3次元自由形状モデルとその応用

木村文彦　　穂坂衛
（東大工）　　（東大宇航研）

1. まえがき

本稿は，われわれの開発した理論[1]に基ずき，人にわかりやすい形状の定義法により，複雑で特徴のある形状を生成できるようなCADのための3次元自由形状の設計手法を述べる。

機械工業における統合的なCAD/CAM（Computer-Aided Design and Manufacturing）を実現する上での幾何モデルの重要性は良く認められている[2]。現在までに，幾何モデルシステムは各種のものがつくられてきたが，[3] 未だに自由曲面を完全に取扱うことのできるものは存在していないと思われる。これは次のような理由による。自由形状表現を計算機を用いて扱うことは60年代から始まり，多くの研究がなされてきた。穂坂[4]やCoons[5]のパッチ曲面の概念，Bézier[6]の制御点の概念，Riesenfeld[7]のB-splineなどが代表的な理論であるが，総合的な設計手法がなかったため，現実に必要となる多様な特徴ある自由形状には適用できず，多くの未解決の問題が指摘されていた[8]。そのことが，自由形状を幾何モデルの要素として組込むことを困難にしていた。

近年になって，設計生産の合理化の要求が強くなり，各方面でCAD/CAMシステムの開発が進められつつあるが，中でも自由形状の取扱いは機械工業の多くの分野から要望される問題となってきた。この要求に答えるためには，自由形状設計全般に適用できる一貫した手法を確立し，幾何モデルシステムに組込む必要がある。そのためにわれわれは必要な理論の開発を行った[1]が，本稿ではその理論に基ずいた自由形状設計の手法を具体的に述べ，自由形状モデル生成システムの概要を示す。

第2節では，後節の便宜のため，基礎理論を要約しておく。第3節で自由形状設計手法をまとめて述べ，第4節に実際に作成されたシステムの概要を示す。

2. 自由形状設計制御理論

自由形状理論の概要を述べるが，詳しくは別論文[1,4,9]を参照されたい。この理論の特徴は次のようにまとめられる。

(1) 直観的に理解しやすい条件だけから形状表現式を導き，式が簡潔であり，問題の取扱いが容易になったこと。

(2) 接線，曲率，捩率，接触平面などの幾何学的特性量を直観的に理解しやすい形で表現し，制御の対象ともなしうるようにしたこと。

(3) 形状を，大域的にも，局所的にも，生成し，制御できる方式を示したこと。

(4) 特徴ある形状を表現するため，捩れの大きい曲面や，不等辺の4辺形や非4辺形曲面分に対する手法を用意していること。

(5) 形状の一部分を表現するだけでなく，対象全体を記述し，幾何モデルの要素となしうること。

2·1 制御点列と形状方程式

空間の $n+1$ 点 $\{P_0, \cdots P_n\}$ (以後 $\{P_i\}_0^n$ とかく) を制御点とする曲線を $R_0(t:n)$ とかき，次数 n, あるいはオーダ $n+1$ という。形状が制御点によりスムーズに変化するようにし，さらに制御点が凸体を形成する時，曲線はその内側に存在するという条件をつける。パラメータ t の変域を $[0, 1]$ とし，$P_{i+1}=EP_i$ なるシフト演算子Eを導入して，$R_0(t:n)$ を次のように定義すると所要の条件を満足する。

$$R_0(t:n) = (1-t+tE)\cdot R_0(t:n-1) = (1-t+tE)^n\cdot P_0 . \qquad (1)$$

$(1-t+tE)$ は隣り合う2点を結ぶ直線分を $t:1-t$ に内分する点を生成する演算子である。上式からわかるように，次数が上るにつれて新しい制御点が取込まれて，制御点の影響が平均化され，次第に変動が少くなっていく。(1)式を展開して，影響関数 $f_i(t)$ を用いて表わせば(2)式のようになる。

$$R_0(t:n) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\cdot P_i , \qquad f_i(t) = {}_nC_i\cdot t^i\cdot(1-t)^{n-i} . \qquad (2)$$

全く同様の手法で，制御格子点 $\{P_{ij}\}_{0,0}^{m,n}$ により4辺形曲面分 S_{00} が次のように定義される。

$$S_{00}(u,v:m,n) = (1-u+uE)^m\cdot(1-v+vF)^n\cdot P_{00} , \qquad P_{i+1,j}=EP_{ij} , \quad P_{i,j+1}=F\cdot P_{ij} . \qquad (3)$$

このような曲線，曲面の表現形式をH形式という。以下，式の添字，パラメータ，オーダなどは自明の時は省略する。

2·2 幾何学的特徴量と制御点

$R_0(t:n)$ の j 階微係数は次式で与えられる。

$$\frac{(n-j)!}{n!}\cdot\frac{d^j R_0}{dt^j} = (1-t+tE)^{n-j}\cdot(E-1)^j\cdot P_0 . \qquad (4)$$

逆に制御点 P_i は i 階までの微係数で決定される。

$$P_i = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{i} {}_iC_j\cdot(n-j)!\cdot\frac{d^j R_0(0:n)}{dt^j} . \qquad (5)$$

次に幾何学的特徴量と制御点との関係を論ずる。$a_i = P_i - P_{i-1}$ とかくと，$t=0$ において，単位接線ベクトルは $\mathbf{t} = a_1/|a_1|$, 従法線は $\mathbf{b} = (a_1\times a_2)/|a_1\times a_2|$, 主法線は $\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t}$ であり，曲率は $(n-1/n)\cdot(\mathbf{n}\cdot a_2)/a_1^2$, 捩率は $(n-2/n)\cdot(\mathbf{b}\cdot a_3)/\{|a_1|\cdot(\mathbf{n}\cdot a_2)\}$ で表わされる。これらの量は図式にも求められる。

曲面については，$a_{i0}=P_{i0}-P_{i-1,0}$, $b_{0j}=P_{0j}-P_{0,j-1}$ とかくと，a_{10}, b_{01} で規定される面は接平面であり，その法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。a_{10} と b_{01} のなす角度を θ とし，a_{10}, $\mathbf{n}\cdot a_{20}$ で作る曲率を $1/\rho_1$, b_{01}, $\mathbf{n}\cdot b_{02}$ で作る曲率を $1/\rho_2$, P_{11} と接平面との距離を δ として $1/\rho_{12} = \delta/(|a_{10}|\cdot|b_{01}|)$ とおけば，曲面のガウス曲率K，平均曲率H は次のようになる。

$$K = \left(\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_{12}^2}\right)\cdot \mathrm{cosec}^2\theta , \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - 2\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{\rho_{12}}\right)\cdot\mathrm{cosec}^2\theta \qquad (6)$$

2·3 形状の分割とオーダの変更

制御点を増加させるには，形状を分割するか，オーダを増加させればよい。曲線 $R_0(t)$ を $t=t_0$ で分割すると，それぞれの曲線の制御点は次のようになる。

$$P_i^{\mathrm{I}} = (1-t_0+t_0E)^i P_0, \quad P_i^{\mathrm{II}} = \{t_0 + (1-t_0)E^{-1}\}^{n-i} P_n. \tag{7}$$

これを図式に解釈すると図1のようになる。

また，n 次の曲線を見かけ上 $n+1$ 次で表わせば，新しい制御点 $\{P_i^{(n+1)}\}_0^{n+1}$ は次のようになる。

$$P_i^{(n+1)} = \phi_i(n)\cdot P_i, \quad \phi_i(n) = 1-\frac{i}{n+1}+\frac{i}{n+1}E^{-1} \tag{8}$$

図式には図2のように解釈される。同様に次数を $n+j$ 次とした場合は，次のように表わされる。

$$P_i^{(n+j)} = \left\{\prod_{k=n}^{n+j-1}\phi_i(k)\right\}\cdot P_i. \tag{9}$$

順次，次数を上げていけば，制御点は曲線に限りなく近ずいていくことがわかる。

曲面についても，(7)～(9)と同様の関係を導くことができる。

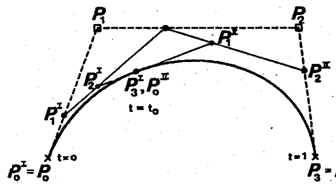


図1. 曲線の分割.

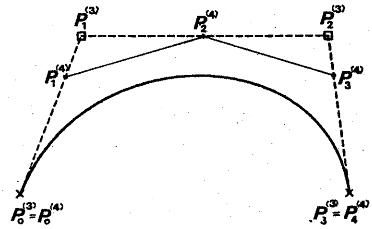


図2. 曲線の次数変更.

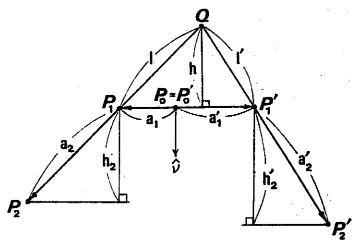


図3. 曲線の接続.

2.4 曲線の接続

図3の P_0 において曲率まで連続として曲線の接続を考えると，次の関係が成立する必要がある。

$$\frac{\hat\nu\cdot a_2}{a_1^2} = \frac{\hat\nu\cdot a_2'}{a_1'^2}. \tag{10}$$

また，接触平面の連続性より，a_2 と a_2' の延長は交わるのでその交点を Q とする。

$$k=\frac{|a_1|}{|a_1'|}, \quad k^*=\frac{|a_2|}{|l|}, \quad k^{**}=\frac{|l'|}{|a_2'|}. \tag{11}$$

とすれば，曲率連続の条件は次のようになる。

$$k=\sqrt{k^*\cdot k^{**}} \tag{12}$$

以下では3次曲線の接続を考える。記述の便宜上，図4のように記法を変更する。すると曲率連続条件は次のように表わされる。

$$b_i + (k_i+k_i^*)\cdot(1+k_i)\cdot b_{i+1} + k_i\cdot c_{i+1} = a_i + k_i^2\cdot a_{i+1} \tag{13}$$

特に $k_i=k_i^*$ とすれば，従来から用いてきた式になる。Q_i は曲線の新しい制御点と考えることができる。k_i^* を未知数と考えると従来より自由度が多くなり，接続点位置，接線，曲率や，制御の影響範囲などを指定して，曲線の局所的，大域的制御が可能となる。k_i は Q_i のつくる多角形と P_i のつくる多角形の関係を支配しており，a_i の大きさが極端に異る所でも k_i の大きさを1にとることは不自然である。通常は $k_i=(|a_i|/|a_{i+1}|)^{\omega}$，$0<\omega\le 1$ などとすれば良い。

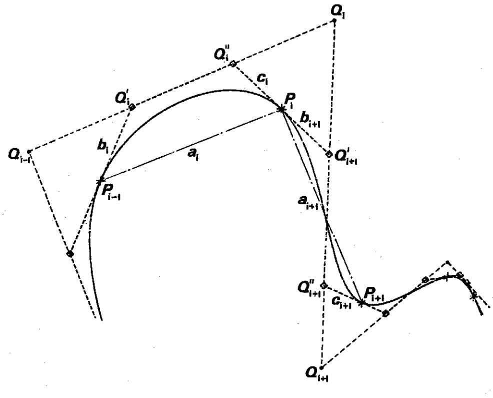


図4. 曲線の接続.

2·5 曲面の接続

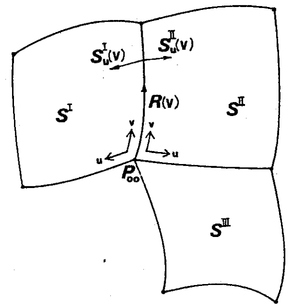


図5. 曲面の接続.

曲線の制御点列 $\{Q_i\}$ を別のパラメータによって移動させれば曲面が生成される。Q_i の動きは $\{Q_{ij}\}_{j=0}^{n}$ という点列で規定でき，$\{Q_{ij}\}$ を曲面に対する制御点列と考えることができる。すると曲面セグメントの連続性は自動的に保証されるが，境界線の条件などは直接には指定できなくなる。

曲面の境界線が与えられて面を作る場合には，境界線上で接平面が連続であるようにする。そのために，図5において，S^{I} と S^{II} の境界線上で，λ, μ, ν をスカラ関数として次式が成立する必要がある。

$$\lambda(v)\cdot S_u^{I}(v) + \mu(v)\cdot S_u^{II}(v) = \nu(v)\cdot \dot{R}(v). \qquad (14)$$

上式で，λ, μ, ν は与えられた境界線に応じて適切に決め，上式の各項を同一のH形式とすることにより，S^{I} と S^{II} の制御点が満すべき関係が定まる。曲面の各方向の接続について全て上式のような関係を満すように制御点を決めれば良い。接続点における捩れ量が未知の場合には，境界線の接線ベクトルを2·4の方法で内挿して曲面の S_{uv} に相当する量を算出すれば，うねりのない面が得られる。

境界線で囲まれた各曲面分の大きさがあまり大きく変化しないような場合には，各接続点で，u方向及びv方向境界線について，各々v方向，u方向に沿っての k_i の値を一定にできる。このような場合には，(14)式を用いて容易に接続条件を導くことができる。各面分が大きくひずんでいる場合には k_i を一定値にすることが難しく，接続条件の導出も困難となる。一方法として，3×3次の曲面分の中に，図6に示すように5×5次の曲面分を対角状に配置し，λ, ν を v の2次，3次式とおいて，必要な接続条件を算出することができる。これで決定される制御点は5×5次面の周辺近くの点であり，内側の4点は任意となるが，面が滑らかになるように適切に決めれば良い。このようにして生成された面の例を図7に示す。従来の手法では，このような場合には境界線の引き直しが必要であった。

上述の手法で4辺形セグメントを結合して，各種の非4辺形パッチを合成することができる。

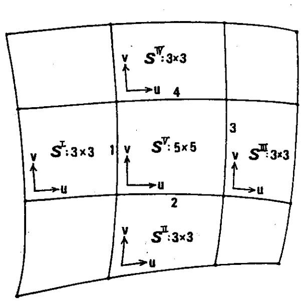
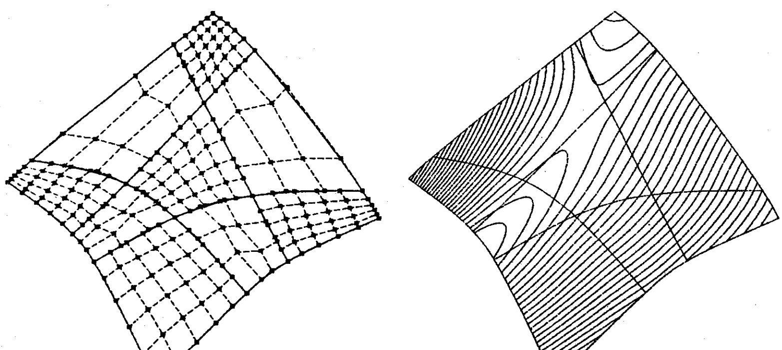


図6. 3次面と5次面の接続.



(a) 制御点　　(b) 等高線

図7. 曲面の接続例.

3. 自由形状設計手法

自由形状入力の元になるものは，図面であることもあるし，3次元の実体モデルを測定したデータであることもある。あるいは，概略のイメージだけ存在して，計算機とのインタラクションにより新たに形状を創造していく場合もある。いずれにせよ，最初に入力されるものは，形状を良く特徴ずける点列や，その点位置での傾き，曲率，その他の特徴量である。これらを総称して以後「点列」と呼ぶことにする。それらを元にして，前節の理論により，滑らかな曲線や曲面を生成し，希望の形状へ制御していく。点列は以上のように外部から入力されるだけでなく，内部の処理の結果として算出されることもある。例えば，面同士の交線を求めて，その線に沿ってフィレット処理を行うとか，既存の面の類似面を生成するなどである。このように，形状設計の試行錯誤の過程においては，形状制御と共に，点や線や面を組合せて，新たに交わりとか軌跡とかにより新しい要素を作り出す機能が重要になる。我々は各種の図面や製品形状などで調査し，重要と思われる機能をまとめてみた。それらの形状生成・制御機能は前節の理論により定式化され，実現された。

3.1 曲線の設計

アルゴリズムは省略して，曲線設計に用いられる曲線生成・制御機能の主なものを挙げてみる。

(i) 曲線の生成，表現の変更.
- ○ 点列を与えて曲線を生成する。
- ○ 曲線を分割したり，次数を上げて制御点を増加させる。
- ○ オフセット曲線を生成する。
- ○ 後の処理のために，曲線の接続点をとり直す。
- ○ 曲面上の曲線を抽出する。（周辺線，交線など）

(ii) 曲線の局所的制御.
- ○ 接続点の移動による局所的制御.
- ○ 傾きや曲率変化による制御.
- ○ 制御点 Q_i による制御.

(iii) 曲線の大域的制御.
- ○ 与えられた曲線に類似の曲線を生成する。（通過点や傾き指定）
- ○ 制御点 Q_i による大域的制御.
- ○ 一つの曲線から他の曲線に滑らかに乗り移る曲線を生成する.

必要な条件式は前節の理論を元に，容易に導くことができる。これらの多様な生成・制御機能を用意することにより，従来より質の良い曲線が少い手間で設計できるようになった.

3.2 曲面の設計

曲面についても，曲線と同様な生成・制御機能がある。更に通常のRuled面以外に，指定された空間曲線を含む曲面を生成することも必要となる。面の境界線が任意に与えられた場合には 2.5 に述べたように5次面とする場合もある。

3.3 複合形状の創成

3.2で生成した面を組合せて、面の交線を算出し、任意の周辺形状を持つ曲面分を生成することができる。それらの曲面を集めて、必要ならフィレット処理やコーナの丸み付などを行って完全な形状を構成した時、これを複合形状という。現実に存在する物は、ほとんど複合形状であり、単純な曲面分だけでは表わせない。従来の曲面システムは複合形状を扱えなかったため、形状定義が難しかった。

我々は、任意の曲面の組合せに対して交線を算出する手法を確立し、また、任意形状のフィレットやコーナ丸み付をインタラクティブに生成できる手法を実現した。これらの手法を用いて複合形状を自由に創成できるようなモジュールを作成中である。図8，図9に交線やフィレット生成の一例を示す。

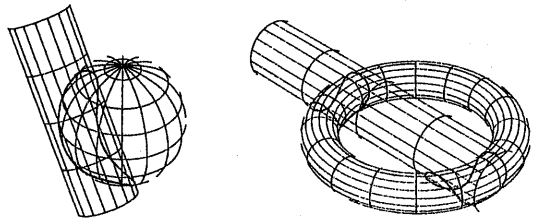


図8　曲面の交線

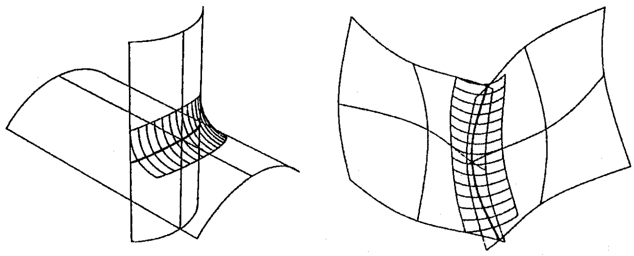


図9　フィレットの生成

4. 自由形状モデル生成処理システム

4.1 システム構成と概要

前節までの各機能を具体化して、自由形状生成処理システムは図10のような構成になる。曲線，曲面モジュールが主要なモジュールで3節に述べた各設計手法に対応する。入力は人が直接相う他に、データファイルから測定データを読み取ることもある。必要なら，弾性網・バネモデルによる平滑化[9]を施すこともできる。表示や移動のモジュールは，設計手法を支援するもので，等高線形式で曲面を表示したり，線図を出力したり，平行移動，回転，鏡映などの操作を行い，曲線，曲面を適当な位置に配置する。結果として自由形状モデルが作成され，ファイル化され，又

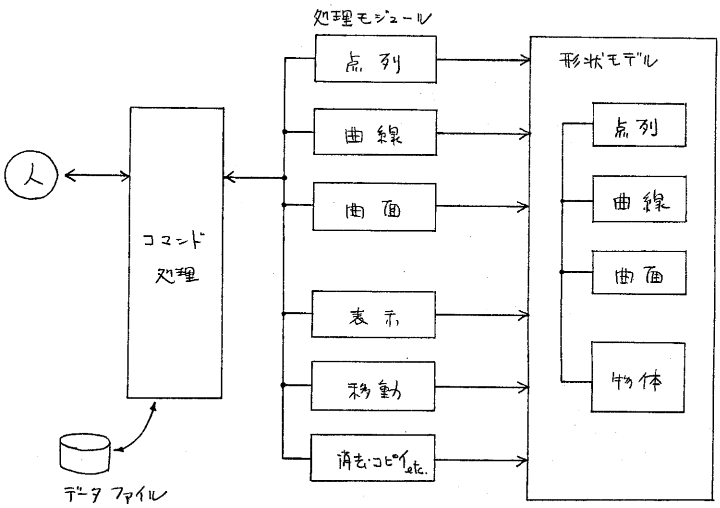


図10　自由形状モデル生成処理システム

読み出して，形状制御，変更の作業を続けることができる。

特殊な出力法として，3次元形状の直接出力法がある。これは，システムと直結されたNC工作機械により，柔かい発泡ウレタンを材料として，CRTに表示するのと同じような手軽さで，実際の3次元形状を削り出してしまおうというものである。同じ機材を用いて製品自身を加工することもできるが，その場合には加工時間が長くかかる。一例を図11に示す。この程度のものは10分程で作成できる。将来はより高速のハードウェアを用い，切削法も工夫して，計算機端末のように手軽に扱うことのできる3次元モデル作成機を開発する予定である。

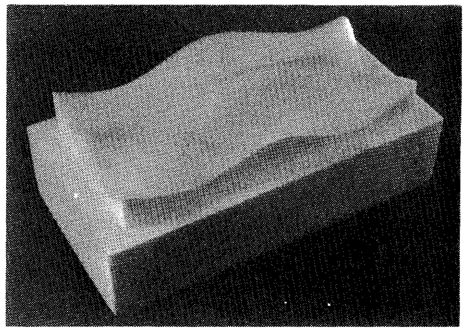


図11. 3次元実体モデル

曲面のみを対象とする場合や，比較的単純なものを扱う時は，自由形状モデルのみ用いられるが，一般には，自由形状モデルは幾何モデルの一部として使用される。複雑な部品や意匠製品のCADにおける形状創成のみでなく，ロボット制御，対象識別など生産工程の制御情報生成にも必須のものである。ロボット制御の一例を図12に示す。

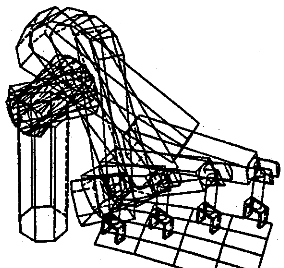


図12. ロボットの曲面倣い動作

4・2 内部モデル表現法

自由形状モデルは図13に示すような表形式のデータ構造で表現されている。点，線，面は各々名前を付けられて，各々の名前表に登録される。これが幾何学的な形状を表わすデータであるが，線や面の間の関係については何も表わしていない。線や面の間のトポロジカルな関係は別に設けられた物名表と面群／線群表及び関係表により規定される。物名表には物の名前が登録され，面群／線群表にはその物に属す面や線の名前が入れられる。関係表には面間の関係を表わす情報や，交線などの情報が含まれている。これらの構造により3・3の複合形状が表現されている。幾何モデルの一部として用いられる時には，これらのデータ全てに名前をつけ，それが幾何モデルの要素として取込まれる。

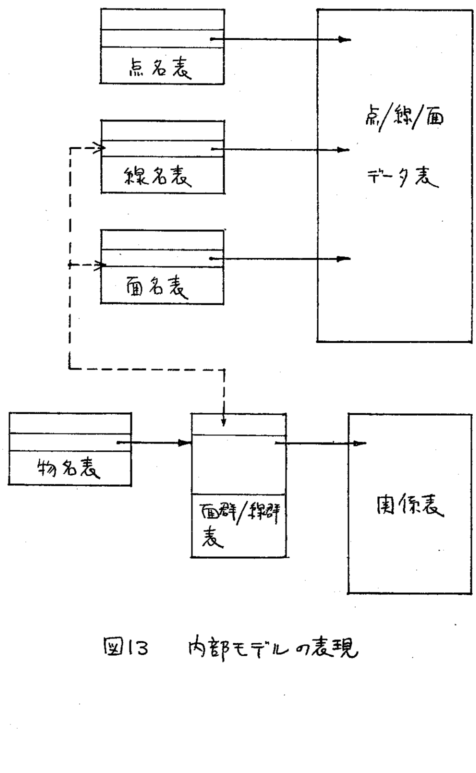


図13 内部モデルの表現

5. むすび

複合形状を含む自由形状を扱う手法はほぼ確立した。今後は幾何モデルとして完全な処理ができるようにシステムの拡充を行う予定である。自由形状を含むgeometric simulatorができれば，CAD/CAMのみでなく，情報処理や制御その他各方面に広い応用があると考えられるので，形状データベースの完成を急ぐとともに，応用についても検討を進めるつもりである。

謝辞

本設計手法の実現に当り，研究室の諸氏，特に長島忍氏，高橋典夫氏，千代倉弘明氏の助力を得た。厚く感謝する次第である。また開発計画を支援された関係各位に感謝する。

文献

(1) 穂坂，木村：3次元自由形状設計制御理論とその手法，情報処理，vol.21, no.5, pp. 481-492 (1980).

(2) Forrest, R.A. : Computational Geometry — Achievements and Problems, in Computer Aided Geometric Design, Academic Press, pp. 17-44 (1974).

(3) Spur, G. et.al. : A Survey about Geometric Modelling System, Annals of the CIRP, vol.28, no.2, pp. 1-20 (1979).

(4) 穂坂：曲線，曲面の合成および平滑化理論，情報処理，vol.10, no.3, pp. 121-131, (1969).

(5) Coons, S.A. : Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms, MIT Project MAC TR-41 (1967).

(6) Bézier, P.E. : Numerical Control - Mathematics and Applications, Jhon Wiley and Sons, London (1972).

(7) Riesenfeld, R.F. : Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, Univ. of Utah, UTEC-CSc-73-126 (1973).

(8) Forrest, R.A : Recent Trends in Computer-Aided Geometric Design, Proc. Conf. Interactive Techniques in Computer Aided Design, pp. 141-146, 78 CH 1289-8C, IEEE, New York (1978).

(9) Hosaka, M : Theory of Curve and Surface Synthesis and their Smooth Fitting, Information Processing in Japan, vol.9, pp. 60-68 (1969).