

制約付きパラメータ推定のための拡張FNS法

金谷 健一* 菅谷 保之†

* 岡山大学大学院自然科学研究科 † 豊橋技術科学大学情報工学系

線形化可能な制約付き最尤推定のための拡張 FNS 法を提案する。これは Chojnacki らの CFNS 法に変わる方法である。内部拘束の個数は任意であり、Chojnacki らの FNS 法の真の拡張になっている。基礎行列の計算を例にとり、シミュレーションによって精度を理論限界 (KCR 下界) と比較して、CFNS 法は必ずしも正しい解に収束しないが、拡張 FNS 法は常に最適解に収束することを示す。

Extended FNS for Constrained Parameter Estimation

Kenichi Kanatani* and Yasuyuki Sugaya†

*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

We present a new method, called “EFNS” (“extended FNS”), for linearizable constrained maximum likelihood estimation. This complements the CFNS of Chojnacki et al. and is a true extension of the FNS of Chojnacki et al. to an arbitrary number of intrinsic constraints. Computing the fundamental matrix as an illustration, we demonstrate that CFNS does not necessarily converge to an correct solution, while EFNS converges to an optimal value which nearly satisfies the theoretical accuracy bound (KCR lower bound).

1. まえがき

画像中のシーンに何らかの構造を仮定し、それを未知パラメータを含む方程式で表し、画像から抽出したデータをそれに当てはめることによって未知パラメータを定めることはコンピュータビジョンの基本である。そのような構造はモデル、そのような方程式は拘束と呼ばれる。

この問題に対して、拘束がパラメータに関して線形の場合がよく研究され、最尤推定を計算する反復解法として、FNS 法 (Fundamental Numerical Scheme) [2], HEIV 法 (Heteroscedastic Errors-in-Variable) [11], くりこみ法 [6, 8, 9], 射影ガウス・ニュートン法 [14] がよく知られている。

しかし、これらは変数間に制約がない場合を対象としている。実際の問題では、しばしば変数間に制約がある。例えば基礎行列 F を未知数とする「エピ極線方程式」は F に関して線形であるが、 $\det F = 0$ という制約を満たさなければならない。以下、このような変数間の制約を内部拘束と呼ぶ。

変数が内部拘束を満たすようにする方法として、次の二通りが代表的である。

事後補正 まず内部拘束を考慮せずに解を求める (データに誤差がなければ自動的に内部拘束が満たされる)。次にその解を内部拘束が満たされるように適切に補正する。

直接探索 変数が内部拘束を満たすように再パラメータ化し、それを用いて非線形探索を行う。

最尤推定は尤度の負の対数を目的関数とする最小化に帰着するが、内部拘束を考慮しなければ目的関数は比較的単純で、FNS 法等によって少数の反復で正しい解が得られる [14, 16]。

それに対して内部拘束を取り込んだ再パラメータ化を行うと複雑な非線形関数となり、多くの局所解が現れ [12], その非線形探索には細心の注意が必要である。

しかし、誤差の統計的な性質を考慮した最適な補正を行う事後補正によっても、局所解に陥らないように工夫した直接探索によっても通常は同等の解が得られる [15]。

これに対して Chojnacki ら [3] は反復によって自動的に内部拘束を満たす解を求める方法を提案し、CFNS 法 (Constrained FNS) と呼んだ。ただし、得られた解が厳密に内部拘束を満たすように微小な事後補正が必要である [3]。

本論文では Chojnacki らの CFNS 法に代わる新し

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173
kanatani@suri.it.okayama-u.ac.jp
†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

い方法を提案し、「拡張 FNS 法」と呼ぶ。これは次の特徴がある。

- CFNS 法は内部拘束が一つの場合しか適用できないが、拡張 FNS 法では内部拘束の個数は任意である。
- CFNS 法の反復式と FNS 法の反復式は形が異なり、特に関係がない。それに対して拡張 FNS 法は内部拘束の個数が 0 の場合がそのまま FNS 法となっている。この意味で拡張 FNS 法は FNS 法の真の拡張である。
- 拡張 FNS 法の解は内部拘束を自動的に満たすので、CFNS 法のような事後補正は不要である。

そして、基礎行列の計算を例にとり、シミュレーションによって CFNS 法は必ずしも正しい解に収束しないが、拡張 FNS 法は精度の理論限界（KCR 下界）を満たす最適解に収束することを示す。

2. 数学的基礎

まず内部拘束、共分散行列、KCR 下界、最尤推定についてまとめる。

2.1 内部拘束

データ $\{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ は n 次元ベクトルであり、それらの真の値 $\{\bar{\xi}_\alpha\}$ は次式を満たすとする。

$$(u, \bar{\xi}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (1)$$

ただし、 u は未知の n 次元ベクトルである。以下、ベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。問題は誤差のあるデータ $\{\xi_\alpha\}$ から u を推定することである。

式 (1) の形では未知ベクトル u のスケールが不定となるので、 $\|u\| = 1$ と正規化する。これも一つの内部拘束である。そして、これ以外に u に次の r 個の内部拘束が存在するとする。

$$\phi_k(u) = 0, \quad k = 1, \dots, r \quad (2)$$

これら r 個の式は代数的に独立であり、正規化条件 $\|u\| = 1$ と合わせて互いに横断的¹[13] であるとする。

式 (2) はスケール不定の u に対して成立するとし、Chojnacki ら [3] と同様に、各 $\phi_k(u)$ は κ_k 次同次式であると仮定する。したがって、任意の 0 でない実数 t に対して次の恒等式が成り立つ。

$$\phi_k(tu) = t^{\kappa_k} \phi_k(u), \quad k = 1, \dots, r \quad (3)$$

¹各内部拘束 $\phi_k(u) = 0$ の定める超曲面がそれらの交わりにおいて接空間を共有しないこと [13]。

2.2 共分散行列

誤差のあるデータ $\{\xi_\alpha\}$ から計算した u の推定量 $\hat{u}$ の共分散行列 $V[\hat{u}]$ を次のように定義する。

$$V[\hat{u}] = E[(P_U \hat{u})(P_U \hat{u})^\top] \quad (4)$$

ただし $E[\cdot]$ は誤差分布に関する期待値であり、 P_U は変数 u の定義域 $\mathcal{U}$ への直交射影である。定義域 $\mathcal{U}$ は n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ の $\|u\| = 1$, $\phi_k(u) = 0$, $k = 1, \dots, r$ の定める代数多様体であり、横断性の仮定よりその次元は $n - r - 1$ である。式 (4) は $\hat{u}$ の誤差を真値 u における $\mathcal{U}$ の接空間 $T_u(\mathcal{U})$ に射影し、接空間上で誤差を評価するという意味である。

各内部拘束 $\phi_k(u) = 0$ は $\mathcal{R}^n$ に超曲面を定義し、各々の単位法線ベクトルは $\nabla_u \phi_k(u)$ である。横断性の仮定より、 $u, \nabla_u \phi_1(u), \dots, \nabla_u \phi_r(u)$ は線形独立である。これらの張る $r + 1$ 次元部分空間を

$$\mathcal{N} = \{u, \nabla_u \phi_1(u), \dots, \nabla_u \phi_r(u)\}_{\mathcal{L}} \quad (5)$$

で表すと²、これは定義域 $\mathcal{U}$ の接空間 $T_u(\mathcal{U})$ の直交補空間である。

$$\mathcal{N} = T_u(\mathcal{U})^\perp \quad (6)$$

これを u の補空間と呼ぶ。

2.3 KCR 下界

データ $\{\xi_\alpha\}$ は真の値 $\{\bar{\xi}_\alpha\}$ に期待値 0、共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ の正規分布に従う誤差が独立に加わったものとする、次の不等式が u の任意の不偏推定量 $\hat{u}$ に対して成り立つ [7, 8, 10]。

$$V[\hat{u}] \succ \left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{(P_U \bar{\xi}_\alpha)(P_U \bar{\xi}_\alpha)^\top}{(u, V[\xi_\alpha] u)} \right)^{-}_{n-r-1} \quad (7)$$

ただし、 $\succ$ は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し、 $(\cdot)^{-}_r$ はランク r の一般逆行列³を表す。Chernov ら [1] は式 (7) の右辺を **KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界** と呼んだ。そして、 $\hat{u}$ が不偏推定量でなくても、誤差 0 の極限で $\hat{u} \rightarrow u$ であれば誤差の高次の項を除いて上式 (7) が成立することを示した。

2.4 最尤推定

データ $\{\xi_\alpha\}$ が真の値 $\{\bar{\xi}_\alpha\}$ に期待値 0、共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ の正規分布の誤差が独立に加わったものであるとき、**最尤推定**はマハラノビス距離の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V[\xi_\alpha]^{-}_{n-s} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (8)$$

²いずれかの内部拘束が破られるような方向の全体である。

³スペクトル分解して大きい r 個の固有値を逆数に置き換え、残りの固有値を 0 に置き換えた行列。

を式 (1) のもとで最小にするものである⁴。ただし、データ $\{\xi_\alpha\}$ にも s 個の独立な (例えば単位ベクトルであるなどの) 内部拘束が存在すると仮定する。しかし、その情報は共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ に反映され、以下の議論ではこれを明示する必要はない。

ラグランジュ乗数を導入して条件 (1) を除去すれば、式 (8) は次式となる [8, 10]。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha)^2}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (9)$$

最尤推定量 $\hat{\mathbf{u}}$ はこれを内部拘束 $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\phi_k(\mathbf{u}) = 0$, $k = 1, \dots, r$ のもとで最小化するものである。その共分散行列 $V[\hat{\mathbf{u}}]$ は誤差の高次の項を除いて KCR の下界 (式 (7) の右辺) に一致する [8, 10]。

3. CFNS 法

Chojnacki ら [3] の CFNS 法 (Constrained FNS) は内部拘束を満たし、式 (9) が停留値をとる必要十分条件が

$$Q\mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

と書ける対称行列 Q を定め、次の反復を行うものである。

1. $\mathbf{u}$ の初期値を与える。
2. 行列 Q を計算する。
3. 固有値問題

$$Q\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (11)$$

の 0 に最も近い固有値 λ に対する単位固有ベクトル $\mathbf{v}$ を計算する。

4. 符号を除いて $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$ なら $\mathbf{v}$ を返して終了する。そうでなければ $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v}$ としてステップ 2 に戻る。

最後に、得られた解を内部拘束が厳密に満たされるように補正する。

しかし、解 $\mathbf{u}$ が式 (10) を満たす対称行列 Q は無数に存在する。それらすべてに対して上記の反復が収束するとは限らない。Chojnacki ら [3] は $r = 1$ の場合にやや発見的にある行列 Q を導いた。その導出過程は論文からは明らかではない。

本論文では CFNS 法は必ずしも正しい解に収束しないことを示す (5.2 節)。

4. 拡張 FNS 法

以下、Chojnacki ら [3] の CFNS 法に代わる新しい方法を提案する。

⁴9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の N 点 $\{\xi_\alpha\}$ に超平面 $(\mathbf{u}, \xi) = 0$ を各点の共分散行列に反比例する重み付き距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる。

4.1 停留条件

変分原理でよく知られているように、関数 J が $\mathcal{R}^n$ 中の多様体 $\mathcal{U}$ 中で停留値をとる必要十分条件は勾配 $\nabla_{\mathbf{u}} J$ がその点で $\mathcal{U}$ に直交することである。式 (5) の補空間 $\mathcal{N}$ を用いれば、これは $\nabla_{\mathbf{u}} J \in \mathcal{N}$ と書ける。

しかし、式 (9) は $\mathbf{u}$ の 0 次同次式であるから、 $\mathbf{u}$ を定数倍しても値が変化しない。したがって $\nabla_{\mathbf{u}} J$ は常に $\mathbf{u}$ に直交している。ゆえに部分空間 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} = \{\nabla_{\mathbf{u}} \phi_1(\mathbf{u}), \dots, \nabla_{\mathbf{u}} \phi_r(\mathbf{u})\}_{\mathcal{L}} \quad (12)$$

と定義すれば、 $\nabla_{\mathbf{u}} J \in \mathcal{N}$ は $\nabla_{\mathbf{u}} J \in \mathcal{M}$ と書ける。 $\mathcal{M}$ の直交補空間 $\mathcal{M}^\perp$ 上への射影子を $P_{\mathcal{V}}$ と書けば、停留条件は次のように書ける。

$$P_{\mathcal{V}} \nabla_{\mathbf{u}} J = 0 \quad (13)$$

ベクトル $\nabla_{\mathbf{u}} \phi_1(\mathbf{u}), \dots, \nabla_{\mathbf{u}} \phi_r(\mathbf{u})$ にシュミットの直交化を施した正規直交系を $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ とすると、射影子 $P_{\mathcal{V}}$ は次の行列表現を持つ (I は単位行列)。

$$P_{\mathcal{V}} = I - \sum_{k=1}^r \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top \quad (14)$$

4.2 内部拘束

さらに解 $\mathbf{u}$ は内部拘束 $\phi_k(\mathbf{u}) = 0$ を満たさなければならない。式 (3) は t の恒等式であるから、両辺を t で微分した次式も t の恒等式である。

$$(\nabla_{\mathbf{u}} \phi_k(t\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \kappa_k t^{\kappa_k-1} \phi_k(\mathbf{u}) \quad (15)$$

$t = 1$ と置くと次式が成り立つ。

$$(\nabla_{\mathbf{u}} \phi_k(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \kappa_k \phi_k(\mathbf{u}) \quad (16)$$

したがって、内部拘束 $\phi_k(\mathbf{u}) = 0$, $k = 1, \dots, r$ は $(\nabla_{\mathbf{u}} \phi_k(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0$, $k = 1, \dots, r$ と書ける。これは式 (12) の $\mathcal{M}$ の定義より $\mathbf{u} \in \mathcal{M}^\perp$ を意味する。射影子 $P_{\mathcal{V}}$ を用いれば、次のようにも書ける。

$$P_{\mathcal{V}} \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (17)$$

以上より、 $\mathbf{u}$ が内部拘束を満たし、かつ J が停留する必要十分条件は式 (13), (17) である。

4.3 解法の原理

式 (9) を $\mathbf{u}$ で微分すると次のようになる。

$$\nabla_{\mathbf{u}} J = M\mathbf{u} - L\mathbf{u} \quad (18)$$

ただし、行列 M, L を次のように定義した。

$$M = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})}, \quad L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha)^2 V[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (19)$$

したがって、式 (13) より、解は次式を満たす。

$$P_V(M-L)u = 0 \quad (20)$$

式 (17) を満たす解に対して、左辺は $P_V(M-L)P_V u$ と書ける。したがって、対称行列 X を

$$X = P_V(M-L)P_V \quad (21)$$

と置けば、問題は

$$Xu = 0, \quad P_V u = u \quad (22)$$

を満たす u を求めることに帰着する。

式 (22) の第 1 式は解 u が X の零空間に属することを意味する。一方、 P_V は $M^\perp$ 上への射影子であるから、式 (21) の X の定義より $XM = 0$ である。すなわち、 u と M の両方が X の零空間に含まれる。しかも式 (22) の第 2 式より u は M に直交する。ゆえに式 (5) の補空間 $\mathcal{N}$ が X の零空間であり、 u と M の直和である。

$$\mathcal{N} = \{u\}_\mathcal{L} \oplus M \quad (23)$$

したがって、式 (4) 中の射影子 P_U は次の行列表現をもつ。

$$P_U = P_V - uu^\top \quad (24)$$

4.4 反復解法

前節より、解 u を求めることは補空間 $\mathcal{N}$ を求めることに帰着する。なぜなら、補空間 $\mathcal{N}$ が求まれば、その中の $\nabla_u \phi_1(u), \dots, \nabla_u \phi_r(u)$ に直交する元 u が解となるからである。その解は次の手順で計算できる。

1. u の初期値を与える。
2. 式 (19) の行列 M, N を計算する。
3. ベクトル $\nabla_u \phi_1(u), \dots, \nabla_u \phi_r(u)$ を計算し、これにシュミットの直交化を施した正規直交系 $\{u_1, \dots, u_r\}$ を求める。
4. 式 (14) の射影行列 P_V を計算する。
5. 式 (21) の行列 X を計算する。
6. 固有値問題

$$Xv = \lambda v \quad (25)$$

の絶対値の小さい $r+1$ 個の固有値に対応する単位固有ベクトル $v_0, \dots, v_r$ を求める。

7. 現在の解 u を次のように $\hat{\mathcal{N}} = \{v_0, \dots, v_r\}_\mathcal{L}$ に射影した $\hat{u}$ を計算する。

$$\hat{u} = \sum_{k=0}^r (u, v_k) v_k \quad (26)$$

8. 次の u' を計算する。

$$u' = N[P_V \hat{u}] \quad (27)$$

9. $u' \approx u$ なら u' を返して終了する。そうでなければ $u \leftarrow N[u + u']$ としてステップ 2 に戻る。

4.5 解の証明

前節の反復が収束すれば $\hat{\mathcal{N}}$ は X の零空間 $\mathcal{N}$ に一致していることが次のように示される。

【証明】 式 (21) の X と式 (14) の P_V の定義より、 $u_1, \dots, u_r$ は X の固有値 0 の固有ベクトルである。ゆえにステップ 5 で計算される $r+1$ 個の $v_0, \dots, v_r$ の内の r 個は常に固有値 0 の固有ベクトルである。 $\hat{\mathcal{N}}$ が X の零空間でないなら、一つの固有ベクトル v_* は 0 でない固有値 λ ($\neq 0$) を持ち、残りの固有ベクトルに直交する。それらの張る部分空間が $M = \{u_1, \dots, u_r\}_\mathcal{L}$ であるから⁵、 v_* は M に直交する。

構成により、式 (26) の $\hat{u}$ は $\hat{\mathcal{N}} = \{v_*\}_\mathcal{L} \oplus M$ の元であり、式 (27) の u' はそれを $\hat{\mathcal{N}}$ 内で M に直交する方向へ射影したものであるから、 u' は $\pm v_*$ に一致する。反復が終了した時点では $u = u' = \pm v_*$ であり、 v_* は固有値 λ の固有ベクトルであるから、 u も式 (25) を満たす。したがって、両辺と u との内積をとると

$$(u, Xu) = \lambda \quad (28)$$

となる。しかし、 u ($= \pm v_*$) は X のすべての固有値 0 の固有ベクトルと直交するので、それらの張る部分空間が M に直交する。したがって

$$P_V u = u \quad (29)$$

である。このため次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} (u, Xu) &= (u, P_V(M-L)P_V u) \\ &= (u, (M-L)u) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

等式 $(u, Mu) = (u, Lu)$ が恒等的に成り立つことは式 (19) の M, N から直接に確かめることができる。

式 (28), (30) より $\lambda = 0$ となるが、これは仮定 $\lambda \neq 0$ に反する。したがって、反復が収束した時点では $\hat{\mathcal{N}}$ のすべての元が X の固有値 0 の固有ベクトルであり、 X の零空間になっている。□

これから、 $Xu = 0$ であり、式 (29) も成立するから u が式 (22) の問題の解であることがわかる。もちろん、これには反復が収束するという前提がある。実験によると、 $u' \neq u$ のとき、得られた u' を次のス

⁵重複固有値の固有ベクトルは不定であるから、計算した X の固有値 0 の固有ベクトルが $u_1, \dots, u_r$ のいずれかに一致するとは限らない。一意的に定まるのはそれらの張る空間 M である。

テップの $\mathbf{u}$ として反復すると、新しい $\mathbf{u}'$ が以前の $\mathbf{u}$ に逆戻りするという循環が見られたので、上記の手順では $\mathbf{u}$ を“中点” $(\mathbf{u}' + \mathbf{u})/2$ を単位ベクトルに正規化した $N[\mathbf{u}' + \mathbf{u}]$ に置き換えている。これにより、これまで実験した限りではすべて反復が収束がした。

4.6 FNS 法への帰着

内部拘束の数を $r = 0$ とすると、 $\mathcal{M} = \emptyset$, $\mathbf{P}_V = \mathbf{I}$ であり、 $\mathbf{u}'$ は $\mathbf{X}$ の絶対値最小の固有値に対する単位固有ベクトルとなる。この反復は Chojnacki ら [2] の FNS 法に他ならない。この意味で、本論文の拡張 FNS 法は FNS 法の真の拡張になっている。ただし、FNS 法では $\mathbf{u}$ を $N[\mathbf{u}' + \mathbf{u}]$ に置き換えずに、直接 $\mathbf{u}'$ に置き換えても問題なく収束する（もちろん中点に置き換えてもよい）。

一方、CFNS 法 ($r = 1$ の場合のみ適用可) の行列 $\mathbf{Q}$ は FNS 法の行列 $\mathbf{X}$ とは無関係である。この違いは、CFNS 法が固有ベクトル (1 次元部分空間) の反復を行うのに拡張 FNS 法は $r + 1$ 次元部分空間を反復するところ由来する。

5. 基礎行列の計算

具体例として 2 画像の対応点から基礎行列を計算する問題に対して CFNS 法と拡張 FNS 法を比較する。

5.1 エピ極線方程式

同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において、第 1 画像の点 (x, y) と第 2 画像の点 (x', y') がシーンの同一点であれば、次のエピ極線方程式が成り立つ [5]。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

ただし、 f_0 は任意の定数である⁶。行列 $\mathbf{F} = (F_{ij})$ は基礎行列と呼ばれ、2 台のカメラの相対的位置とそれらの内部パラメータのみによって定まるランク 2 の行列である（シーンにはよらない）。

新しいベクトル $\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top \\ \boldsymbol{\xi} &= (xx', xy', xf_0, yx', yy', yf_0, f_0x', f_0y', f_0^2)^\top \end{aligned} \quad (32)$$

と置くと、式 (31) は $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ と書ける。 α 番目の対応点 $\{(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)\}$ とその真の位置 $\{(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)\}$ をそれぞれ 9 次元ベクトル $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ で表せば式 (1) を得る。

⁶数値計算の安定性のためのスケールの調節である [4]。本論文の実験では $f_0 = 600$ とした。

観測した対応点の各 x, y 座標はそれらの真の値に期待値 0、標準偏差 σ の誤差が独立に加わったものとする、 $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列は $O(\sigma)^4$ を除いて $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ と書ける。ただし、次のように置いた。

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 + \bar{x}'_\alpha{}^2 & \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & f_0 \bar{x}'_\alpha & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 \\ \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}'_\alpha{}^2 & f_0 \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 \\ f_0 \bar{x}'_\alpha & f_0 \bar{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & \bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha{}^2 & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \bar{x}'_\alpha & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

式 (9) の最小化解は $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の正数による定数倍によって影響されないで、以降の計算では $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の代わりに $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ を用いてよい。式 (33) 中の真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$ は観測値 $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$ に置き換えて計算する⁷。

内部拘束 $\det \mathbf{F} = 0$ は 3 次同次式 $\phi(\mathbf{u})$ を

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}) &= u_1 u_5 u_9 + u_2 u_6 u_7 + u_3 u_8 u_4 \\ &\quad - u_3 u_5 u_7 - u_2 u_4 u_9 - u_1 u_8 u_6 \end{aligned} \quad (34)$$

と定義すれば、 $\phi(\mathbf{u}) = 0$ と書ける。その勾配は次のようになる。

$$\nabla_{\mathbf{u}} \phi = \begin{pmatrix} u_5 u_9 - u_8 u_6 \\ u_6 u_7 - u_9 u_4 \\ u_4 u_8 - u_7 u_5 \\ u_8 u_3 - u_2 u_9 \\ u_9 u_1 - u_3 u_7 \\ u_7 u_2 - u_1 u_8 \\ u_2 u_6 - u_5 u_3 \\ u_3 u_4 - u_6 u_1 \\ u_1 u_5 - u_4 u_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

式 (14) の射影行列 $\mathbf{P}_V$ は次のようになる。

$$\mathbf{P}_V = \mathbf{I} - N[\nabla_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u})] N[\nabla_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u})]^\top \quad (36)$$

式 (24) より、射影行列 $\mathbf{P}_U$ は次のようになる。

$$\mathbf{P}_U = \mathbf{I} - N[\nabla_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u})] N[\nabla_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u})]^\top - \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \quad (37)$$

⁷そうしても後のシミュレーション実験結果が左右されないことが確認される。

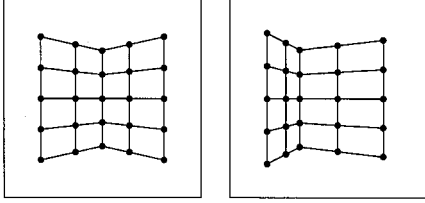


図 1: 2 枚の平面格子シミュレーション画像.

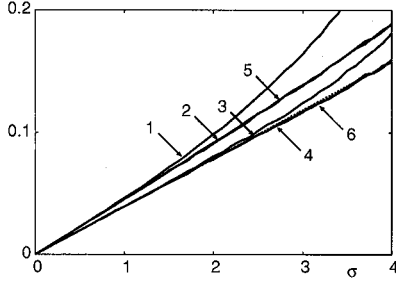


図 2: 図 1 に対する解の平方平均二乗誤差. 横軸は加えた誤差の標準偏差 σ . 1) 最小二乗法の SVD 補正. 2) 最尤推定の SVD 補正. 3) 最尤推定の最適補正. 4) 直接探索. 5) CFNS 法. 6) 拡張 FNS 法. 点線は KCR 下界.

5.2 精度の比較

図 1 はシーン中で角度 60° をなす 2 枚の平面格子を異なる 2 方向から見たシミュレーション画像である. 画像サイズは 600×600 画素, 焦点距離は 1200 画素を想定する. 画像中の格子点を特徴点として, 各点の x, y 座標に平均 0, 標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数誤差を独立に加え, これから次の方法でランク 2 の基礎行列を計算した.

1. 最小二乗法⁸の SVD 補正⁹
2. 最尤推定¹⁰の SVD 補正
3. 最尤推定の最適補正¹¹
4. 直接探索¹²
5. CFNS 法
6. 拡張 FNS 法

点線は KCR 下界から導かれる D の下界 (式 (9) の右辺のトレース) である [15].

図 2 は σ を横軸にとり, 各 σ に対して 10000 回の独立に試行し, 式 (6) に対応する次の平方平均二乗

⁸ $\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}_\alpha, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2$ を最小化する. 解は式 (19) の行列 $\mathbf{M}$ の分母の $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ を $\mathbf{I}$ としたものの最小固有値に対する単位固有ベクトルである [14].

⁹ 特異値分解の最小特異値を 0 に置き換える.

¹⁰ 内部拘束を考慮しない最尤推定を「最尤推定」と略記する. 計算には最小二乗解を初期値とする Chojnacki ら [2] の FNS 法を用いた.

¹¹ 解を式 (9) の増加が最小になるように補正して内部拘束を満たすようにする [15].

¹² 式 (9) を内部拘束が満たされるように 7 パラメータ化し, 非線形探索を行う [15].

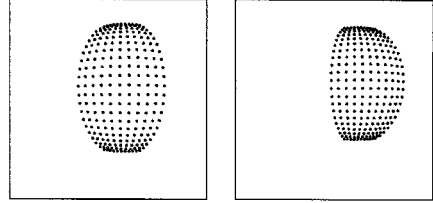


図 3: 2 枚の球面格子シミュレーション画像.

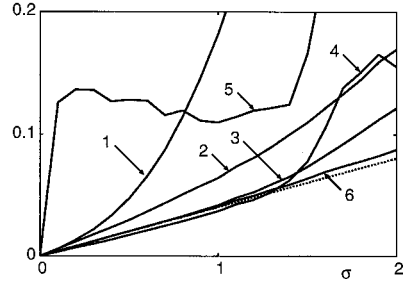


図 4: 図 3 に対する解の平方平均二乗誤差. 横軸は加えた誤差の標準偏差 σ . 1) 最小二乗法の SVD 補正. 2) 最尤推定の SVD 補正. 3) 最尤推定の最適補正. 4) 直接探索. 5) CFNS 法. 6) 拡張 FNS 法. 点線は KCR 下界.

誤差 D をプロットしたものである.

$$D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|\mathbf{P}_U \hat{\mathbf{u}}^{(a)}\|^2} \quad (38)$$

ただし $\hat{\mathbf{u}}^{(a)}$ は a 回目の試行の解 $\hat{\mathbf{F}}^{(a)}$ のベクトル表現であり, $\mathbf{P}_U$ は式 (37) の射影行列である.

図 2 から, 直接探索と拡張 FNS 法の精度はほとんど KCR の下界に一致し, 最適補正もそれに近い精度を示している. しかし, CFNS 法は最尤推定の SVD 補正と大差ない精度しかない.

図 3 は球面上の格子パターンを 2 方向からみたシミュレーション画像である (サイズ 600×600 , 焦点距離 1200). この場合の図 2 に対応する結果が図 4 である. この例では CFNS 法の精度が非常に悪い. それに対して EFNS 法は最適補正よりもさらによい精度である.

一方, 直接探索は誤差が小さいときは最適補正や EFNS 法を上回っているが, ある程度の誤差以上では精度が悪化している. これは探索が局所解に収束しやすくなったためと思われる. 一般に, ランク拘束を課してパラメータ空間の次元を下げると関数形が複雑になり, 局所解が多く現れる [12]. それに対して EFNS 法は最適補正と同様に, 次元の高い空間で内部拘束の超曲面に「外側」から近づくので, 局所解が少なく, これが誤差が大きくても安定に収束する理由と思われる.

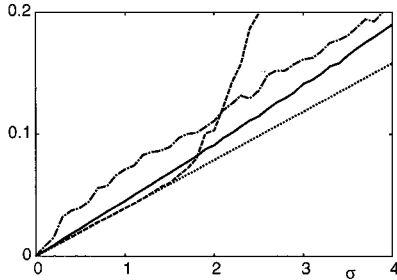


図 5: CFNS 法の初期値依存性. 初期値は最小二乗解 (実線), 最小二乗解の SVD 補正 (破線), 真値 (鎖線). 点線は KCR 下界.

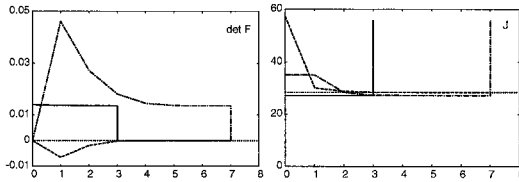


図 6: CFNS 法の反復過程の行列式 $\det F$ と残差 J の変化 ($\sigma = 1$). 初期値は最小二乗解 (実線), 最小二乗解の SVD 補正 (破線), 真値 (鎖線). 最後のステップは SVD 補正. 点線は収束すべき値.

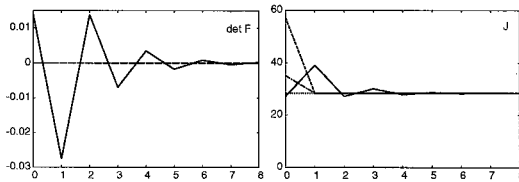


図 7: 拡張 FNS 法による図 6 に対応する結果.

5.3 CFNS 法の初期値依存性

Chojnacki ら [3] は実験例を示し, CFNS 法が最尤推定の最適補正より優れていると結論している. 図 2, 4 はこれに反する結果である. 詳細に検討すると, CFNS 法の収束値は初期値に依存すること判明した.

図 2, 4 の CFNS 法の計算では Chojnacki ら [3] が述べているように最小二乗法の解を初期値としたが, 図 5 は図 2 のデータに対して異なる初期値から反復した CFNS 法の誤差を図 3, 5 と同様にプロットしたものである. 初期値には最小二乗解, 最小二乗解の SVD 補正, 真値を用いた.

図 5 から分かるように, 初期値を SVD 補正する, ある範囲の誤差に対しては KCR 下界にほぼ一致する精度が得られている. しかし, それ以上の誤差では精度が急速に悪化している.

一方, 真値から始めるとわずかな誤差でも精度が悪化している. これは, 誤差が増えるにつれて, 求

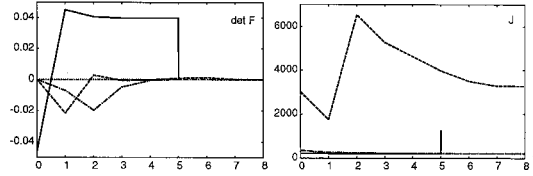


図 8: CFNS 法の反復過程の行列式 $\det F$ と残差 J の変化 ($\sigma = 3$). 初期値は, 最小二乗解 (実線), 最小二乗解の SVD 補正 (破線), 真値 (鎖線). 最後のステップは SVD 補正. 点線は収束すべき値.

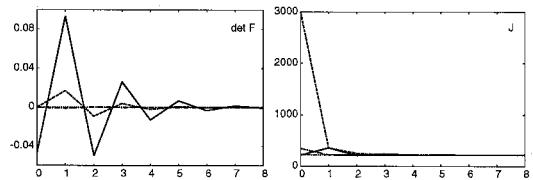


図 9: 拡張 FNS 法による図 8 に対応する結果.

めたい解が真値から離れるためである¹³.

これに対して他の方法 (最尤推定の SVD 補正, 最適補正, 直接探索, 拡張 FNS 法) はそのような初期値の差異に依存しないことが確認された.

図 6 は $\sigma = 1$ の場合の代表的な例に対して, CFNS 法による行列式 $\det F$ と残差 J の収束の様子を各種の初期値に対してプロットしたものである. いずれも $\det F$ は最後のステップで SVD 補正されて 0 になる. 点線は収束すべき値を示す (最終残差は直接探索 [15] によって定めた).

これから次のことがわかる. 最小二乗解は $\det F \neq 0$ であるが, 残差 J が十分小さいので, $\det F$ を 0 に近づけるためには J を増やす必要があるが, CFNS 法の反復では J が増えにくいので, $\det F \neq 0$ のまま進行している. そして, 最後の SVD 補正で $\det F = 0$ が強制され, 残差 J が大幅に増加している. それに対して SVD 補正した最小二乗解から始めると J が減少するとともに $\det F$ がやや 0 から離れるが, やがて J も $\det F$ も正しい値に収束している. 一方, 真値から始めると, 真値の残差 J が非常に大きいので CFNS 法はそれを減少させようとし, その反動で $\det F$ が非常に大きくなり, 0 に戻らないまま収束し, 最後に SVD 補正によって 0 に強制されている.

図 7 は対応する拡張 FNS 法の結果である. J も $\det F$ も初期値によらず安定に減衰振動しながら正しい値に収束している.

図 8, 9 は $\sigma = 3$ にした場合の別の例を図 6, 7 と同様にプロットしたものである. この場合も同様の傾

¹³ 実際に調べても, 最小二乗解は誤差が小さいとき, 真値よりも最適解に近いことが確認された.



図 10: 実画像と対応点 (100 個)。

表 1: 図 10 の実画像の対応点から求めた基礎行列の残差と実行時間 (秒)。

手法	残差	実行時間
最小二乗法の SVD 補正	45.550	.00056
最尤推定の SVD 補正	45.567	.00644
最尤推定の最適補正	45.378	.00764
直接探索	45.382	.00300
CFNS 法	45.567	.01304
拡張 FNS 法	45.379	.01936

向を示している。

5.4 実画像実験

図 10 の 2 画像から図中に示した 100 個の対応点を手動で選び、それから各種の手法によって基礎行列を計算した。基礎行列 F の真値が不明なため、精度を残差 J で評価し、表 1 に各手法で得られた解による残差 J とその計算時間 (秒) を示した。CPU には CoreDuo E6700 2.66GHz, 主メモリ 4GB, OS には Linux を用いた。

この例では最尤推定の最適補正, 直接探索, 拡張 FNS 法はほぼ同一の解に収束し, その残差は最小二乗法の SVD 補正および最尤推定の SVD 補正の残差より小さくなっている。しかし, CFNS 法や最尤推定の SVD 補正の精度しかない。

最小二乗法の SVD 補正を除けば, 実行時間では直接探索が最も効率的である。これは, 最適補正も CFNS 法も拡張 FNS 法も毎回の反復で 9×9 行列の固有値問題を解くのにに対して, 直接探索では毎回 7 次元連立 1 次方程式を解くだけでよいからである [15]。

ただし, 直接探索は基礎行列の計算に特化した方法である。それに対して, 拡張 FNS 法は一般の線形化可能な最尤推定の制約付き最適化に適用できるという利点がある。

6. まとめ

変数間に制約がある最尤推定解を求める拡張 FNS 法を提案した¹⁴。これは Chojnacki ら [3] の CFNS 法に変わる方法であり, 内部拘束の個数は任意である。

¹⁴以下にプログラムを公開している。

<http://www.iim.ics.tut.ac.jp/~sugaya/public.html>

そして, 内部拘束がない場合がそのまま Chojnacki ら [2] の FNS 法になるという意味で FNS 法の真の拡張である。

具体例としてランク拘束した基礎行列の計算に適用し, CFNS 法の解は反復の初期値の選び方に依存し, 必ずしも最適解には収束しないことを指摘した。それに対して拡張 FNS 法は安定に最適解に収束する。そして, シミュレーションによって精度を理論限界 (KCR 下界) と比較し, 他の最適計算手法と同等あるいはより精度の高い解が得られ, 誤差に対するロバスト性にも優れていることを示した。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) の助成による。オーストラリアの Adelaide 大学の Wojciech Chojnacki 博士にからは CFNS 法のプログラムを提供して頂き, 有益な議論をして頂いたことに感謝します。

参考文献

- [1] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47-4** (2004-11), 713–728.
- [2] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000-11), 1294–1303.
- [3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, A new constrained parameter estimator for computer vision applications, *Image Vis. Comput.*, **22-2** (2004-2), 85–91.
- [4] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19-6** (1997-6), 580–593.
- [5] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [6] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994-2), 201–209.
- [7] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-8** (1995-8), 1865–1873.
- [8] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- [9] 金谷 健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.
- [10] 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- [11] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37-2** (2000-6), 127–150.
- [12] 右田剛史, 尺長健, 未校正画像対中の点対応に基づくエビボールの 1 次元探索法, 情報処理学会研究報告, CVIM-153-64 (2006-3), 413–420.
- [13] T. Poston and L. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman, London, U.K., 1978; Reprinted Dover, New York, N.Y., U.S.A., 1996; 野口広, 伊藤隆一, 戸川美郎訳「カタストロフ理論とその応用 / 理論編」, 「同/応用編」サイエンス社, 1980, 1982.
- [14] 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32 (2006-3), 207–214.
- [15] 菅谷保之, 金谷健一, 効率的探索によるランク拘束した基礎行列の高精度計算, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158 (2007-3).
- [16] 山田純平, 金谷健一, 菅谷保之, 楯田当てはめ高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36, (2006-5), 339–346.