多重2値論理とその導出

志村 正道
（東京工業大学工学部）

1 まえがき

定理の証明あるいは問題解決には述語計算が有力な手法となるが，ここで興味あるのは計算機による自動問題解決に用いられる導出法である。導出法は，問題を記述した（完全）論理式を簡単化して充足不可能性を導くための機械的な手法と考えてよい。これには Davis および Putnam[1] の方法を拡張したものとして，Robinson[2] の導出原理がよく知られている。

さて，実際には，真（T）か偽（F）の2つの主張では表現でき得ない叙述がある。例えば，可能性，必然性を表わす様相的な叙述，時制を示す叙述あるいはあいまい性，不確実性を表わす叙述などである。この場合，多値論理が用いられる。しかしながら，多値論理は複雑な叙述を可能にするが，導出が困難であるばかりでなく，問題解決の手法としては推論の多値性から不適であると考えられる。

本論文で提案する論理系は上述のような多値論理の欠点をある程度解決した一つの系であって，導出という応用面に重点を置いた論理系の試みといえよう。次のような例を考えてみよう。a.「金持ちである」，b.「金持ちらしい」，c.「金持ちらしくない＝金持ちでないらしい」，d.「金持ちでない」。これら4つの叙述において，a と d は明かに真と偽に対応する2値を表わしている。一方，b と c は「---らしい」，すなわち曖昧性に関してはやはり真と偽に対応する2値を表わしているといえよう。したがって，後者の場合の真と偽とを T^*，F^* とかき，論理系としては T (true)，T^*，F^*，F (false) なる4値論理を考え，以下この論理系について考察することにする。

2. 基本的性質

ここで述べる論理系においては，論理記号として次のものを用いる。

$$\sim,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\ *$$

すなわち，否定，和，積，含意の他に新しく様相演算子（MODE）"$*$" を導入する。ただし，$*$ は否定と同じく単項演算子であり，便宜上論理式の右上肩に付すものとする。$*$ 演算子をもつ表現としては命題記号を P とするとき，次のようなものが考えられる。

例1　P：晴である（確定）　　P^*：晴らしい（曖昧）
　　Q：晴である（現在）　　Q^*：晴れるだろう（未来）
　　R：必ず晴である（必然）　　R^*：晴れるかもしれない（可能）

命題記号あるいは述語記号による叙述は，真であるか偽であるかによって T または F をとる。したがって，$*$ 演算子をもつ叙述は T^* あるいは F^* をとるものとしよう。すなわち，$*$ 演算子を含む完全論理式は T, T^*, F^*, F なる4値をとり得る。このように，ここで述べる論理系は4値論理であるが，叙述自体は（F, T）あるいは（F^*, T^*）の2値をもつ二つの論理系から構成されているかの如く取り扱うことができ，通常の2値論理と同じく記述およびその論理計算が容易になる。

次に＊演算子を含む例を示しておこう。ただし，＊演算 P^* を「Pらしい」という叙述としよう。いま，命題記号 P，Q を

P：若い　　　　Q：元気である

とすれば，以下に示すように含意記号を用いるとき5つの叙述が得られる。

$P \rightarrow Q$ ： 若いならば元気である

$P \rightarrow Q^*$ ： 若いならば元気らしい。

$P^* \rightarrow Q$ ： 若いらしいならば元気である。

$P^* \rightarrow Q^*$ ： 若いらしいならば元気らしい。

$(P \rightarrow Q)^*$ ： 若いならば元気であるといえるらしい。

さて，基本的演算である否定(～)，論理和(∨)，論理積(∧)について定義しておこう。すなわち，完全論理式 f と g との2項演算を次のように与える。

否定

f	～f
F	T
F^*	T^*
T^*	F^*
T	F

論理和

f \ g	F	F^*	T^*	T
F	F	F^*	T^*	T
F^*	F^*	F^*	T	T
T^*	T^*	T	T^*	T
T	T	T	T	T

論理積

f \ g	F	F^*	T^*	T
F	F	F	F	F
F^*	F	F^*	F	F^*
T^*	F	F	T^*	T^*
T	F	F^*	T^*	T

Table 1

なお含意については

$$f \rightarrow g = \sim f \vee g$$

で定義することにする。したがって，その真理値表は右のようになる。

含意

f \ g	F	F^*	T^*	T
F	T	T	T	T
F^*	T^*	T	T^*	T
T^*	F^*	F^*	T	T
T	F	F^*	T^*	T

Table 2

以上述べた基本演算から次のような性質が得られる。ただし，記号を以下に示すように定めておく。すなわち，命題記号を P，Q，R，……，述語記号を P(・)，Q(・)，R(・)，…，完全論理式を f，g，…，対称変数を x，y，z，…と表わすことにする。また，命題(述語)記号および＊演算子をもつ命題(述語)記号を X，Y，Z，…とかくことにする。

- $X \vee X = X, \quad X \wedge X = X$ （巾等律） (1)
- $X \vee (X \wedge Y) = X, \quad X \wedge (X \vee Y) = X$ （吸収律） (2)
- $X \vee Y = Y \vee X, \quad X \wedge Y = Y \wedge X$ （交換律） (3)
- $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z, \quad X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ （結合律） (4)
- $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z), \quad X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ （分配律） (5)
- $\sim\sim X = X$ （二重否定の法則） (6)
- $\sim(X \vee Y) = \sim X \wedge \sim Y, \quad \sim(X \wedge Y) = \sim X \vee \sim Y$ （de Morganの法則） (7)

◦ $X \vee \sim X = T$ （排中律） (8)

◦ $X \wedge \sim X = F$ （矛盾律） (9)

◦ $X \vee F = X,\quad X \wedge F = F,\quad X \vee T = T,\quad X \wedge T = X$ （相補律） (10)

これらは通常の2値論理における法則と全く同じである。これらの他に，ここで述べる基本演算の性質をいくつか示しておく

◦ $(P^*)^* = P^*$ (11)

◦ $\sim P^* = (\sim P)^*$ (12)

◦ $P^* = PT^* + \sim PF^*,\quad (\sim P)^* = \sim PT^* + PF^*$ (13)

◦ $(X \vee Y)^* = (X^* \vee Y^*) \wedge T^* \vee (X^* \wedge Y^* \wedge F^*)$ (14)

◦ $(X \wedge Y)^* = (X^* \wedge Y^* \vee F^*) \wedge (X^* \vee Y^* \vee T^*)$ (15)

ところで，$P_1, P_2, ---, P_m, Q_1, Q_2, ---, Q_n$ を命題変数とするとき，任意の論理式 $f(P_1, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*)$ は次のような標準形で表わすことができる。

$$\begin{aligned} f(P_1, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*) &= P_1 \wedge f(1, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*) \\ &\quad \vee \sim P_1 \wedge f(0, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*) \\ &= (P_1 \wedge P_2 \wedge --- \wedge P_m \wedge Q_1 \wedge Q_2 \wedge --- \wedge Q_n \wedge f(1, ---, 1, 1^*, ---, 1^*)) \vee \\ &\quad ------------------- \\ &\quad \vee (\sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge --- \wedge \sim P_m \wedge \sim Q_1 \wedge \sim Q_2 \wedge --- \wedge \sim Q_n \wedge f(0, ---, 0, 0^*, ---, 0^*)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(P_1, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*) &= (P_1 \vee f(0, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*)) \\ &\quad \wedge (\sim P_1 \vee f(1, P_2, ---, P_m, Q_1^*, Q_2^*, ---, Q_n^*)) \\ &= (P_1 \vee P_2 \vee --- \vee P_m \vee Q_1 \vee Q_2 \vee --- \vee Q_n \vee f(0, ---, 0, 0^*, ---, 0^*)) \wedge \\ &\quad ------------------- \\ &\quad \wedge (\sim P_1 \vee \sim P_2 \vee --- \vee \sim P_m \vee \sim Q_1 \vee \sim Q_2 \vee --- \vee \sim Q_n \vee f(1, ---, 1, 1^*, ---, 1^*)) \end{aligned}$$

前者を積の和の標準形，後者を和の積の標準形とよぶ。

3. 論理演算

前節においては，本論文で述べる論理系の基本的な性質について述べたが，本節ではこれらの基本的な性質を用いて，実際の演算を行なうにあたってのいくつかの公式を導いておくことにする。

- $P\wedge P^* = P\wedge T^*,\quad \sim P\wedge\sim P^* = \sim P\wedge T^*$ (16)

  $P\wedge\sim P^* = P\wedge F^*,\quad \sim P\wedge P^* = \sim P\wedge F^*$

  （証明） 式(13)より明らか。

- $P\vee P^* = P^*\vee F^*,\quad \sim P\vee\sim P^* = \sim P^*\vee F^*$ (17)

  $P\vee\sim P^* = P\vee T^*,\quad \sim P\vee P^* = \sim P\vee T^*$

  （証明） 式(13)より明らか。

- $(\sim P\vee P^*)\wedge(P\vee\sim P^*) = T^*,\quad \sim P\wedge P^*\vee P\wedge\sim P^* = F^*$ (18)

  （証明） 式(16)，(17)より明らか。

- $(P\wedge P^*)\vee(\sim P\wedge\sim P^*) = T^*,\quad (P\vee P^*)\wedge(\sim P\vee\sim P^*) = F^*$ (19)

  （証明） 式(16)，(17)より明らか。

- $(P\vee Q)^*\wedge(\sim P\vee\sim Q)^* = (P\wedge\sim Q\vee\sim P\wedge Q)\wedge T^*$ (20)

  $(P\vee\sim Q)^*\wedge(\sim\vee Q)^* = (P\wedge Q\vee\sim P\wedge\sim Q)\wedge T^*$

  （証明） 式(14)，(15)より明らか。

- $(P^*\wedge\sim Q^*)\vee(\sim P^*\wedge Q^*) = (P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)$ (21)

  $(P^*\wedge Q^*)\vee(\sim P^*\wedge\sim Q^*) = (P\wedge Q)\vee(\sim P\wedge\sim Q)$

  （証明） 式(14)，(15)より明らか。

- $(P^*\vee Q)^* = (P^*\vee Q^*)^* = (P\vee Q)^*$ (22)

  $(P^*\wedge Q)^* = (P^*\wedge Q^*)^* = (P\wedge Q)^*$

  （証明） 式(14)，(15)より明らか。

- $P\wedge Q\wedge(P\wedge Q)^* = P\wedge Q\wedge(P\vee Q)^* = P\wedge P^*\wedge Q\wedge Q^* = P\wedge Q\wedge T^*$ (23)

  $(P\vee Q)\vee(P\vee Q)^* = (P\vee Q)\vee(P^*\vee Q^*) = P\vee Q\vee F^*$

  （証明） 式(14)，(15)より明らか。

- $P^* = P^*\wedge(P\vee F^*) = P^*\wedge(\sim P\vee T^*) = P^*\vee P\wedge T^* = P^*\vee\sim P\wedge F^*$ (24)

  $\sim P^* = \sim P^*\vee\sim P\wedge T^* = \sim P^*\vee P\wedge F^* = \sim P^*\wedge(\sim P\vee F^*) = \sim P^*\wedge(P\vee T^*)$

  （証明） 式(18)，(19)より明らか。

° $(\sim P \wedge P^*) \to F^* = T, \qquad (\sim P^* \wedge P) \to F^* = T$ (25)

(証明) 式(17)より明らか。

4. 導出手法

以上述べてきた*演算子を含む述語計算における導出方法について考察しよう。まず始めにいくつかの定義を示しておく。

定義1　完全論理式の値が与えられた解釈Iに対してTあるいはT^*であるとき、この解釈はその完全論理式を充足するあるいは準充足するという。

定義2　完全論理式集合Sを充足するあるいは準充足するあらゆる解釈が、ある完全論理式Wをも充足あるいは準充足するならば、WはSに論理的に従属あるいは準従属しているという。

定義3　ある完全論理式集合がどのような解釈によっても充足あるいは準充足されないとき、この集合は充足不可能あるいは準充足不可能という。

定義4　ある完全論理式がTあるいはT^*の値をもつならば、この完全論理式は恒真あるいは準恒真という。

例　$P \vee \sim P, \quad P^* \vee \sim P^*$　　恒真(式)

$P \wedge P^* \vee \sim P \wedge \sim P^*$　　準恒真(式)

定義5　*演算子を含む完全論理式あるいは節から*演算子を取ったものを縮退完全論理式あるいは縮退節とよぶ。また縮退節$\bar{C}_i$からなる集合を$\bar{S}$とかき、縮退節集合という。

定義6　Fなる値をとる節を空節といい、F^*なる値をとる節を準空節という。

さて、定義2, 3より次の結果が得られる。すなわち、WがSに論理的に従属あるいは準従属するような集合$S \cup \{\sim W\}$は充足不可能あるいは準充足不可能であり、またこの逆も成立する。すなわち、集合$S \cup \{\sim W\}$がFあるいはF^*をとれば、WはSの論理的帰結あるいは準論理的帰結である。

ここで、論理的に従属あるいは準従属することを導出を用いて調べることを考えよう。論理的に従属する場合についてはRobinsonの導出原理がそのまま用いられる。したがって、以下準従属の場合について述べる。この場合の一例を次に示す。節集合S

$$S = \{P(a), \ \sim P(x) \vee Q^*(y), \ \sim Q(b)\}$$

は準充足不可能である。ここで

$P(x)$：ある日湿度が高い。　　$Q(y)$：翌日雨が降る、

a：今日、　　b：明日、　　*：---かもしれない

とすれば、「今日、湿度が高い」、「湿度が高いとその翌日雨が降るかもしれない」ということに対して、「明日雨が降る」ということを推論する場合である。

これには、オ1とオ2の節を単一化して、$P(a)$について導出すれば、$Q^*(y)$が導出形となる。したがって、$Q^*(y)$とオ3の節$\sim Q(b)$を導出させればよいことが知れる。しかし、このままでは導出できない。それ故、

$$\sim Q^*(b) \vee Q(b) \vee F^*$$

が恒真(式)であることを考慮して，これを節集合Sに加える。次に，この節と $Q^*(b)$ さらに $\sim Q(b)$ について導出を行なえば，F^* が導出形として得られる。このように，導出形がFすなわち空節にならず，準空節になる場合の意味について考察しよう。

導出形が空節になる場合には，節集合が充足不可能である場合であり，導出形が準空節になるのは準充足不可能な場合である。上の例の場合で，準充足不可能となるのは，その論理的帰結が全く正しくはなく，*演算の意味で（ここでは，正しいかもしれないの意味）正しいことになる。すなわち，「明日雨が降るかもしれない」というのに対して，「雨が降る」と断定するのは，その推論が正しいかもしれないということを示している。このことは

$$\{P(a),\ \ \sim P(x) \vee Q(y),\ \ \sim Q^*(b)\}$$

$$\{P^*(a),\ \ \sim P(x) \vee Q(y),\ \ \sim Q(b)\}$$

$$\{P(a),\ \ (\sim P(x) \vee Q(y))^*,\ \ \sim Q(b)\}$$

なる例においても全く同様に，その推論は*演算の意味で正しいことになる。ちなみに

$$\{P(a),\ \ \sim P(x) \vee Q^*(y),\ \ \sim Q^*(b)\}$$

$$\{P(a),\ \ (\sim P(x) \vee Q(y))^*,\ \ \sim Q^*(b)\}$$

なる例においては，その推論は正しい。すなわち，導出形として空節を得る。

以下，導出原理における定理を示しておく。

<u>定理 1</u>

二つの節 C_1，C_2 の導出形 C_3 は C_1 および C_2 に論理的に従属あるいは準従属している。

（証明）

$C_1 = X \vee C_1'$，$C_2 = \sim X \vee C_2'$，$C_3 = C_1' \vee C_2'$ とする。C_1 および C_2 はある解釈Iで真または準真(T^*)であるとしよう。ところで，Xが解釈Iで偽あるいは準偽(F^*)であるとすれば，C_1 は偽あるいは準偽となりうるが，C_2 は真あるいは準真である。したがって，C_3 は真あるいは準真となる。それゆえ，C_3 は C_1 および C_2 に論理的に従属あるいは準従属している。<Q.E.D.>

<u>定理 2</u>

ある節集合の縮退節集合に導出原理を適用して，最終的に空節が得られるならば，その節集合に対しては空節あるいは準空節が得られる。

（証明）

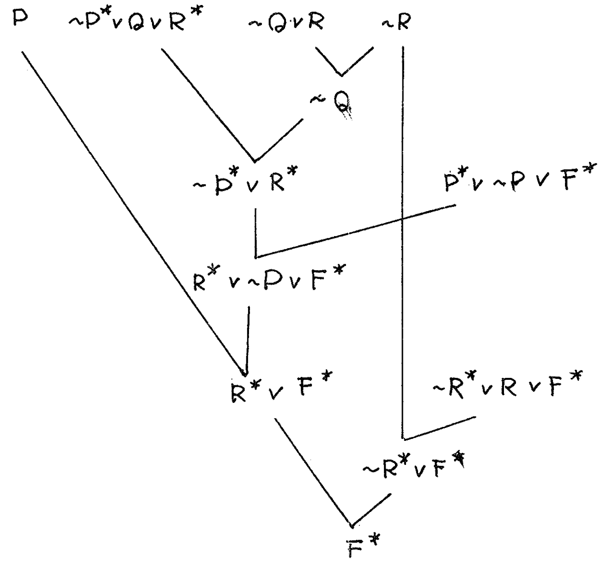
節集合Sの縮退節 $\overline{C}_1$ および $\overline{C}_2$ から導出形 $\overline{C}_3$ が得られたとする。もし，$\overline{C}_3$ が空節であれば C_3 は空節かあるいは準空節である。導出が可能なのは

$\overline{C}_1 = L \vee \overline{C}_1'$，　$\overline{C}_2 = \sim L \vee \overline{C}_2'$ なる場合であり，したがってその節は

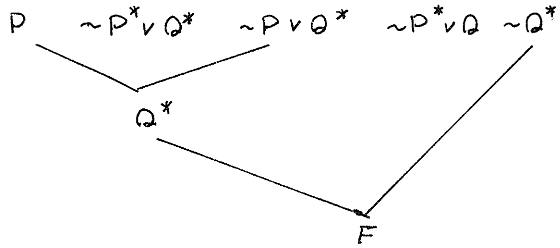
$C_1 = X \vee C_1'$，　$C_2 = \sim X \vee C_2'$ なる場合か，あるいは $C_1 = \sim P \vee C_1'$，$C_2 = P^* \vee C_2'$

なる場合である。前の場合は空節を，後の場合は準空節を導びく。 <Q.E.D.>
以下，導出の例を示しておく

(i) $S=\{P,\ \sim P^*\vee Q\vee R^*,\ \sim Q\vee R,\ \sim R\}$



(ii) $S=\{P,\ (\sim P\vee Q)^*,\ \sim Q^*\}$



5. あとがき

本論文においては，あいまい性，可能性などの様相を表わす論理系について考察し，その導出法を述べた。様相を示すには多値論理（あるいはfuzzy論理）によって表わされ得るが，一般に多値論理を取扱うのは困難である。ここで考察した論理系においては，＊演算子を導入して様相を表わし，本質的に4値となる論理系を2値論理と同様な手法で取り扱えることを示した。しかしながら，この論理系の数学的性質などについては未解決な問題が多く，今後の研究にまたざるを得ない。

終りに，本論文を書くにあたって，種々御検討戴き，また御助言を頂いた豊橋科学技術大学の北橋忠宏助教授に謝意を表する次第である。

なお，本研究は「文部省科学研究補助金一一般研究（A）（課題番号24028）」によって行なわれたものである。

参考文献

[1] Davis, M.. and Putnam, H.; "A computing procedure for quantification theory," J. ACM, vol. 7, no. 3, pp. 201-215 (1960).

[2] Robinson, J. A.: "A machine-oriented logic based on the resolution principle," J. ACM, vol. 12, no. 1, pp. 23-41 (1965).

[3] Chang, C. L. and Lee, R. C. T.: "Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving," Academic Press, New York (1973).

[4] Nilsson, N. J.: "Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence," McGraw Hill, New York (1971)

[5] Mc Arthur: "Tense Logic," D. Reide Pub. Co., Dordrecht-Holland (1976)

[6] 井関清志："記号論理学一命題論理，" 槇書店（1973）

[7] ——："記号論理学一述語論理，" 全上

[8] 吉田典可："論理数学 II，" 共立出版（1978）

[9] 杉原丈夫："時間の論理，" 早稲田大学出版（1973）