくい. これに対し, TPS による座標変換関数は, 制御点の移動に変形が追従するため, 直感的な画像の変形が可能だが, 変換の計算コストは膨大である. この直感性ゆえ, 特徴点や曲線といった特徴ベースでの非剛体変形推定は TPS によるものが多い [1] が, 近年, 画像の輝度値を直接利用した領域ベース手法で, 非剛体変形のモーションパラメータを推定する手法も提案されている [3, 4, 5].

ところで, 望遠レンズを使って遠方を撮影すると, 対象の形状が不規則に揺らぐ「かげろう」を観測することができる. 図 1 に, 遠方を撮影した時系列画像の例を示す. 直線形状の配管 (注目領域①) や長方形の柵 (注目領域②) に注目し, フレームごとに補助線 (画像内の白線) と比較すると, 不規則な揺らぎを含んでいることが分かる. 図 2 に, 水中にある平面を水面上から撮影

した時系列画像を示す。部分拡大図を見るとわかるように、遠方を撮影した画像と同様に不規則な揺らぎを含んでいる。

時系列画像に発生する揺らぎには空間的な変形が滑らかなものが多いため、本論文では、非剛体変形モデルの座標変換関数として、離散値の補間関数の中で補間が最も滑らかであり、座標変換への制御点の影響範囲に局所性のある B-Spline 関数を採用する [7]。そして、揺らぎのある時系列画像のモーション推定にこのモデルを適用して、非剛体変形する画像間のモーション推定がサブピクセル精度で行えることを示し、モーション推定領域内にテクスチャレスの部分が多く存在した場合にも安定なモーション推定法を提案する。また、この手法を用いて、時系列画像から不規則な揺らぎを除去する手法を提案する。

2章以降の構成は次の通りである。2章で B-Spline を用いたモーションモデルについて説明し、Gauss-Newton 法を用いてモーションパラメータを安定に推定する方法を提案する。3章では、揺らぎの対称性を利用した、揺らぎ除去手法を提案し、4章で提案手法の精度評価と、実画像を用いた実験結果を示す。

2 非剛体レジストレーション

本章では、非剛体変形を B-Spline 関数を用いたモーションモデルで表し、このモーションパラメータを Gauss-Newton 法で求める手法を説明する。次に、モーションパラメータを安定に推定するために、画像の輝度勾配の大きさに応じて強さが変化する安定化項を導入する。このとき、安定化項の導入を容易にするために、モーションパラメータ推定には Gauss-Newton 法を採用する。

本研究と関連研究の関係は、以下の通りである。文献 [8] では、B-Spline 関数を含むモーションモデルで画像間の視差を表し、Levenberg-Marquardt 法でモーションパラメータを推定している。B-Spline 関数で非剛体変形をモデル化する手法は、文献 [3] と [4] で定式化された。また、文献 [4] では各種の最適化手法が比較検討されていて、収束までの繰り返し回数の観点からは Levenberg-Marquardt 法が優れていると結論付けている。

以下、2.1 節と 2.2 節では B-spline 関数を用いたモーションモデルと Gauss-Newton 法によるモーションパラメータ推定法を説明する。次に、2.3 節で安定化項を導入する。

2.1 モーションモデル

B-Spline 関数を用いたモーションモデルでは、ある座標 \mathbf{x} の位置変化を、画像上に配置した制御点の位置変化の重み付け平均により求める。制御点配置の初期位置が画像上で等間隔のときは、座標変換を次のように記述できる [3]。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n c_i \Delta \hat{\mathbf{x}}_i \quad (1)$$

ここで n は制御点数、 $\mathbf{x}' = [x', y']^T$ は変換後の座標、 c_i は各制御点に対する重み係数、 $\Delta \hat{\mathbf{x}}_i = [\Delta \hat{x}_i, \Delta \hat{y}_i]^T$ は i 番目の制御点の初期位置からの変位を表す。等間隔に配置した制御点の初期位置を $\hat{\mathbf{x}}_i^{initial} = [\hat{x}_i^{initial}, \hat{y}_i^{initial}]^T$ 、初期制御点間隔を h_x, h_y としたとき、

$$t_{xi} = |(x - \hat{x}_i^{initial}) / h_x| \quad (2)$$

$$t_{yi} = |(y - \hat{y}_i^{initial}) / h_y| \quad (3)$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 2/3 - (1 - |t|/2) t^2 & , \text{if } 0 \leq |t| \leq 1 \\ (2 - |t|)^3 / 6 & , \text{if } 1 < |t| < 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

とおくと、 c_i は式 (5) で表される。

$$c_i = \beta(t_{xi}) \beta(t_{yi}) \quad (5)$$

制御点を画像上に等間隔に並べる場合は、画像の分割数と画像のサイズより各画素座標に対する c_i を予め求めておくことができる。さらに B-Spline 関数は画素に対する影響力に局所性があるため、 c_i のほとんどは 0 となる。

図 3 に、B-Spline 関数を用いたときの、制御点の移動による画像の変形例を示す。同図 (a) の白丸と黒丸は、画像上に配置した制御点を表す。黒丸で表した中央の制御点だけを移動したとき、同図 (b) のような画像の変形が生じる。このとき、変形の影響には局所性があるため、同図 (b) で灰色で示した領域だけが変形する。

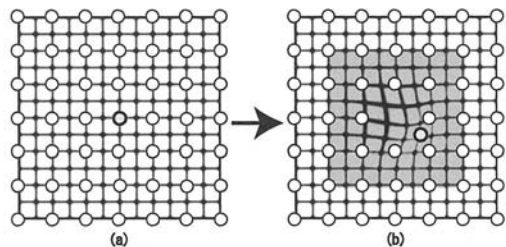


図 3: 制御点の移動と画像の変形例

2.2 モーションパラメータ推定

前節で述べた制御点の移動を並べたベクトルを、モーションパラメータ μ とする。

$$\mu = [\Delta\hat{x}_1, \dots, \Delta\hat{x}_n, \Delta\hat{y}_1, \dots, \Delta\hat{y}_n]^T \quad (6)$$

基準画像 I_{base} 及び、 k 番目のフレーム画像 I_k を考える。式 (7) は、画像 I_{base} の注目領域をモーションパラメータ μ_k により変形したものと画像 I_k の輝度値の差分の二乗和を示す。 $\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k)$ は式 (1) で表される座標変換を μ_k を用いて書き表したものであり、画像座標 \mathbf{x} をモーションパラメータ μ_k で変換した座標を表す。

$$E(\mu_k) = \sum_{\mathbf{x}} \|I_k(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k)) - I_{base}(\mathbf{x})\|^2 \quad (7)$$

式 (7) を最小化する画像 I_{base} から画像 I_k へのモーションパラメータ μ_k を、Gauss-Newton 法により算出する。画像 I_{base} から、1 つ前のフレーム画像 I_{k-1} へのモーションパラメータ μ_{k-1} を初期値とすると、 μ_k による座標変換 $\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k)$ は、 μ_{k-1} と隣接画像間の座標変化 $\Delta\mathbf{x}$ を用いて式 (8) で記述できる。

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k) = \mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_{k-1}) + \Delta\mathbf{x} \quad (8)$$

また、座標 \mathbf{x} から微小に離れた $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ の輝度値はテイラー展開により式 (9) のように近似できる。ただし、2 次以上の項は微小なため無視している。

$$I_k(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx I_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial I_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} \quad (9)$$

さらに、モーションパラメータの変化 μ_δ による座標変化 $\Delta\mathbf{x}$ は、各画像座標ごとに異なる係数行列 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を用いて線形な式 (10) で表現できる。

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mu_\delta \quad (10)$$

係数行列 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は式 (11) のように座標 \mathbf{x} に関する B-Spline の補間係数を並べた行列であり、その要素は事前に計算しておくことが可能である。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & c_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式 (7)～式 (9) より、 μ_δ に関する式 (12) が得られる。

$$E(\mu_\delta) = \sum_{\mathbf{x}} \|\Delta I + I_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mu_\delta\|^2 \quad (12)$$

ただし、

$$\Delta I = I_k(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_{k-1})) - I_{base}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

$$I_{\mathbf{x}} = \frac{\partial I_k(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_{k-1}))}{\partial \mathbf{x}} \quad (14)$$

式 (12) はモーションパラメータの変化 μ_δ の 2 次関数になっている。式 (12) を μ_δ で微分しその値を 0 とすることで、モーションパラメータの変化 μ_δ は式 (15) で与えられる。

$$\mu_\delta = - \left(\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^T \mathbf{g} \right)^{-1} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^T \Delta I \quad (15)$$

$$\mathbf{g} = I_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

こうして得られた μ_δ を、式 (17) のように画像 I_{base} から画像 I_{k-1} へのモーションパラメータ μ_{k-1} に加えることで、画像 I_{base} から画像 I_k へのモーションパラメータを求めることができる。

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \mu_\delta \quad (17)$$

実際には式 (9) の線形近似のために、一度の計算では評価関数 $E(\mu_k)$ を最小にする μ_k は求まらない。 μ_{k-1} を式 (18) のように更新し、その値が収束するまで式 (15) の計算を繰り返すことで、画像 I_{base} から画像 I_k へのモーションパラメータ μ_k が算出できる。

$$\mu_{k-1} \leftarrow \mu_{k-1} + \mu_\delta \quad (18)$$

2.3 モーション推定の安定化

画像間差分二乗和 (SSD) の最小化によるモーションパラメータ推定手法では、輝度値変化が小さい領域にノイズが含まれる場合や、注目領域が極端に小さい場合に、モーション推定が発散する場合がある。モーションパラメータの推定を安定化するために、制御点が初期位置から離れるほど初期位置に引き戻そうとする安定化項 $C(\mu_\delta)$ を式 (12) に付加する。制御点が影響を及ぼす領域で勾配の変化が大きければ安定化項の影響が小さく、勾配の変化が小さければ影響が大きくなるようにする。

$$C(\mu_\delta) = \sum_{\mathbf{x}} \left\| \mathbf{A}(\mathbf{x})^T \lambda^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mu_\delta \right\|^2 \quad (19)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial I}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式 (19) は、画像上の各位置における輝度値の勾配 (式 (20)) の逆数を各制御点への重み行列に掛け合わせたものであるが、この値は勾配が小さい領域を周りに多く含む制御点に対しては大きくなり、勾配が大きい領域を含む制御点に対しては小さくなる。式 (19) を式 (12) に加えた式 (21) を使って、 μ_δ を推定する。

$$E_{stable}(\mu_\delta) = E(\mu_\delta) + \gamma C(\mu_\delta) \quad (21)$$

式 (21) を最小にする μ_δ を求めることで、輝度変化のない領域を含んでいる場合でも安定にモーションが推定

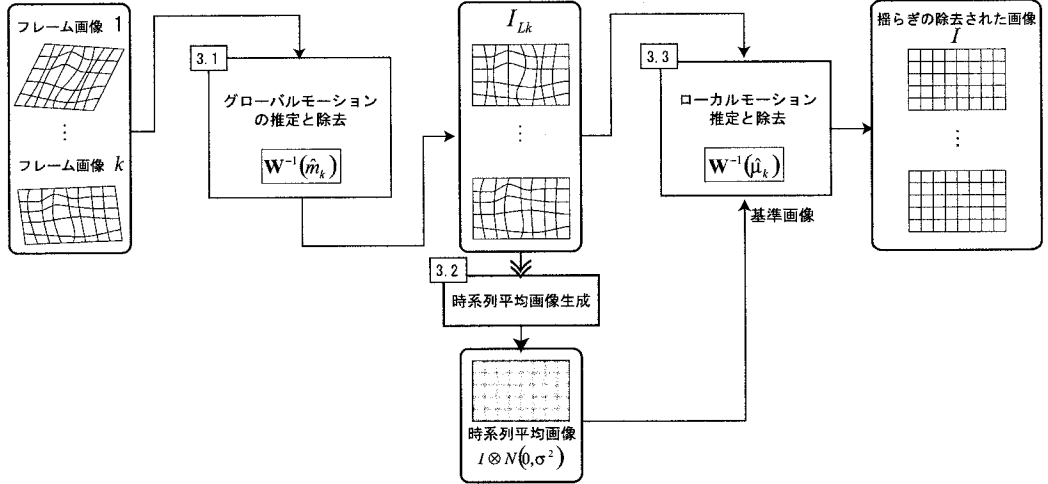


図 4: 時系列画像からの揺らぎ除去アルゴリズム

できる。係数 γ は安定化項全体の重みを調節する定数である。式 (21) は式 (12) と同様に μ_δ の 2 次関数なので、以下のように最小値を与える μ_δ を求めることができる。

$$\mu_\delta = -\mathbf{H}'^{-1} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^T \Delta I \quad (22)$$

$$\mathbf{H}' = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^T \mathbf{g} + \gamma (\lambda^{-1} \mathbf{A})^T (\lambda^{-1} \mathbf{A}) \quad (23)$$

3 時系列画像からの揺らぎ除去

ここでは、揺らぎのある時系列画像から揺らぎを取り除く方法を示す。 I は揺らぎを含まない画像、 I_k は観測された時系列画像の第 k フレームを表す。また、 k 番目のフレーム画像からカメラの移動による画像の全体的なモーションを除去した画像を I_{Lk} とする。以降、画像の全体的なモーション（主に平行移動と回転）をグローバルモーションと呼び、不規則な揺らぎによるモーションをローカルモーションと呼ぶ。 m_k 及び μ_k は、第 k フレームのそれぞれのモーションのパラメータを表す。提案する揺らぎ除去手法は、図 4 に示した 4 段階で構成する。

3.1 グローバルモーションの推定と除去

観測画像の第 k フレームは、次のように、ローカルモーションで変形し、さらにカメラの揺れなどによるグローバルモーションで変形しているとする。

$$I_k(\mathbf{W}(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k); m_k)) = I(\mathbf{x}) \quad (24)$$

ローカルモーションが比較的小さければ、観測画像をガウシアンカーネルで畳み込んでからグローバルモーションを効果的に推定できる。推定したモーションパラメータ \hat{m}_k を使った逆変換によって次のようにグローバルモーションをキャンセルし、グローバルモーションの除去された画像 I_{Lk} を得ることができる。

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k) \approx \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k); m_k); \hat{\mu}_k) \quad (25)$$

3.2 時間平均画像の生成

N が十分に大きく、ローカルモーションが平均 0、分散 σ^2 の正規分布で近似できると仮定すれば $I_{Lk}(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k))$ の平均値は次のようになる。

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{Lk}(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k)) \approx I(\mathbf{x}) \otimes N(0, \sigma^2) \quad (26)$$

ただし \otimes は畳み込み積分を表す。つまり $I_{Lk}(\mathbf{W}(\mathbf{x}; \mu_k))$ の平均画像は、揺らぎを含まない画像をガウシアンカーネルでぼかした画像になる。以降この画像を時系列平均画像と呼ぶ。

3.3 ローカルモーションの推定と除去

この時系列平均画像を基準画像として、2章で提案した手法により、各フレーム画像のローカルモーションパラメータ $\hat{\mu}_k$ を推定する。次に、各フレームについて推定された $\hat{\mu}_k$ で、次のように各フレーム画像からローカルモーションをキャンセルすることで、ローカルモ-

ションとグローバルモーションが取り除かれた安定化時系列画像 $I(x)$ を生成する。

$$x \approx W^{-1}(W(x; \mu_k); \hat{\rho}_k) \quad (27)$$

4 実験結果

4.1 節ではシミュレーション実験を行い、4.2 節では実画像実験を行う。シミュレーション画像のサイズは 60×60 [画素] で、画像上に 9×9 [個] の制御点を均一に配置し、最大 3 ピクセルのランダムな移動を加えて、B-Spline 関数を用いて画像を変形させた。さらに分散 5 のガウシアンノイズを加えたものを実験に使用した。

4.1 シミュレーション画像実験

図 5 の画像間で、提案手法によるモーション推定を行い、制御点の配置密度を変えつつ、その精度を比較した結果が図 6 である。横軸は注目領域のモーションを推定するために画像上に配置した制御点の個数の平方根を表し、縦軸は推定された μ_k , m_k による座標変換結果と真の座標間の RMSE を表す。ローカルモーション除去を行わない場合に RMSE が 0.5 [画素] であるのに対し、非剛体モーションモデルによる推定では制御点密度にかかわらずより精度の高い結果が得られている。シミュレーション画像を変形するときと同じ 9×9 [個]

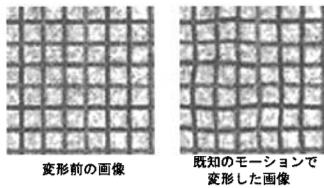


図 5: モーション推定精度評価用の画像

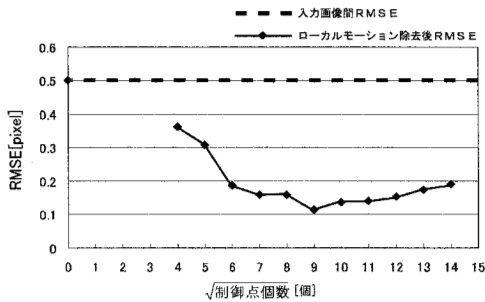


図 6: 制御点の配置密度とモーション推定精度

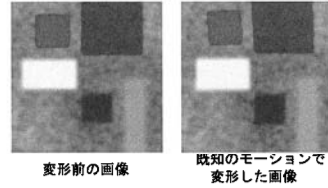


図 7: 安定性評価用の画像

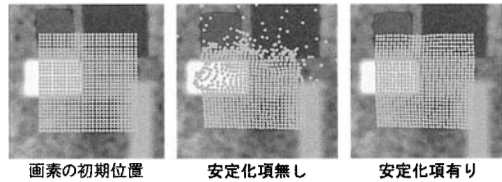


図 8: モーション推定の安定化

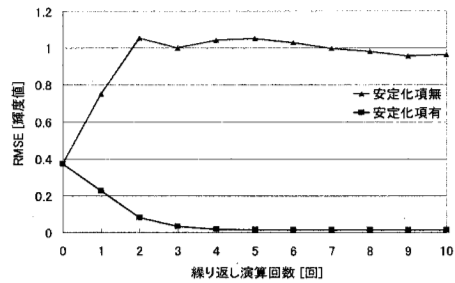
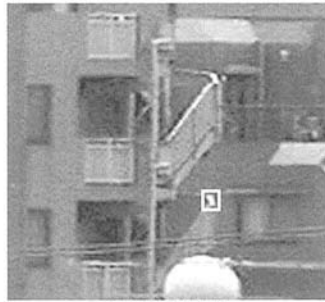


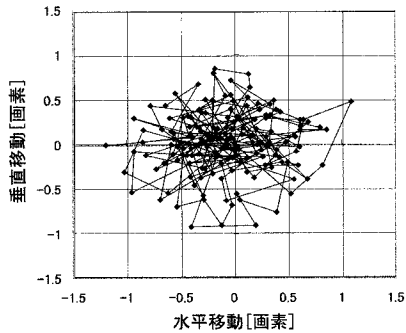
図 9: 繰り返し処理ごとの RMSE の変化

の制御点を設定したときに、RMSE が最小となる。設定した制御点の個数がこれより少ないときには、画像の非剛体変形を正確に表現できないために RMSE が大きくなり、これより多いときには、ノイズの影響で次第に RMSE が大きくなる。

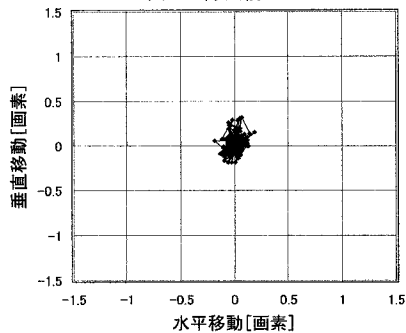
図 7 のシミュレーション画像は、図 5 に比べ、テクスチャの少ない領域を多く含んでいる。図 8 は図 7 の画像間でモーションを推定し、対応する座標を表示したものである。中央の画像は、安定化項無しでモーション推定を行った結果であり、モーション推定がテクスチャの少ない領域で発散してしまっている。右側の画像は、安定化項を付けたモーション推定の結果であり、テクスチャの少ない領域でも安定にモーション推定ができています。図 9 は、安定化項がある場合とない場合での、繰り返し計算ごとの、注目領域全体に関する RMSE を示したものである。安定化項がないと発散するのにに対し、安定化項を付加した場合は速やかに値が小さくなり収束していることが分かる。



追跡した特徴点



(a) 除去前



(b) 除去後

図 10: 揺らぎ除去前後の特徴点の移動

4.2 実画像実験

図 10 に、かげろうを含む時系列画像から提案手法により揺らぎを除去した結果を示す。白枠で囲まれた画像中の特徴点の移動（平行移動）を、172 フレームに渡り追跡した。各フレームを 10 倍に拡大し、画像間テンプレートマッチングにより特徴点を追跡した。パラボラフィッティングによりサブピクセル精度の座標対応を求めている。図 10(a) は揺らぎ除去前、同図 (b) は揺らぎ除去後の特徴点の移動を示している。揺らぎ除去前の特徴点の移動の分散は 0.30 なのに対し、揺らぎ除去後の

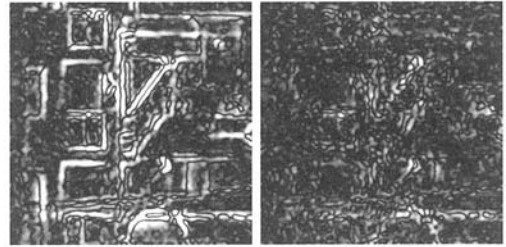


図 11: 揺らぎ除去前後のフレーム間差分画像

分散は 0.012 である。図 11 は、揺らぎを含む時系列画像中の、異なる時刻のフレーム画像間の輝度の差の絶対値を示したものである。左側の差分画像は揺らぎを含む時系列画像 (RMSE = 5.5)、右側の差分画像は揺らぎ除去後の時系列画像 (RMSE = 2.0) の同一フレームペアの差分画像を示す。図 10、図 11 から、提案手法により、時系列画像から画像全域に渡り、揺らぎが大幅に除去できていることが確認できる。

図 12 は水中を撮影した時系列画像に、本論文で提案した揺らぎ除去手法を適用した結果を示している。時系列平均画像の作成には 170 フレームを使用した。図 12(1) はグローバルモーション除去後の時系列画像、同図 (2) はさらに揺らぎ（ローカルモーション）を除去した時系列画像、同図 (3) は時系列平均画像である。

5 まとめ

本論文では、B-Spline を利用した非剛体変形モデルによる画像のモーション推定を安定に行う手法を提案した。このモーション推定手法では、従来のグローバルモーションモデルだけでは表現できない画像の変形を、より高精度に推定できる。また、時系列画像からの揺らぎ除去手法を提案し、その有効性を実画像実験により示した。

参考文献

- [1] E. V. Tunzelmann A. Bartoli and A. Zisserman. Augmenting Images of Non-Rigid Scene Using Point and Curve Correspondences. In *Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1063–69, 2004.
- [2] F. L. Bookstein. Principal Warps: Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformation. In

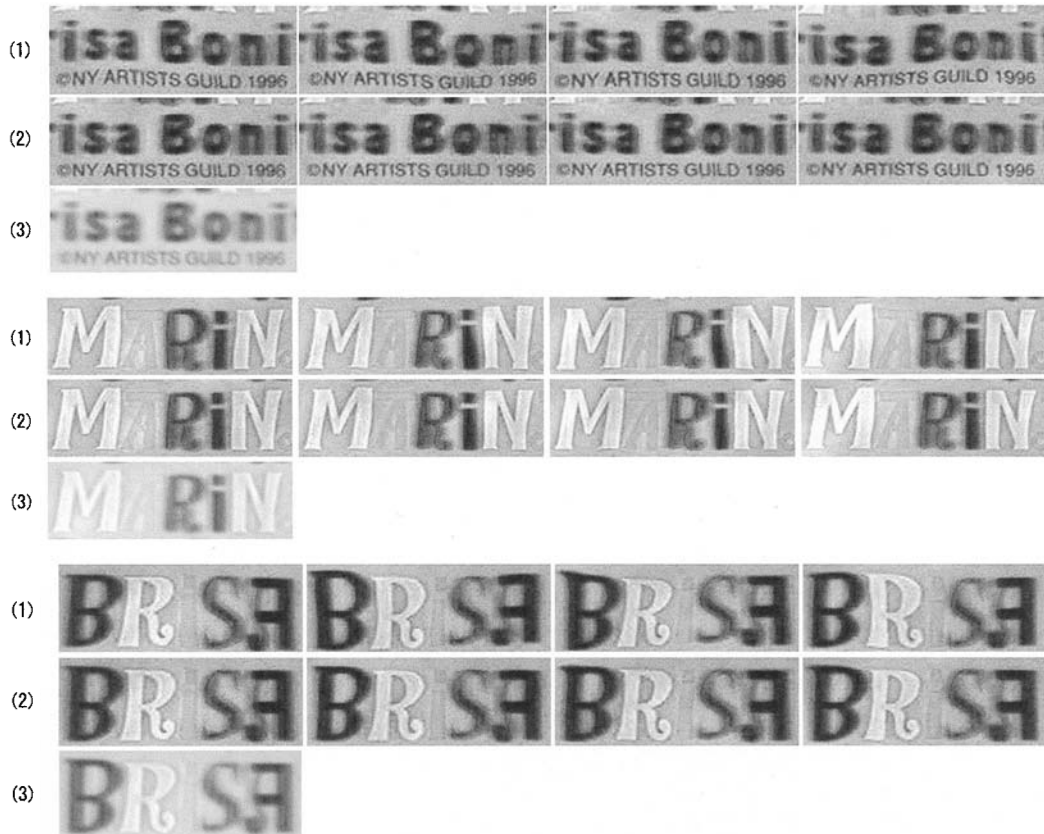


図 12: 揺らぎ除去結果：(1) 除去前, (2) 除去後, (3) 時系列平均画像

- IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pp. 567–585, 1989.
- [3] J. Kybic and M. Unser. Unwarping of Unidirectionally Distorted EPI Images. In *IEEE Trans on Medical Imaging*, pp. 80–93, 2000.
- [4] J. Kybic and M. Unser. Fast Parametric Elastic Image Registration. In *IEEE Trans on Image Processing*, Vol. 12, No. 11, pp. 1427–1442, 2003.
- [5] J. Lim and M. H. Yang. A Direct Method for Modeling Non-rigid Motion with Thin Plate Spline. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1063–69, 2005.
- [6] S. Marland and C. J. Twining. Constructing Diffeomorphic Representations for the Groupwise Analysis of Nonrigid Registrations of Medical Images. In *IEEE Trans on Medical Imaging*, Vol. 23, No. 8, pp. 1006–20, 2004.
- [7] G. Wolberg S. Lee and S. Y. Shin. Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines. In *IEEE Trans on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 3, No. 3, pp. 228–224, 1997.
- [8] R. Szeliski and J. Coughlan. Spline-Based Image Registration. In *IJCV 22(3)*, pp. 199–218, 1997.