CADにおける曲線曲面の創成について

穂坂　衛（東大宇航研）　黒田　満（岐阜大）

1．まえがき

この報告はCADに用いる曲線と曲面の理論について、筆者らが最近実用的見地より開発した結果について述べる。主要な成果は、与えられた点群を通るフェアでしかも$C^{[2]}$級ないわゆる滑らかな曲線と曲面を、連立方程式を解かずとも比較的少い計算で求め得ること、必要なら与えられた境界条件を満足させられること、形状パラメーターは人の直感と比較的容易に結びつき計算機に記憶するのに便利な形であること、曲線を規定する重要なパラメーターとしての接線方向、曲率半径の変化が図式でも容易に求められること、数学的素養や特別な訓練なしで曲線曲面をグローバルにもローカルにもコントロールできることである。
このことは3.3節．4節で展開される。まず始めに準備として次節において、Bézier式[1]の簡単な導き方やそのいくつかの性質が、筆者らの新しい表記法に従って簡潔に述べられる。3節の前半で曲線の接続問題が論じられ、特に変曲点を含まない平面曲線ならば2次曲線でも曲率まで連続可能であることが示される。更にBézier曲線の接続による連続性の限界が示され、これを克服する形で新しい曲線の式が極めて一般的に論じられ、特殊な場合として多項式系をとり具体的に導かれる。尚、*B-spline*[2)3)]との関係についても簡単にふれられる。

2．Bézier曲線

3節以後の理論展開のための準備として、すでによく知られたBézier曲線とその性質について我々の新しい表現式にもとづいて簡単にふれておこう。
曲線はFig. 2.1のように特性多角形と呼ばれるもので定義される。n次の多項式となる曲線に対しては$n+1$個の頂点を持つ多角形が対応する。これ等の頂点列ベクトルをP_i，$0\le i\le n$，弦列ベクトルをa_i，$0\le i\le n$とあらわすことにする。

$$\left.\begin{aligned} a_i &\equiv P_i - P_{i-1}, \quad 1\le i\le n. \\ a_0 &\equiv P_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

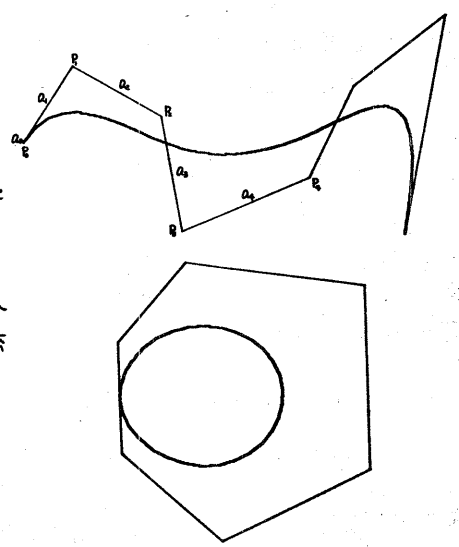

Fig.2.1 Examples of Bézier-curve

このときBézierは各弦ベクトルの重み関数に対して、端点での微係数がその次数の増大とともに次々と隣りの弦ベクトルに関係して決定されるように制約条件を科している。我々はこれをΔ, ∇をそれぞれ前進及び後進差分作用素として次のように書こう。

$$\boxed{\begin{aligned} &R^{(0)}(0)=k_0P_0, && R^{(0)}(1)=k_0P_n, \\ &R^{(1)}(0)=k_1\Delta P_0, && R^{(1)}(1)=k_1\nabla P_n. \\ &\cdots\cdots && \\ &R^{(m)}(0)=k_m\Delta^m P_0, && R^{(m)}(1)=k_m\nabla^m P_n. \\ &\cdots\cdots && \end{aligned}} \qquad (2.2)$$

係数列 $\{k_i\}$ を単純化のために

$$k_i = \frac{n!}{(n-i)!}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.3}$$

とすれば曲線はシフトオペレータEを導入して次のように簡潔に記述できる。

$$\boxed{R(t) = (1 - t + Et)^n P_0.} \tag{2.4}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P_i \, {}_nC_i \, t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} P_i f_i(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(t). \tag{2.5}$$

(2.4)式は極めて表現力豊かな式であり、Bézier 曲線の全ての性質はほとんど自明のこととして導かれる。もしもBézier のオリジナルな式を導くのなら、

$$R(t) - P_0 = \frac{E-1}{E-1}\{(1-t+Et)^n - 1\} P_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \psi^{(i)}(0) E^i a_1.$$

但し

$$\psi(E) \equiv \frac{\{1 + (E-1)t\}^n - 1}{E-1} = -\frac{(1-x)^n - 1}{x} \cdot t \equiv \phi(x) \cdot t, \quad x \equiv (1-E)t. \tag{2.6}$$

従って次のように得られる。

$$R(t) = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{-(-t)^i}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \phi(t) \, a_i. \tag{2.7}$$

区間[0, 1] で定義される関数系 $\{f_i(t)\}$ は Bernstein の多項式系と呼ばれ互に線形独立である。(2.4)式において $E = P_0 = 1$ とおけば

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(t) = 1, \tag{2.8}$$

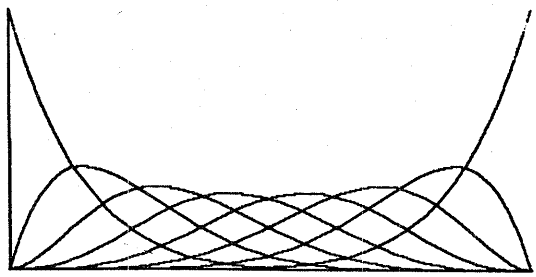

Fig.2.2 The Bernstein basis functions of degree 3

なる Cauchy の条件は自明であり、従って曲線は座標軸のとり方に依存しない。又、そもそもの定義から明らかなように曲線は対称である。

$$f_i(t) = f_{n-i}(1-t) \tag{2.9}$$

更に

$$f_i(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \qquad f_i^{(1)}\left(\frac{i}{n}\right) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{2.10}$$

だから、頂点 P_i はパラメータ値 $t = i/n$ で曲線 $R(t)$ の形状に最大の影響をおよぼし、かつ他の点に対しても好ましく（$\{f_i(t)\}$ が負の値をとらないことは重要）作用することがわかる。関数 $\{f_i(t)\}$ の様子は Fig. 2.2 のようである。(2.4)式から Bézier の示した曲線の図式構成法は自明のことである。
また、n 次の Bézier 曲線は2つの n-1次の Bézier 曲線の線形内挿されたものであることも自明である。今(2.2)，(2.3)式により

$$P_i = (1 + E - 1)^i P_0 = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{i} (n-j)! \, {}_iC_j R^{(j)}(0), \quad P_{n-i} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (n-j)! \, {}_iC_j R^{(j)}(1). \tag{2.11}$$

従って

$$\boxed{R(t) = \sum_{i=0}^{k} P_i f_i(t) + \sum_{i=0}^{k} P_{n-i} f_{n-i}(t) = \sum_{j=0}^{k} \{R^{(j)}(0) P_j(k,t) + R^{(j)}(1) g_j(k,t)\}, \quad n = 2k+1.} \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned} p_j(k,t) &= \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{k-j} {}_{n-j}C_i\, t^{i+j}(1-t)^{n-i-j} \\ g_j(k,t) &= \frac{(-1)^j}{j!}\sum_{i=0}^{k-j} {}_{n-j}C_i\, t^{n-i-j}(1-t)^{i+j} \end{aligned}\right\} \quad j=0,\cdots,k \tag{2.13}$$

これは筆者の一人穂坂がすでに提案していた式[4]である。

3. 曲線の接続

前節における曲線は諸種の特徴をもつが複雑な形状を表現するための次数の増大は避けがたい。この一つの解決法として付録1. のような有理多項式系を用いることもできる。ここでは曲線のカバーするクラスを広げるためにも、計算機による記憶と処理に関する制約からも、いくつかの曲線要素を接続して所望の曲線を得るという立場をとる。しかしながらパラメトリックな曲線の接続に関して、接続点での連続性が Cartesian 座標系で厳密に議論されたことは稀であった。本節においては工学的に重要な2次までの連続条件について論ずる。今、次のような曲線 $R_{\mathrm{I}}(t)$, $R_{\mathrm{II}}(t)$ が接続されるとする。

$$R_{\mathrm{I}}(t)=\sum_{i=0}^{m} a_i^{\mathrm{I}} g_i(t)=\sum_{i=0}^{m} P_i^{\mathrm{I}} f_i(t), \qquad R_{\mathrm{II}}(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i^{\mathrm{II}} g_i(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i^{\mathrm{II}} f_i(t). \tag{3.1}$$

曲線素による微分をダッシュ、t による微分をドットで示すこととすれば、

$$R'=\frac{\dot R}{\sqrt{\dot R\cdot\dot R}}, \qquad R''=\frac{1}{\rho}=\frac{\ddot R(\dot R\cdot\dot R)-\dot R(\dot R\cdot\ddot R)}{(\dot R\cdot\dot R)^2} \tag{3.2}$$

ここで $A_i\equiv|a_i|$, $\alpha_i\equiv a_i/A_i$ と記すことにし、(2.2) 式を考慮すれば Cartesian 座標系での2次までの連続条件は、

$$\boxed{\begin{aligned}
&P_m^{\mathrm{I}}=P_0^{\mathrm{II}}, &(3.3)\\
&\alpha_m^{\mathrm{I}}=\alpha_1^{\mathrm{II}}, &(3.4)\\
&\frac{m-1}{m(A_m^{\mathrm{I}})^2}\left\{\alpha_m^{\mathrm{I}}(\alpha_m^{\mathrm{I}}\cdot a_{m-1}^{\mathrm{I}})-a_{m-1}^{\mathrm{I}}\right\}=\frac{n-1}{n(A_1^{\mathrm{II}})^2}\left\{\alpha_1^{\mathrm{II}}(\alpha_1^{\mathrm{II}}\cdot a_2^{\mathrm{II}})-a_2^{\mathrm{II}}\right\}. &(3.5)
\end{aligned}}$$

(3.5)式からベクトル $\{\alpha_m^{\mathrm{I}}(\alpha_m^{\mathrm{I}}\cdot a_{m-1}^{\mathrm{I}})-a_{m-1}^{\mathrm{I}}\}$, $\{\alpha_1^{\mathrm{II}}(\alpha_1^{\mathrm{II}}\cdot a_2^{\mathrm{II}})-a_2^{\mathrm{II}}\}$ が平行あるいはゼロ、即ち a_{m-1}^{I}, a_m^{I}, a_1^{II}, a_2^{II} が共面ベクトルでかつ

$$\boxed{\frac{m-1}{m}\frac{A_{m-1}^{\mathrm{I}}}{(A_m^{\mathrm{I}})^2}\sin\theta_{\mathrm{I}}=\frac{n-1}{n}\frac{A_2^{\mathrm{II}}}{(A_1^{\mathrm{II}})^2}\sin\theta_{\mathrm{II}}.} \tag{3.6}$$

であることが必要条件である。但し、θ_{I}, θ_{II} はそれぞれベクトル a_{m-1}^{I}, a_m^{II} 及び a_1^{II}, a_2^{II} のなす角である。

3.1 連続条件の幾何学的意味

(3.3), (3.4), (3.5) を満たすような幾何学的作図法を考えてみるに、簡単のため $m=n$ と仮定する。

i) P_1^{II} が与えられている場合

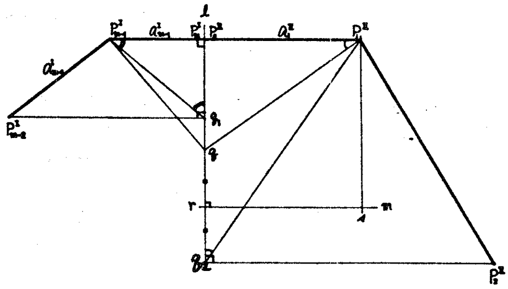

Fig.3.1 The geometric construction for satisfying continuity conditions

Fig. 3.1 のように点 P^{I}_{m-2} を通り a^{I}_{m} に平行な直線と直線 l との交点を g_1 とする。$\angle P^{I}_{m-1} g_1 P^{I}_{m} = \angle P^{I}_{m} P^{I}_{m-1} g$ となるように l 上に g をとる。更に、$\angle g P^{II}_{1} P^{II}_{0} = \angle P^{II}_{0} g_2 P^{II}_{1}$ となるような点 g_2 を l 上にとる。g_2 を通り a^{II}_{1} に平行な直線上に P^{II}_{2} があればよい。

ii) P^{II}_{2} が与えられている場合

i)と同様にして g_1, g を決める。P^{II}_{2} を通り a^{I}_{m} に平行な直線と l との交点を g_2 とする。r は $\overline{g g_2}$ の中点とし、s は g を中心とし半径 $\overline{P^{II}_{0} r}$ の円が直線 m と交わる点とする。このとき P^{II}_{1} は s を通り l に平行な直線と a^{I}_{m} の延長との交点として求まる。

尚、上記の作図法において g 点はこのとき曲率中心であり、図式に接線方向や曲率半径を知ることができるのは曲線形状をとらえる上で極めて重要である。

このようにして連続条件を満足させるように頂点列を選んでいく方法は、計算機とインターラクティブに作業しながら逐次的に曲線形状を決定していくような側面で有用なものとなろう。

3.2 曲率連続な2次，3次の曲線接続法

一般に2次曲線の曲率は1つの定数となるが それでもこれをいくつかの曲線セグメントにわたって連続に結合することは制限条件付きで可能で、連立方程式を解く形で実現される。これが3次曲線になれば2つの定数の組み合せになり充分な自由度をもつため、結合のための影響は他へ伝ぱんすることはなく局所的に処理可能である。以下は多角形を使った場合のこれらのシステマティックな方法について述べる。

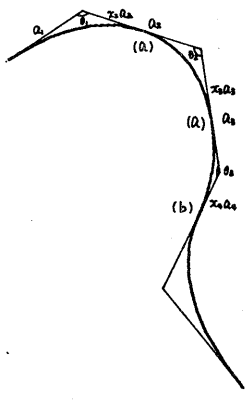

Fig.3.2 The second degree curve segments

i) 2次－2次の接続

2次の曲線要素を Fig. 3.2 のように曲率まで連続に接続するのに、各弦 a_i を比 $x_i:(1-x_i)$ に内分する点が曲線の接続点となるとすれば (3.6) 式より

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)^2 \frac{x_3}{1} = B_2,\\ &\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^2 \frac{x_{i+1}}{1-x_{i-1}} = B_i, \quad i=3,\cdots,n-2.\\ &\left(\frac{x_{n-1}}{1-x_{n-1}}\right)^2 \frac{1}{1-x_{n-2}} = B_{n-1}.\end{aligned}} \qquad (3.7)$$

$$B_i = \frac{A_{i-1}\sin\theta_{i-1}}{A_{i+1}\sin\theta_i}, \quad i=2,\cdots,n-1. \qquad (3.8)$$

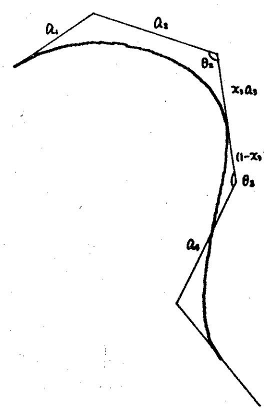

Fig.3.3 The third degree curve segments

この非線形連立方程式は一般に解析的には解けない。しかし、次の (3.9) 式を第1近似として (3.7) 式を繰り返し計算することによって x_i は解に急速に収束する。

$$\boxed{x_i = \frac{\sqrt{B_i}}{1+\sqrt{B_i}}\ , \quad i=2,\cdots,n.} \tag{3.9}$$

かくて得られる2次曲線の列は（3.5）式から平面曲線に限定され、かつ曲率半径の絶対値が連続であるようなものであり Fig. 3.2 (a), (b) のいずれかの場合である。従ってこのことをよく理解して使うならば、創成方法の単純さと相俟って利用度の高いものであるといえる。例えば、通常人と人とが情報伝達の手段として使う程度の図の場合、これは充分すぎるといえよう。

ii) 3次－3次の接続

この場合には（3.7）式のような非線形連立方程式を解く必要はなく、その第1近似（3.9）式そのものが解となる。

従ってこのようにして合成された曲線の一部分の形状変更、修正は全体の形状に影響をおよぼすことなく局部的に処理できる。又、i)の場合と違って変曲点を含むことができるため、より一層広いクラスの曲線を表現できる。しかし、（3.5）式の制約条件を忘れることはできない。

3.3 接続時の連続性を考慮して定義される曲線

（3.5）式の条件は Bézier 曲線の接続における連続性の限界を示すものである。これを克服するために、本節では曲線は接続点であれ、その他の点であれ、常に前後の頂点列から等しく影響を受けながら決定されると考え、接続条件をそれ自身の中に含むような曲線の式が一般的に展開される。これによってはじめて我々は厄介な接続問題から解放される。

与えられた点列 $\{P_i\}$ において点 P_j から始まる $n+1$ 個の点列と、それを一つシフトした P_{j+1} から始まる $n+1$ 個の点列のそれぞれによって決定される2つの曲線セグメントが接続点で $C^{[n-1]}$ 級であるような基底関数系 $\{f_i(t)\}$ の満たすべき条件は、

$$f_0^{(j)}(1) = 0, \qquad j=0,1,\cdots,n-1. \tag{3.10}$$

$$f_n^{(j)}(0) = 0, \qquad j=0,1,\cdots,n-1. \tag{3.11}$$

$$f_{i+1}^{(j)}(1) = f_i^{(j)}(0)\ , \quad j=0,1,\cdots,n-1. \quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{3.12}$$

（3.11）式を満たす関数を $f(t)$ とすれば $\{b_i\}$ を定数として（3.12）式より

$$f_i(t) = f_{i+1}(1+t) + b_{n-i}f(t). \tag{3.13}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} f_n(t) &= b_0 f(t). \\ f_{n-1}(t) &= b_0 f(1+t) + b_1 f(t), \\ &\text{-------} \\ f_1(t) &= b_0 f(n-1+t) + b_1 f(n-2+t) + \cdots + b_{n-1} f(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Cauchy の条件より

$$f_0(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{i=0}^{n-j-1} f(i+t). \tag{3.15}$$

これに（3.10）式の条件を考慮すれば $\{b_i\}$ は決定される。$f(t)$ は（3.11）式を満た

すものならば何でもよいわけだが、ここでは特に $f(t)=t^n$ をとれば.

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\, i^n=1,\\&\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\, i^{n-j}=0,\quad j=1,\cdots,n-1.\end{aligned}\right\}\tag{3.16}$$

但し

$$\bar{b}_i\equiv\sum_{j=0}^{n-i}b_j,\quad i=1,\cdots,n.\tag{3.17}$$

ここで次の恒等式を x で j 回微分して $x=0$ とすれば (3.18) 式を得る。

$$(1-e^x)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i{}_nC_i\,e^{ix}.$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_nC_i\,i^n=(-1)^n n!,\quad \sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_nC_i\,i^j=0,\quad j<n.\tag{3.18}$$

(3.16) 式と比較して

$$\bar{b}_i=(-1)^{n-i}\frac{{}_nC_i}{n!},\quad \bar{b}_{n-i}-\bar{b}_{n-i+1}=\boxed{b_i=(-1)^i\frac{{}_{n+1}C_i}{n!},\ i=0,\cdots,n-1.}\tag{3.19}$$

$\{f_i(t)\}$ の対称性から

$$f_0(t)=f_n(1-t)=\frac{1}{n!}(1-t)^n.$$

ここで更に次のような恒等式を x で n 回微分して $x=0$ とおけば (3.21) 式を得る。

$$(e^x-1)^{n+1}e^{(i-n-1+t)x}=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j{}_{n+1}C_j\,e^{(i-j+t)x}.$$

$$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j{}_{n+1}C_j\,(i-j+t)^n=0,\quad 0\leq i\leq n.\tag{3.21}$$

従って一般に

$$\boxed{f_{n-i}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j{}_{n+1}C_j\,(i-j+t)^n=\frac{1}{n!}\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{j+1}{}_{n+1}C_j\,(i-j+t)^n,\ i=0,\cdots,n.}\tag{3.22}$$

又、$n-i$ を i に $n+1-j$ を j に変数変換すれば

$$\boxed{f_i(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j{}_{n+1}C_j\,(i-j+1-t)^n,\ i=0,\cdots,n.}\tag{3.23}$$

この基底関数系を用いて定義される曲線 $R(t)$ をもし Bézier 曲線として表現するとすれば、対応する頂点列 $\{g_i\}$ は (2.12) 式を用いて次のように求まる。

$$\boxed{g_i=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}P_k\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}{}_{n+1}C_{k-l}\,(l+1)^{n-i}l^i,\ i=0,\cdots,n,\ 但し\ 0^0=1.}\tag{3.24}$$

従って例えば曲率連続な3次曲線は ‐

$$\boxed{\begin{aligned}R(t)=\frac{1}{6}(1-t)^3P_{i-1}&+\left\{\frac{1}{6}(2+t)^3-\frac{2}{3}(1+t)^3+\frac{1}{6}t^3\right\}P_i\\&+\left\{\frac{1}{6}(1+t)^3-\frac{2}{3}t^3\right\}P_{i+1}+\frac{1}{6}t^3P_{i+2}.\end{aligned}} \qquad (3.25)$$

であり、

$$P_{i-1}+\frac{1}{6}(a_i-a_{i-1}),\ P_{i-1}+\frac{1}{3}a_i,\ P_i-\frac{1}{3}a_i,\ P_i+\frac{1}{6}(a_{i+1}-a_i)$$

なる4点を頂点とする3次の Bézier 曲線とも考えられる。
このとき接続点における曲率中心$\overline{O}$は Fig.3.4 のように容易に作図することができる。
即ち、(3.2)式より

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\dot{R}^2}\left\{\ddot{R}-\frac{\dot{R}}{|\dot{R}|}\left(\frac{\dot{R}}{|\dot{R}|}\cdot\ddot{R}\right)\right\}\equiv\frac{X}{\dot{R}^2}. \qquad (3.26)$$

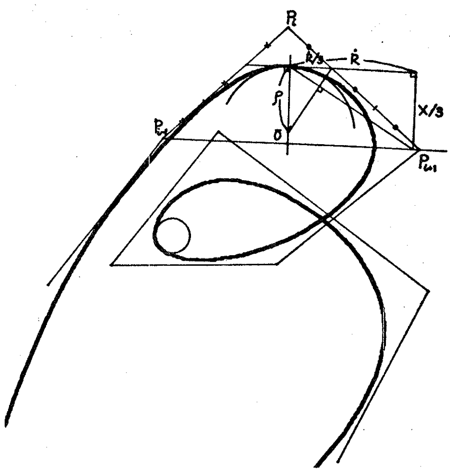

Fig.3.4 The new curve of degree 3 and radii of curvature

この方法によればこのように、点、接線方向，更に長さのディメンジョンをもった量としての曲率半径といった、曲線を規定する重要なパラメータの変化のようすが図式的に簡単に求められて、形状の把握とコントロールを容易にした。このようなことはかつて無かったことであり曲線のあてはめ、設計にとって非常に重要なことである。更に、曲線は各セグメントにわたって同じ重み関数を用いるため、そのテーブルを作っておけば極めて単純な計算だけから生成することが可能である。

ところで(3.22)，(3.23)式による曲線は B-spline[3] のクラスの中の full-spline 曲線と呼ばれるものである。事実、次数3の場合の B-spline 基底関数を我々流の手法で整理して示せば、

$$\begin{aligned}N_{i,4}(t)=\frac{1}{3!}(i+t)^3N_{i,1}(t)&+\frac{1}{3!}\left\{(i+2+t)^3-4(i+1+t)^3\right\}N_{i+1,1}(t)+\frac{1}{3!}\left\{(i+4+t)^3\right.\\&\left.-4(i+3+t)^3+(i+2+t)^3\right\}N_{i+2,1}(t)+\frac{1}{3!}(i+4-t)^3N_{i+3,1}(t).\end{aligned} \qquad (3.27)$$

$$Q(t)=\sum_i P_i N_{i,4}(t).$$

曲線 $Q(t)$ における一つの曲線セグメントとして $N_{0,1}(t)$ の係数だけを取り出せば、(3.25)式の $i=-2$ とした場合と一致する。しかし CAD への応用といった立場からはここでの定式化に従った方がはるかに便利である。

4. 逆変換問題及び応用例

3.3 節による曲線は、その発生方法から自づとスムージングの性質を備えているとか、接続の問題を意識しなくてもよいとか、コントロールが局所的にも大域的にも可能だとか、適度にインセンシィティヴだとか数多くの特徴を備えているが、これらの根元的由来は曲線を定義するパラメータとしての点群を曲線上からはずしたところにあった。このため形状の入力がやや人の直感からはずれることとなったし，対称によってはこのような特性多角形の決定がむずかしいか面倒な場合も多々ある。例えば、クレイモデル等からとられたいわゆる測定データといったものが基礎になって、曲線曲面のあてはめ、設計を行なおうとするような

場合がそれであろう。その意味では曲線上の点列を与えて逆に頂点列を求めるという逆変換問題は重要である。しかし，そもそもこの曲線によるあてはめを目論む裏には、得られた多角形をコントロールして形状変更することが前提として潜んでいると考えられる。従ってこの種の逆変換問題を正確に解くために多大の努力が払われるとしてもそれはむくわれないだろう。従って我々は、曲線上の我々の注目するところから自由にこの逆変換を行なっていって、制約の少なくなる所で適当に切って捨てるか、予め仮想の点をいくつか与えておいて処理するような方法を考えた。結果、近似的には図式にこれを行なうことも可能となった。

今、曲線が通過すべき点列$\{r_i\}$が与えられて対応する頂点列$\{P_i\}$を求めるのに、$\{r_i\}$の一点が頂点列$\{P_i\}$の決定にどのような影響を与えるかを調べてみる。

Fig.4.1 The new curve

このとき，

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{- - - - - - - - -} \\ P_{-2}+4P_{-1}+P_0=0, \\ P_{-1}+4P_0+P_1=6r_0, \\ P_0+4P_1+P_2=0, \\ \text{- - - - - - - - -} \\ P_{i-1}+4P_i+P_{i+1}=0. \\ \text{- - - - - - - - -} \end{array}} \qquad (4.1)$$

この式の同次方程式の解は

$$(\sqrt{3}\pm 2)^i,\quad i=0,1,\cdots$$

r_0の影響は無限遠で収束すべきだから，

$$P_0=\sqrt{3}\,r_0,\quad P_i=\sqrt{3}\,r_0(\sqrt{3}\mp 2)^i,\ i=\pm 1,\pm 2,\cdots \quad (4.2)$$

ところで $(2-\sqrt{3})^i \leq 10^{-5}$，$i \geq 4$.
だから次のように近似して充分である。

$$\boxed{P_i=\sqrt{3}\,r_i+\sqrt{3}\sum_{j=1}^{3}(\sqrt{3}-2)^j(r_{i-j}+r_{i+j}).} \qquad (4.3)$$

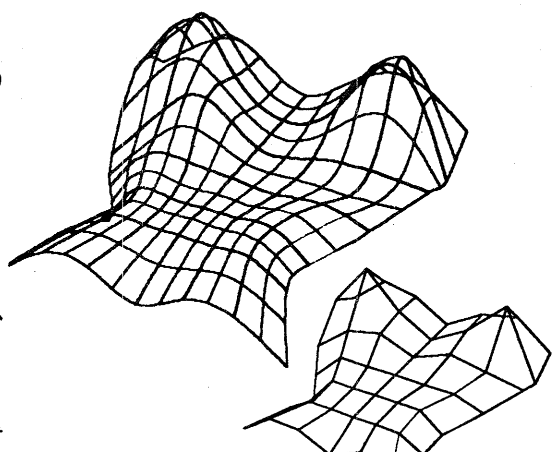

Fig.4.2 The new surface

これを図式に行なって見当をつけたいのであればFig.4.3のように、前の近似で得られたP_{i-1}^{j*}，P_{i+1}^{j*}を使ってP_i^{j+1}が求められる。右肩の添字は繰り返し回数で$\{P_i^2\}$位で充分であろう。$j*$はすでに$j+1$があればそれを使うべきことを示している。もし境界条件が与えられているならばその近傍で(4.1)式風な計算をして重ねあわせるか、連立方程式を解かなければならない。境界条件が簡単で意味があり、解析解が得られる2，3の例を付録2に示した。尚、その他、接線や2次の微係数の指定、冗長な頂点を持ち込みたい場合等の組み合わされた境界条件については

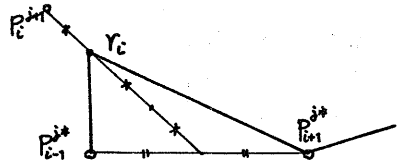

Fig.4.3 Geometric inversion method

数値計算法の手続きによってもとめられるのが適当であろう。いずれにしても境界条件の影響のおよぶ範囲内だけの次数の行列でよいし、また対角要素近傍に大きな数が現われるため計算は容易である。Fig. 4.1はこのようにして得られた曲線の例である。曲線は複雑で、対応する多角形を曲線から予想することはかなり困難で面倒である。このようなとき、曲線上の点を与えて多角形を求める意味が生ずる。Fig. 4.1では60個ほどの入力点も表示されている。尚、この方法は容易に曲面にまで展開できる。つまり曲面が通過すべき $m \times n$ 個の多面体状頂点群 $\{r_{ij}\}$ が与えられたとき、以上述べてきたような変換法を形式的にマトリックスで $S_{m \times m}$, $T_{n \times n}$ と書けば、特性多面体 $\{P_{ij}\}$ は、

$$[P_{ij}] = S_{m\times m}[r_{ij}]\,T_{n\times n} \tag{4.4}$$

と得られる。この式は形式的表現であって実際のマトリックス計算を意味するものではないことを重ねて注意する。このときの曲線の例がFig. 4.2である。

更に、応用上の問題点としては、セグメント間のパラメータのスケールの問題が考慮されなければ、数学的には充分でも実用的には不都合な形を示す。例えば、(3.26)式及びFig. 3.4から P_i と直線 $\overline{P_{i-1}P_{i+1}}$ の距離が一定でさえあれば頂点がどのように動いても対応する曲率半径は一定となる。この問題や、多重頂点、直線上に並んだ頂点列といったものによる特異点の表現、あるいは更に、コントローラビリティを上げるために冗長な頂点を付加するといった事柄、その他については本方法の実際問題への適用例と共に稿を改めて報告する。

5. まとめ

この報告ではCADにおける形状記述の問題として、新しい曲線曲面の基礎理論を展開した。人と計算機とのインターフェイスとして、かなり使用にたえられるものにまで高めることができたと思う。実際問題への適用にともない発生する種々の問題点とその解決法については、その適用例と共に稿を改めて報告する予定である。尚、日頃熱心に御検討、御協力いただく研究室の皆さんと、電総研の木村文彦氏に感謝致します。

付録1. 有理多項式系を重み関数とする曲線

次のような有理多項式を考える。

$$\left.\begin{aligned} &G(t,s) \equiv \frac{(1-s)t^2 + ks\,t}{t^2-(2-k)s\,t+s} \\ &G(0,s)=0, \quad G(1,s)=1, \quad G'(0,s)=k, \quad G'(1,s)=0 \end{aligned}\right\} \tag{付.1}$$

ここで $k=0$ ならば $G(1-t,1-s)=1-G(t,s)$ となり $G(t,s)$ は対称である。もし s_i, $i=1,\cdots,n$ ($0\le s_i\le 1$, $s_i \ne s_j$, $i \ne j$) が適当に選ばれるならば $\{G(t,s_i)\}$ は線形独立なことが容易に示される。いま

$$\left.\begin{aligned} &g_i(t) \equiv G(t,s_i), \\ &f_i(t) \equiv g_i(t) - g_{i+1}(t), \quad i=0,\cdots,n, \\ &g_0(t) \equiv 1, \quad g_{n+1}(t) \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{付.2}$$

とすれば区間 $[0,1]$ において $f_i(t)\geq 0$ である。当然のこととして Cauchy の条件は成立する。曲線はこのとき

$$R(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i g_i(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i f_i(t). \qquad (付3)$$

もし、$t=i/n$ において $f_i(t)$ が最大値をとるように s_i を決定したいのであれば、$f_i'(\frac{i}{n})=0$ の計算から

$$s_i s_{i+1}\left(\frac{i}{n}-1\right)^4-(1-s_i)(1-s_{i+1})\left(\frac{i}{n}\right)^4=0. \qquad (付4)$$

従って n が奇数なら $s_{\frac{n+1}{2}}=\frac{1}{2}$ として(付4)から $\{s_i\}$ を決定すればよい。この曲線の例を $\{f_i(t)\}$ と共に Fig.1 に示す。

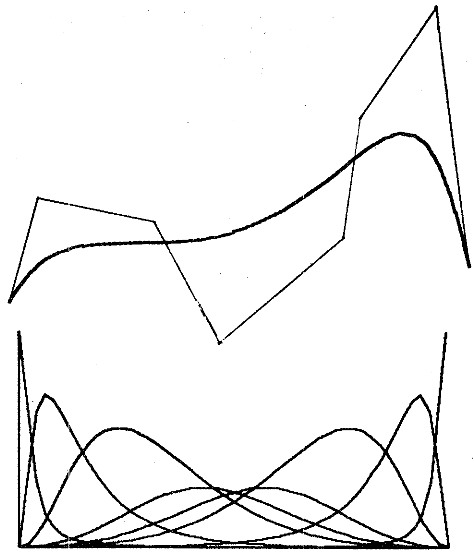

Fig.1 A curve and its rational polynomial waiting functions

付録2. 境界条件が与えられた逆変換問題の解析解の例

以下で基本となる n 次の行列式は

$$N_n=\begin{vmatrix}4 & 1 & & & 0\\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 4 & 1\\ 0 & & & 1 & 4\end{vmatrix}=4N_{n-1}-N_{n-2}=\frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sinh(n+1)\alpha}{\sinh\alpha},\quad \cosh\alpha=2. \qquad (付5)$$

A. 端点で曲率がゼロとなる場合

イ. $P_1=(P_0+P_2)/2=r_1$, $P_n=(P_{n-1}+P_{n+1})/2$ とおく。このとき

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & & & 0\\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 4 & 1\\ 0 & & & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2\\ P_3\\ \vdots\\ P_{n-2}\\ P_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6r_2-r_1\\ 6r_3\\ \vdots\\ 6r_{n-2}\\ 6r_{n-1}-r_n\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}P_2\\ P_3\\ \vdots\\ P_{n-2}\\ P_{n-1}\end{bmatrix}=\left[(-1)^{i+j}\frac{N_{i-1}\cdot N_{n-2-j}}{N_{n-2}}\quad 但し\ i\leq j\right]\begin{bmatrix}6r_2-r_1\\ 6r_3\\ \vdots\\ 6r_{n-2}\\ 6r_{n-1}\end{bmatrix}. \qquad (付6)$$

ロ. $P_0=P_1$, $P_n=P_{n+1}$ とおく場合

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & & & 0\\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 4 & 1\\ 0 & & & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{bmatrix}=\left[(-1)^{i+j}\frac{(N_{i-1}+N_{i-2})(N_{n-j}+N_{n-1-j})}{N_{n-1}}\quad 但し\ i\leq j\right]\begin{bmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{bmatrix}. \qquad (付7)$$

B. 閉曲線となる場合

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & & 0 & 1\\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 4 & 1\\ 1 & 0 & & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{bmatrix},\qquad P_i=6\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\frac{N_{n+1-i-j}+(-1)^n N_{i+j-3}}{N_n-N_{n-2}+(-1)^n\,2}\,r_j,\quad i=1,\dots,n. \qquad (付8)$$

但し N_i の i の計算においては mod n がとられる。

[参考文献]

1) Bezier,P.E.:Numerical control-mathematics and applications. Wiley,London 1972
2) Curry,H.B. and Schoenberg,I.J.:Abstr. Bull. Amer. Math. Soc.,Vol.53(1947)1114
3) Riesenfeld,R.F.:Ph. D. Thesis, Syracuse Univ.,1973
4) 穂坂：情報処理, Vol.10, No.3,pp.121-131,1967