

3 画像からの最適三角測量

菅谷 保之* 新妻 弘崇† 金谷 健一†

* 豊橋技術科学大学情報工学系 † 岡山大学大学院自然科学研究科

3 画像の対応点から 3 次元位置を最適に計算する三角測量の新しい計算法を示す。これは前報の 2 画像の場合に示した最適補正の考え方を 3 画像に拡張したものであり、2 画像間の基礎行列によるエピ極線拘束条件が三重焦点テンソルによる三重線形拘束条件となる。このとき、補正量を定める連立 1 次方程式が悪条件になることを指摘する。そして、これに対処するために代数的、幾何学的考察により、ランク 3 の一般逆行列を用いて厳密な解を得る手法を提案する。この方法は現在知られている複雑な計算法に比べて非常に単純であり、実際の応用に適している。

Optimal Triangulation from Three Views

Yasuyuki Sugaya*, Hirotaka Niitsuma†, and Kenichi Kanatani†

*Department of Information and Computer Sciences,

Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

†Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

This paper presents a new method for optimally computing the 3-D position of corresponding points in three views. Our method is an extension of the optimal correction approach of our two-view method to three views. The epipolar constraint in terms of the fundamental matrix between two views corresponds to the trilinear constraint in terms of the trifocal tensor among three views. It is pointed out that the simultaneous linear equations for determining the correction is ill-conditioned. Based on algebraic and geometric considerations, we present a technique for computing an exact solution using a generalized inverse of rank 3. The proposed method is far simpler than any existing methods and is suitable for practical applications.

1. まえがき

ステレオ視では対応点が決まると、視点（カメラのレンズ中心）と画像面上のその点を通る視線の交点としてその点の 3 次元位置が決まる。これが「三角測量」(triangulation) と呼ばれるものである。

しかし、実際には計算した 2 本の視線はデータに含まれる誤差のために 1 点では交わらない。そこで古くから、その 2 本を最短距離に結ぶ線分の“中点”をとることが行われていた (図 1(a))。それに対して金谷ら [11, 12] は 1990 年代前半にそれが最善ではないことを指摘し、画像面上の対応点をそれぞれ視線が交わる位置に移動させ、その移動量が最小になるように定める「最適補正」(optimal correction) の原理を提唱した (図 1(b))。

ところが後に Hartley ら [6] がこれと同じ考え方を述べ、その計算を 6 次方程式の解計算に帰着させた。そして、これが大域的最適化 [3] のプロトタイプとして広まり、これを一般の枚数の画像へと拡張する研

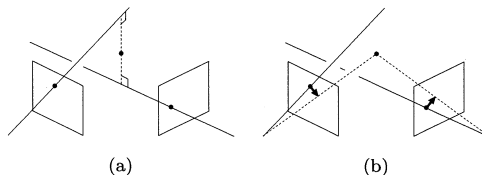


図 1: 2 画像からの三角測量. (a) 中点法. (b) 最適補正.

究が世界中で追及されている。しかし、現在でも 3 画像ですら非常に困難であるとされている。

それらの基本方針は、復元すべき 3 次元位置 (X, Y, Z) を未知数とし、それを各画像に投影した位置とその観測位置の距離の二乗和（「再投影誤差」(reprojection error)）を最小にする位置を探索することである (図 2)。しかし、3 次元空間全体の無限領域が探索範囲となり、レーベンバーグ・マーカート法などで最小化する方法（「バンドル調整」(bundle adjustment)）では大域的な最小値でない局所解に陥る可能性がある。それを防ぐ大域的な最小化として試みられているのは次のアプローチである。

代数的解法 目的関数を微分して 0 と置いた代数方程式を解く。これはグレブナー基底を用いると多

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173
{kanatani,niitsuma}@suri.cs.okayama-u.ac.jp
†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1, (0532)44-6760
sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

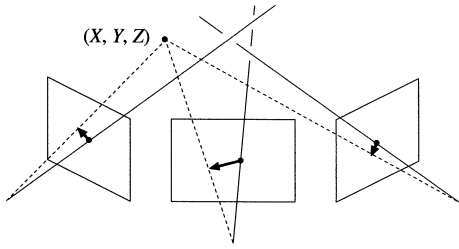


図 2: 3次元位置 (X, Y, Z) を未知数として、その再投影点の観測位置からの二乗和 (再投影誤差) が最小になる位置を探索する。

項式帰着し、3画像の場合は47次式 [16]、4, 5, 6, 7画像ではそれぞれ148次、336次、638次、1081次式となる。グレブナー基底の数値的な計算は非常に不安定なので、これを安定化する手法も検討されている [1]。

分枝限定法 局所的に目的関数の下限を与える関数を導入し、探索範囲を区分して、その下限が既に調べた値を上回るような領域を除外し (branch-and-bound)、そうでない領域を再帰的に細分する [9, 15]。これは下限の解析が非常に複雑で、多くの計算時間を要する。

行列不等式解法 変数変換によって行列不等式¹を拘束条件とする多項式の最小化問題に変換する²[10]。得られる解は近似値であるが、変数変換の次数を上げるにつれて精度が向上し³、極限において真値に収束する。しかし、その手続きは非常に複雑である。

L_∞ 最適化 再投影位置と観測位置の距離の二乗和の最小化 (L_2 最適化) は誤差が正規分布に従うときの最尤推定の意味があって合理的であるが、解法が困難であることから、解きやすいように目的関数を変えてしまう。これを距離の最大値 (L_∞ ノルム) に変えると、目的関数が「疑似凸関数」(quasi-convex function) となり、局所解が存在しない。大域的な最小値を求めるには、しきい値を0から順に (あるいは2分探索法で) 増加させ、目的関数そのしきい値以上の値をとる解があるかどうかを調べる⁴[4, 8, 14]。

これらはどれも非常に複雑な手続きと多くの計算時間を要し、理論研究として非常に興味深い、とて

¹行列不等式 $A \succ B$ とは $A - B$ が半正値対称行列であることを意味する。

²これは凸半正値計画 (SDP) と呼ばれる問題となり、Matlab上で動く解法ソフト GloptiPoly が公開されている。

³それにつれて変数の数と行列のサイズが増える

⁴これは2次元錐計画 (SOCP) と呼ばれる問題となり、Matlab上で動く解法ソフト SeDuMi が公開されている。

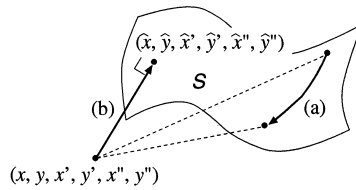


図 3: (a) 従来の方法: 解空間 S の“内部”を探索してデータ (x, y, x', y', x'', y'') に最も近い位置を求める。(b) 本論文の方法: データ (x, y, x', y', x'', y'') を解空間 S に“外部”から直交射影する。

も実用的とはいえない。そこで、最近是最適解を探索するのではなく、簡単な方法 (レーベンバーク・マーカート法など) で求めた解が局所解か大域解かを判定する方法が検討されている [5]。

本論文では、著者らが2画像の場合に前報 [13] で示した最適補正の方法を拡張する。そして、3画像の場合の最適な三角測量が上述の複雑な方法を用いずに簡単に計算できることを示す。

2. 最適補正の原理

従来三角測量の計算が困難と思われていた理由は、“視線が交わる”という条件を満たす3次元位置 (X, Y, Z) を未知数とし、その再投影誤差 $E(X, Y, Z)$ の最小値を探索するという定式化にある。その結果、3次元空間の無限領域を探索する必要があり、レーベンバーク・マーカート法のような勾配に基づく探索では解は出発点に依存し、極小値に陥ることがある。しかし、大域的な最小値を絞り込むには多大の計算を要する。

これに対して著者らが前報 [13] で2画像の場合に示した最適補正の原理は、3次元位置 (X, Y, Z) を未知数にするのではなく、2個の対応点 $(x, y), (x', y')$ の作る4次元直積空間のエピ極線方程式 (epipolar equation) が定義する代数多様体 S にデータ (x, y, x', y') を直交射影することである。その多様体までの二乗距離が再投影誤差に他ならないから、一般的な状況では自動的に $E(X, Y, Z)$ の大域的な最小値が得られる。

これを3画像に拡張するには、2画像間の基礎行列によるエピ極線拘束条件を3画像間の三重焦点テンソルによる三重線形拘束条件に変えればよい。従来の定式化は解空間 S の“内部” (無限領域) を探索して、データ (x, y, x', y', x'', y'') と最も距離が小さい位置を求めるものである (図 3(a))。したがって、レーベンバーク・マーカート法などの勾配に基づく方法では局所解に陥る可能性がある。それに対して本論文の方法は、データ (x, y, x', y', x'', y'') を解空間 S に“外部”から射影するものであり (図 3(b))、

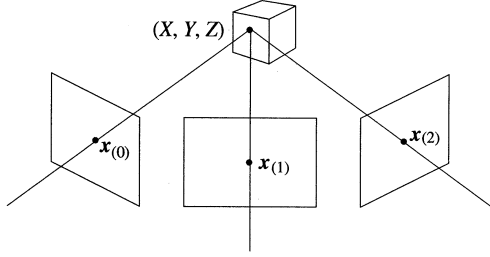


図 4: 3 画像からの三角測量.

探索を行うことなく最適解が得られる.

本論文では、この射影の計算が連立 1 次方程式となり、それが悪条件になることを指摘する。これに対処するために、本論文では代数的、幾何学的考察により、ランク 3 の一般逆行列を用いて厳密な解が得られることを示す。そして、シミュレーションにより、この方法が実際の応用に非常に適していることを実証する。

3. 三重線形拘束条件

3 画像間で点 $(x_{(0)}, y_{(0)})$, $(x_{(1)}, y_{(1)})$, $(x_{(2)}, y_{(2)})$ が対応しているとき (図 4), これらを次の 3 次元ベクトルで表す.

$$\mathbf{x}_{(\kappa)} = \begin{pmatrix} x_{(\kappa)}/f_0 \\ y_{(\kappa)}/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (1)$$

ただし, f_0 は任意のスケール定数である⁵. 以下, ベクトル $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ の表す点を単に “点 $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ ” と呼ぶ.

よく知られているように [7], 3 点 $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{x}_{(1)}$, $\mathbf{x}_{(2)}$ を通る視線が 1 点で交わる必要十分条件は, これらが次の「三重線形拘束条件」(trilinear constraint) を満たすことである.

$$\sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(1)}^j x_{(2)}^k = 0 \quad (2)$$

ここに ϵ_{ijk} は順列符号⁶, $x_{(\kappa)}^i$ はベクトル $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ の第 i 成分である. そして T_i^{lm} は「三重焦点テンソル」(trifocal tensor) と呼ばれ, 3 台のカメラ配置のみから定まる. 以下ではカメラ配置は既知で, 三重焦点テンソル T_i^{lm} も計算されているとする (付録参照). 以下, 式を見やすくするために, 繰り返す座標成分の

⁵これをほぼ画像のサイズにとり, ベクトル $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ の各成分がオーダー 1 にそろえて数値計算を安定化させるためである [2]. 実験では $f_0 = 600$ とした.

⁶ (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換のときは 1, 奇置換のときは -1 , それ以外は 0 をとる. Leve-Civita の (または Eddington の) イプシロンとも呼ばれる.

添え字については和をとるという「アインシュタインの総和規約」(Einstein's summation convention) を用いる.

4. 最適補正

対応点 $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ を画像処理や計算から求めた場合には微小な誤差のために式 (2) が厳密には満たされない. これは幾何学的にはそれらの視線が 1 点で交わらないことを意味する. これに対する「最適補正」とは点 $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ を式 (2) を満たすよう最適に $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ に補正することである. “最適に” というのは, 移動距離の二乗和 (「再投影誤差」 [7])

$$E = \sum_{\kappa=0}^2 \|\mathbf{x}_{(\kappa)} - \bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 \quad (3)$$

が最小になるという意味である. 数学的には, 与えられたデータ $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ に対して, 制約条件

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \bar{x}_{(0)}^i \bar{x}_{(1)}^j \bar{x}_{(2)}^k = 0 \quad (4)$$

のもとで式 (3) を最小にする $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ を求めよという問題となる. 統計的には次のように解釈できる. 対応点の真の位置が $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ であるとき, ノイズの加わった

$$\mathbf{x}_{(\kappa)} = \bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} + \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (5)$$

が検出されたとする. ノイズ $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ を期待値 $\mathbf{0}$, 画像上で独立で同一の等方正規分布に従う確率変数とみなしたとき, 式 (3) の最小化は尤度を最大にする最尤推定である.

5. 第 1 近似

直接に $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ を推定する代わりに

$$\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)} - \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (6)$$

と置いて, 誤差項 $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ を推定してもよい. すると式 (3) の再投影誤差 E は次のように書ける.

$$E = \sum_{\kappa=0}^2 \|\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}\|^2 \quad (7)$$

三重線形拘束条件 (4) は次のようになる.

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} (x_{(0)}^i - \Delta x_{(0)}^i) (x_{(1)}^j - \Delta x_{(1)}^j) (x_{(2)}^k - \Delta x_{(2)}^k) = 0 \quad (8)$$

テイラー展開して誤差 $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ の 2 次の項を無視すると次のようになる.

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \left(\Delta x_{(0)}^i x_{(1)}^j x_{(2)}^k + x_{(0)}^i \Delta x_{(1)}^j x_{(2)}^k + x_{(0)}^i x_{(1)}^j \Delta x_{(2)}^k \right) = \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(1)}^j x_{(2)}^k \quad (9)$$

誤差は画像面内に生じるので $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ の第 3 成分は 0 である。これは次のように書ける。

$$k_i \Delta x_{(\kappa)}^i = 0, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^\top$ と定義する。式 (7) を 2 で割り、式 (9), (10) に関するラグランジュ乗数を導入して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^2 \|\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}\|^2 - \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \left(\Delta x_{(0)}^i x_{(1)}^j x_{(2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(0)}^i \Delta x_{(1)}^j x_{(2)}^k + x_{(0)}^i x_{(1)}^j \Delta x_{(2)}^k \right) - \sum_{\kappa=0}^2 \mu_{(\kappa)} k_i \Delta x_{(\kappa)}^i \end{aligned} \quad (11)$$

を $\Delta x_{(0)}^i, \Delta x_{(1)}^j, \Delta x_{(2)}^k$ で微分して 0 と置くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta x_{(0)}^i &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(1)}^j x_{(2)}^k + \mu_{(0)} k_i \\ \Delta x_{(1)}^j &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(2)}^k + \mu_{(1)} k_j \\ \Delta x_{(2)}^k &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(1)}^j + \mu_{(2)} k_k \end{aligned} \quad (12)$$

両辺に射影行列 (第 3 成分を 0 にする行列)

$$\mathbf{P}_k = \text{diag}(1, 1, 0) \quad (13)$$

を掛けると、 $\mathbf{P}_k \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)} = \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$, $\mathbf{P}_k \mathbf{k}_{(\kappa)} = \mathbf{0}$ であるから、次のようになる (P_k^{ij} は \mathbf{P}_k の (ij) 要素)。

$$\begin{aligned} \Delta x_{(0)}^s &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} P_k^{si} x_{(1)}^j x_{(2)}^k = P_{pq}^s \lambda^{pq} \\ \Delta x_{(1)}^s &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i P_k^{sj} x_{(2)}^k = Q_{pq}^s \lambda^{pq} \\ \Delta x_{(2)}^s &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(1)}^j P_k^{sk} = R_{pq}^s \lambda^{pq} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} P_{pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} P_k^{si} x_{(1)}^j x_{(2)}^k \\ Q_{pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i P_k^{sj} x_{(2)}^k \\ R_{pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(1)}^j P_k^{sk} \end{aligned} \quad (15)$$

式 (14) を式 (9) に代入すると次のようになる。

$$C_{pqrs} \lambda^{rs} = F_{pq} \quad (16)$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} C_{pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \left(P_{rs}^i x_{(1)}^j x_{(2)}^k + x_{(0)}^i Q_{rs}^j x_{(2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(0)}^i x_{(1)}^j R_{rs}^k \right) \\ F_{pq} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x_{(0)}^i x_{(1)}^j x_{(2)}^k \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16) は 9 個の未知数 λ^{pq} ($p, q = 1, 2, 3$) に関する 9 個の連立 1 次方程式 ($r, s = 1, 2, 3$) である。これを解いて λ^{pq} を定め、それを式 (14) に代入すれば $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ が求まる。ゆえに、真の位置 $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ は次のように推定される。

$$\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)} - \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)} \quad (18)$$

6. 高次の補正

式 (9) は第 1 近似なので、 $\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ は厳密に三重線形拘束条件 (4) を満たすとは限らない。そこで式 (18) の解を利用して、式 (4) の条件のもとで式 (3) を最小化する厳密解 $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ を得る手順を新たに示す。このとき、直接に $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ を推定する代わりに

$$\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} - \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (19)$$

と置いて、2 次の補正量 $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ を推定する。これらは式 (18) の $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ よりも高次の微小量である。再投影誤差 E は次のように書ける。

$$E = \sum_{\kappa=0}^2 \|\mathbf{x}_{(\kappa)} - \bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 = \sum_{\kappa=0}^2 \|\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 \quad (20)$$

ただし、次のように置いた。

$$\tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)} - \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (21)$$

式 (4) の三重線形拘束条件は次のようになる。

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} (\hat{x}_{(0)}^i - \Delta \hat{x}_{(0)}^i) (\hat{x}_{(1)}^j - \Delta \hat{x}_{(1)}^j) (\hat{x}_{(2)}^k - \Delta \hat{x}_{(2)}^k) = 0 \quad (22)$$

テイラー展開して $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ の 2 次の項を無視すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \left(\Delta \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \hat{x}_{(0)}^i \Delta \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k \right. \\ & \left. + \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \Delta \hat{x}_{(2)}^k \right) = \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k \end{aligned} \quad (23)$$

$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ は式 (18) の $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ よりも高次の微小量であるから、その 2 次の項を無視した式 (23) は式 (9) よりも三重線形拘束条件のより高次の近似式である。誤差は画像面内に生じるので、式 (10) と同様に次の制約がある。

$$k_i \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i = 0, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (24)$$

式 (20) を 2 で割り、式 (23), (24) に対するラグランジュ乗数を導入して

$$\frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^2 \|\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 - \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\Delta \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \hat{x}_{(0)}^i \Delta \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \Delta \hat{x}_{(2)}^k \right) \\ & - \sum_{\kappa=0}^2 \mu_{(\kappa)} k_i \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i \end{aligned} \quad (25)$$

を $\Delta \hat{x}_{(0)}^i, \Delta \hat{x}_{(1)}^j, \Delta \hat{x}_{(2)}^k$ で微分して 0 と置くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_{(0)}^i &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \mu_{(0)} k_i - \tilde{x}_{(0)}^i \\ \Delta \hat{x}_{(1)}^i &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(2)}^k + \mu_{(1)} k_i - \tilde{x}_{(1)}^i \\ \Delta \hat{x}_{(2)}^i &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j + \mu_{(2)} k_i - \tilde{x}_{(2)}^i \end{aligned} \quad (26)$$

両辺に式 (13) の射影行列 $P_{\mathbf{k}}$ を掛けると、 $\tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ は式 (21) の定義より $P_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ であり、また $P_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \mathbf{0}$ であるから、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_{(0)}^s &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} P_{\mathbf{k}}^{si} \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k - \tilde{x}_{(0)}^s \\ &= \hat{P}_{pq}^s \lambda^{pq} - \tilde{x}_{(0)}^s \\ \Delta \hat{x}_{(1)}^s &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i P_{\mathbf{k}}^{sj} \hat{x}_{(2)}^k - \tilde{x}_{(1)}^s \\ &= \hat{Q}_{pq}^s \lambda^{pq} - \tilde{x}_{(1)}^s \\ \Delta \hat{x}_{(2)}^s &= \lambda^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j P_{\mathbf{k}}^{sk} - \tilde{x}_{(2)}^s \\ &= \hat{R}_{pq}^s \lambda^{pq} - \tilde{x}_{(2)}^s \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} \hat{P}_{pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} P_{\mathbf{k}}^{si} \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k \\ \hat{Q}_{pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i P_{\mathbf{k}}^{sj} \hat{x}_{(2)}^k \\ \hat{R}_{pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j P_{\mathbf{k}}^{sk} \end{aligned} \quad (28)$$

式 (27) を式 (23) に代入すると次のようになる。

$$\hat{C}_{pqr}^s \lambda^{rs} = \hat{F}_{pq} \quad (29)$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pqr}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \left(\hat{P}_{rs}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \hat{x}_{(0)}^i \hat{Q}_{rs}^j \hat{x}_{(2)}^k \right. \\ & \quad \left. + \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{R}_{rs}^k \right) \\ \hat{F}_{pq} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} \left(\hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \tilde{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k \right. \\ & \quad \left. + \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k + \hat{x}_{(0)}^i \hat{x}_{(1)}^j \hat{x}_{(2)}^k \right) \end{aligned} \quad (30)$$

λ^{pq} に関する連立 1 次方程式 (29) を解いて λ^{pq} を定め、それを式 (27) に代入すれば $\Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i$ が求まる。ゆえに、真の位置 $\tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$ は次のように推定される。

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{(\kappa)} = \tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)} - \Delta \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{(\kappa)} \quad (31)$$

これが第 2 近似である。しかし、まだ厳密に三重線形拘束条件を満たしているとは限らない。そこで、

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{(\kappa)} \leftarrow \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (32)$$

と更新して、同じ計算を収束するまで反復する。最終的には式 (22) 中の $\Delta \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{(\kappa)}$ は $\mathbf{0}$ となり、三重線形拘束条件が厳密に成立する。

7. 連立 1 次方程式の解法

残る課題は式 (16), (29) の連立 1 次方程式をどのようにして解くかということである。これが問題になるのは、 $p, q = 1, 2, 3$ に対する 9 個の方程式の内 6 個のみが線形独立で、係数行列のランクが 6 となることである。その理由は、独立な未知数が各画面上での補正成分 $\Delta x_{(0)}, \Delta y_{(0)}, \Delta x_{(1)}, \Delta y_{(1)}, \Delta x_{(2)}, \Delta y_{(2)}$ の 6 個しかないからである。

さらに問題になるのは、補正の反復が収束したときは、ランクがさらに 3 に低下することである。この背景は次の通りである。

式 (2) の三重線形拘束条件は $p, q = 1, 2, 3$ に対する 9 個の式から成っているが、線形独立な方程式は 4 個である (付録参照) [7]。しかし、代数的には 3 個しか独立ではなく、局所的にはその 3 個のみで解が定まる。なぜなら、式 (2) は $x_{(0)}, y_{(0)}, x_{(1)}, y_{(1)}, x_{(2)}, y_{(2)}$ の作る 6 次元空間に 9 個の 3 次多項式超曲面を定義するからである。それらの交わり S が対応点 (視線が 1 点で交わる) の三つ組の集合の解空間である。対応点の三つ組とそれらの視線の 3 次元空間の交点とが一対一対応するから、解空間 S は 3 次元代数多様体である。したがって、解空間 S は局所的には (すなわち各連結成分では) 3 個の超曲面の交わりとして定義され、残りの超曲面も S を通る⁷。

制約条件 (4) のもとで式 (3) を最小化することは、幾何学的には 6 次元空間内の与えられた点 $\xi = (x_{(0)}, y_{(0)}, x_{(1)}, y_{(1)}, x_{(2)}, y_{(2)})$ に対して、 ξ から最も近い解空間 S 上の点 $\hat{\xi} = (\hat{x}_{(0)}, \hat{y}_{(0)}, \hat{x}_{(1)}, \hat{y}_{(1)}, \hat{x}_{(2)}, \hat{y}_{(2)})$ を求めよという問題となる。

式 (16), (29) は式 (2) を線形化して得られる拘束条件であるから、解空間 S 上にない点 ξ においてはランクは 6 であるが、 ξ が S に近づくにつれて悪条件となり、 S に一致する瞬間にランク 3 になる。

このことから、式 (16), (29) を解くには初めから 9 個のうち最も独立性の高い 3 個の方程式を選んで解けばよい。すると式 (29) は初期には厳密には満たされないが、補正した $\hat{\xi}$ が解空間 S 上に到達した段階で式 (29) が厳密に満たされる。その点 $\hat{\xi}$ は式 (19), (20) の定義より、解空間 S 上の $\hat{\xi}$ から最も近い点と

⁷これは、式 (2) の 9 個の式から 3 個を選べばよいと意味ではない。その 3 個の超曲面の交わりは S 以外の 3 次元連結成分を含む可能性がある。4 個の超曲面を用いて初めて大域的に S が定義される。

なっている。

悪条件の9個の方程式から最も独立性の高い3個の方程式を選んで解くことは、係数行列を特異値分解して大きい3個の特異値に対する方程式を解くことであり、これはランクを3に制約した一般逆行列を用いて解くことと等価である。したがって、(29)の解は次のように与えられる(式(16)も同様)。

$$\lambda^{rs} = (\hat{C}_{rspq})_3^{-1} \hat{F}_{pq} \quad (33)$$

ここに $(\hat{C}_{rspq})_3^{-1}$ は \hat{C}_{pqrs} のランク3の一般逆行列である。具体的には、 $p, q = 1, 2, 3$ に通し番号 $\alpha = 1, \dots, 9$ を付け、 $r, s = 1, 2, 3$ に通し番号 $\beta = 1, \dots, 9$ を付けて得られる 9×9 行列 $\hat{C} = (\hat{C}_{\alpha\beta})$ を

$$\hat{C} = U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_9) V^T \quad (34)$$

と特異値分解し⁸,

$$(\hat{C})_3^{-1} = V \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_3}, 0, \dots, 0\right) U^T \quad (35)$$

と置いて得られる 9×9 行列 $(\hat{C})_3^{-1} = (\hat{C}_{\beta\alpha})_3^{-1}$ の $\beta = 1, \dots, 9$ を $r, s = 1, 2, 3$ の組に、 $\alpha = 1, \dots, 9$ を $p, q = 1, 2, 3$ の組に書き直したものが $(\hat{C}_{rspq})_3^{-1}$ である。

8. アルゴリズムのまとめ

以上をまとめると、次の手順となる。

- 入力**
- データ点 $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}$
 - 三重焦点テンソル T_i^{jkl}
- 出力**
- 補正位置 $\hat{\mathbf{x}}_{(0)}, \hat{\mathbf{x}}_{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{(2)}$
 - 再投影誤差 E

手順

- $E_0 = \infty$ (十分大きい数), $\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)}, \tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{0}$ と置く ($\kappa = 0, 1, 2$).
- 式(28)の $\hat{P}_{pq}^s, \hat{Q}_{pq}^s, \hat{R}_{pq}^s$ を計算する。
- 式(30)の $\hat{C}_{pqrs}, \hat{F}_{pq}$ を計算する。
- 式(29)の連立1次方程式をランク3の一般逆行列を用いて解いて λ^{pq} を定める。
- 次のように $\tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \kappa = 0, 1, 2$ を更新する。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{(0)}^i &\leftarrow P_{pq}^i \lambda^{pq}, & \tilde{\mathbf{x}}_{(1)}^i &\leftarrow Q_{pq}^i \lambda^{pq}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_{(2)}^i &\leftarrow R_{pq}^i \lambda^{pq}, & \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} &\leftarrow \mathbf{x}_{(\kappa)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)} \end{aligned} \quad (36)$$

- 次の再投影誤差 E を計算する。

$$E = \sum_{\kappa=0}^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 \quad (37)$$

⁸ U, V は 9×9 直交行列, $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_9)$ は特異値 $\sigma_1, \dots, \sigma_9$ を対角要素とする対角行列。

- $E \approx E_0$ なら $E, \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \kappa = 0, 1, 2$ を返して終了する。そうでなければ $E_0 \leftarrow E$ としてステップ2に戻る。

9. 3次元復元

空間の点 (X, Y, Z) が各画像上の点 $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}$ に投影される時、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{x}_{(\kappa)} = Z [P_{(\kappa)} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}], \quad \kappa = 0, 1, 2 \quad (38)$$

ただし、 $P_{(\kappa)}$ はそれぞれのカメラの 3×4 投影行列であり、 $Z[\cdot]$ は第3成分を1とする正規化作用素である。カメラ配置は既知としているから、投影行列 $P_{(\kappa)}$ は既知である(付録参照)。行列 $P_{(\kappa)}$ の (i, j) 要素を $P_{(\kappa)}^{ij}$ と書くと、式(38)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} x_{(\kappa)} &= f_0 \frac{P_{(\kappa)}^{11} X + P_{(\kappa)}^{12} Y + P_{(\kappa)}^{13} Z + P_{(\kappa)}^{14}}{P_{(\kappa)}^{31} X + P_{(\kappa)}^{32} Y + P_{(\kappa)}^{33} Z + P_{(\kappa)}^{34}}, \\ y_{(\kappa)} &= f_0 \frac{P_{(\kappa)}^{21} X + P_{(\kappa)}^{22} Y + P_{(\kappa)}^{23} Z + P_{(\kappa)}^{24}}{P_{(\kappa)}^{31} X + P_{(\kappa)}^{32} Y + P_{(\kappa)}^{33} Z + P_{(\kappa)}^{34}} \end{aligned} \quad (39)$$

上式の分母を払うと次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{31} X + x_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{32} Y + x_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{33} Z + x_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{34} \\ = f_0 P_{(\kappa)}^{11} X + f_0 P_{(\kappa)}^{12} Y + f_0 P_{(\kappa)}^{13} Z + f_0 P_{(\kappa)}^{14} \\ y_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{31} X + y_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{32} Y + y_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{33} Z + y_{(\kappa)} P_{(\kappa)}^{34} \\ = f_0 P_{(\kappa)}^{21} X + f_0 P_{(\kappa)}^{22} Y + f_0 P_{(\kappa)}^{23} Z + f_0 P_{(\kappa)}^{24} \end{aligned} \quad (40)$$

これは $\kappa = 0, 1, 2$ に対して未知数 X, Y, Z の6個の連立1次線形方程式である。したがって、6個の方程式から任意の3個を選んで解けば X, Y, Z が求まる。もちろん6個すべてを最小二乗法で解いても同じ解が得られる。

一方、 $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}$ が三重線形拘束条件を満たさないときは式(38)を満たす (X, Y, Z) が存在しないが、それでも式(40)の6式に最小二乗法を適用すれば (X, Y, Z) の近似値が得られる。

10. 実験

図5は格子状に配置した点を同一直線上に配置した3台のカメラから撮影した画像である。画像サイズ 1000×1000 画素、焦点距離 $f = 600$ 画素を想定している。各格子点を投影点の x, y 座標に独立に期待値0、標準偏差 σ (画素)の正規分布に従うノイズを加え、各 σ ごとにノイズを1000回発生させ、各々

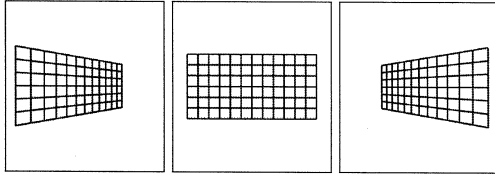


図 5: 平面格子パタンの 3 画像.

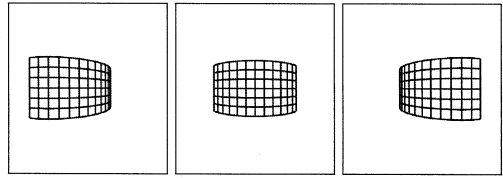


図 7: 曲面格子パタンの 3 画像.

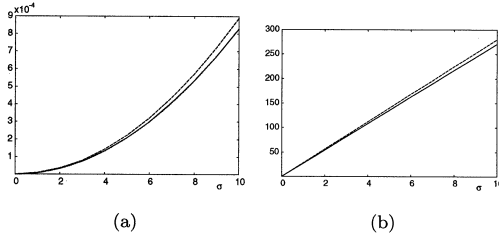


図 6: (a) 画像面上の平均再投影誤差. (b) 3次元空間中の RMS 誤差. 実線: 提案手法. 破線: 最小二乗法. 点線: 理論的期待値 $3(\sigma/f_0)^2$.

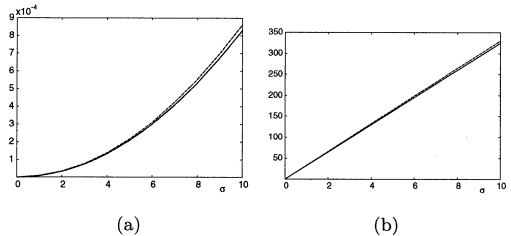


図 8: (a) 画像面上の平均再投影誤差. (b) 3次元空間中の RMS 誤差. 実線: 提案手法. 破線: 最小二乗法. 点線: 理論的期待値 $3(\sigma/f_0)^2$.

の点の補正を行った. 補正は E の変化量が 10^{-10} 以下になるまで反復した.

図 6(a) の実線は, 横軸に σ (画素) をとり, 画像面上での再投影誤差の全格子点の平均を異なる誤差に対して平均したものである. 破線は最小二乗法の結果である. すなわちデータを直接に式 (40) に代入して最小二乗法によって 3次元位置 (X, Y, Z) を計算し, それを式 (38) によって再投影した位置を補正位置 $\hat{x}_{(k)}$ としたものである.

点線は第 1 近似した理論的期待値 $3(\sigma/f_0)^2$ である. これは最尤推定による再投影誤差 E に対して, $f_0^2 E/\sigma^2$ が第 1 近似として自由度 3 (= 6次元空間中の 3次元解空間 S の余次元) の χ^2 分布に従い, その期待値が 3 であることによる [12]. 図から本論文の方法の結果は理論的期待値にほぼ一致し, 最尤推定が行われていることが確認される.

図 6(b) の実線は 3次元復元した位置と真の位置の距離の二乗の全格子点の平均を異なる誤差に対して平均したものの平方根 (RMS 誤差) である. 破線は最小二乗法の結果である. 最小二乗法は精度が低いことが分かる.

図 7 は曲面上に配置した格子点を, それを取り囲むように配置した 3 台のカメラから撮影した画像である. やはり, 画像サイズ 1000×1000 画素, 焦点距離 $f = 600$ 画素を想定している. これに対して平面格子パターンと同様の実験を行った. 図 8 は図 6 に対応する結果である. これからも平面格子パタンの場合と同じ結論が得られる.

11. まとめ

本論文では 3 画像から対応点の 3次元位置を最適に計算する三角測量の新しい計算法を示した. これは前報 [13] の 2 画像の場合に示した最適補正の考え方を 3 画像に拡張したものである⁹.

2 画像の場合との違いは, 2 画像間の基礎行列によるエビ極線拘束条件が 3 画像間の三重焦点点テンソルによる三重線形拘束条件となることである. このとき, 補正量を定める計算が連立 1 次方程式となり, それが悪条件になることを指摘した. そして, それに対処するために, 代数的, 幾何学的考察により, ランク 3 の一般逆行列を用いて厳密な解が得られることを示した.

3 画像以上の画像からの三角測量の最適計算は非常に困難な問題とされ, 現在世界中で研究されている. これらはすべて 3次元空間の無限領域を探索するもので, 計算が非常に複雑で非効率であったり, 高度な最適化ライブラリを必要としたりし, 実用に適しているとは言えない. 本論文に示したように簡単な計算で最適解が得られることは他の研究者は気づいていないようである. 実際の問題に適用するには本論文の方法が最も適していると言える.

本論文では 3 画像の場合を示したが, これは 4 画像以上にも自然な形で拡張される. これについては次報に述べる予定である.

⁹以下にプログラムを公開している.

<http://www.iim.ics.tut.ac.jp/~sugaya/public.php>

参考文献

- [1] M. Byröd, K. Josephson, and K. Åström, Fast optimal three view triangulation, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 2, pp. 549–559.
- [2] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-6 (1997-6), 580–593.
- [3] R. Hartley and F. Kahl, Optimal algorithms in multi-view geometry, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 1, pp. 13–34.
- [4] R. Hartley and F. Schaffalitzky, L_∞ minimization in geometric reconstruction problems, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Pattern Recog.*, June-July 2004, Washington DC, U.S.A., Vol. 1, pp. 504–509.
- [5] R. Hartley and Y. Seo, Verifying global minima for L_2 minimization problems, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Pattern Recog.*, June 2008, Anchorage, AK, U.S.A.
- [6] R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *Comput. Vision Image Understand.*, **68**-2 (1997-11), 146–157.
- [7] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [8] F. Kahl, Multiple view geometry and the L_∞ -norm, *Proc. 10th Int. Conf. Comput. Vision*, October 2005, Beijing, China, Vol. 2, pp. 1002–1009.
- [9] F. Kahl, S. Agarwal, M. K. Chandraker, D. Kriegman, and S. Belongie, Practical global optimization for multi-view geometry, *Int. J. Comput. Vision*, **79**-3 (2008-9), 271–284.
- [10] F. Kahl and D. Henrion, Global optimal estimates for geometric reconstruction problems, *Int. J. Comput. Vision*, **74**-1 (2007-8), pp. 3–15.
- [11] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37**-3 (1996-3), 363–370.
- [12] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- [13] 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2画像からの三角測量: Hartley vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335–342.
- [14] Q. Ke and T. Kanade, Quasiconvex optimization for robust geometric reconstruction, *Proc. 10th Int. Conf. Comput. Vision*, October 2005, Beijing, China, Vol. 2, pp. 986–993.
- [15] F. Lu and R. Hartley, A fast optimal algorithm for L_2 triangulation, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 2, pp. 279–288.
- [16] H. Stewénius, F. Schaffalitzky, and D. Nistér, How hard is the three-view triangulation really?, *Proc. 10th Int. Conf. Comput. Vision*, October 2005, Beijing, China, Vol. 1, pp. 686–653.

付録：投影行列と三重焦点テンソル

視点（レンズ中心）が座標原点にあり，光軸が Z 軸に一致している状態から，カメラを原点の周りに $\mathbf{R}_{(\kappa)}$ （回転行列）だけ回転し， $\mathbf{t}_{(\kappa)}$ だけ平行移動した位置から撮影したとする．このとき式 (38) が成り立たせる投影行列 $\mathbf{P}_{(\kappa)}$ は次のようになる [7].

$$\mathbf{P}_{(\kappa)} = \mathbf{K}_{(\kappa)} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{(\kappa)}^\top & -\mathbf{R}_{(\kappa)}^\top \mathbf{t}_{(\kappa)} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$\mathbf{K}_{(\kappa)}$ はカメラ内部パラメータ行列であり，アスペクト比 $\gamma_{(\kappa)}$ ，歪み角 $\theta_{(\kappa)}$ ，焦点距離 $f_{(\kappa)}$ ，光軸点が

$(u_{0(\kappa)}, v_{0(\kappa)})$ にあるとき，次のようになる [7].

$$\mathbf{K}_{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \gamma_{(\kappa)} f_{(\kappa)} & \gamma_{(\kappa)} \tan \theta_{(\kappa)} & u_{0(\kappa)} \\ 0 & f_{(\kappa)} & v_{0(\kappa)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

投影行列 $\mathbf{P}_{(\kappa)}$ の (ij) 要素を $P_{(\kappa)}^{ij}$ と書くと，三重焦点テンソル T_i^{jk} が次のように表せる [7].

$$\begin{aligned} T_1^{jk} &= \begin{vmatrix} P_{(0)}^{21} & P_{(0)}^{22} & P_{(0)}^{23} & P_{(0)}^{24} \\ P_{(0)}^{31} & P_{(0)}^{32} & P_{(0)}^{33} & P_{(0)}^{34} \\ P_{(1)}^{j1} & P_{(1)}^{j2} & P_{(1)}^{j3} & P_{(1)}^{j4} \\ P_{(2)}^{k1} & P_{(2)}^{k2} & P_{(2)}^{k3} & P_{(2)}^{k4} \end{vmatrix}, \\ T_2^{jk} &= \begin{vmatrix} P_{(0)}^{31} & P_{(0)}^{32} & P_{(0)}^{33} & P_{(0)}^{34} \\ P_{(0)}^{11} & P_{(0)}^{12} & P_{(0)}^{13} & P_{(0)}^{14} \\ P_{(1)}^{j1} & P_{(1)}^{j2} & P_{(1)}^{j3} & P_{(1)}^{j4} \\ P_{(2)}^{k1} & P_{(2)}^{k2} & P_{(2)}^{k3} & P_{(2)}^{k4} \end{vmatrix}, \\ T_3^{jk} &= \begin{vmatrix} P_{(0)}^{11} & P_{(0)}^{12} & P_{(0)}^{13} & P_{(0)}^{14} \\ P_{(0)}^{21} & P_{(0)}^{22} & P_{(0)}^{23} & P_{(0)}^{24} \\ P_{(1)}^{j1} & P_{(1)}^{j2} & P_{(1)}^{j3} & P_{(1)}^{j4} \\ P_{(2)}^{k1} & P_{(2)}^{k2} & P_{(2)}^{k3} & P_{(2)}^{k4} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ に対して行列 $\mathbf{T} = (T_{pq})$ を

$$T_{pq} = \epsilon_{ijp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x^i y^j z^k \quad (44)$$

と定義すると，次の関係が成り立つ．

$$T_{pq} y^p = \epsilon_{ijp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x^i y^j z^k y^p = 0 \quad (45)$$

なぜなら， ϵ_{ijp} は j, p を入れ替えると符号が換わるのに対して $y^j y^p$ は値が同じであり，和 $\epsilon_{ijp} y^j y^p$ の中で打ち消しあって 0 になるからである．したがって， T_{1q}, T_{2q}, T_{3q} の内の二つしか線形独立でない．同様に次の関係も成り立つ．

$$T_{pq} z^q = \epsilon_{ijp} \epsilon_{mkq} T_i^{lm} x^i y^j z^k z^q = 0 \quad (46)$$

したがって， T_{p1}, T_{p2}, T_{p3} の内の二つしか線形独立でない．以上より，9 個の T_{pq} の内の 4 個のみが線形独立であり，残りはこれらの線形結合で表される．

なお，式 (44) は次のように変形できる (\oplus は mod 3 の加算)．こうすると和をとる項数が減り，計算効率が向上する．

$$\begin{aligned} T_{pq} &= x^i \left(T_i^{p\oplus 1, q\oplus 1} y^{p\oplus 2} z^{q\oplus 2} - T_i^{p\oplus 2, q\oplus 1} y^{p\oplus 1} z^{q\oplus 2} \right. \\ &\quad \left. - T_i^{p\oplus 1, q\oplus 2} y^{p\oplus 2} z^{q\oplus 1} + T_i^{p\oplus 2, q\oplus 2} y^{p\oplus 1} z^{q\oplus 1} \right) \end{aligned} \quad (47)$$