

簡単な数学文章題を解くシステム

高木 朗† 伊東幸宏†† 太田善之†† 上祐史浩†† 小原啓義††

† 關CSK総合研究所

†† 早稲田大学理工学部

1. はじめに

本稿では、中学程度の単純な数学応用問題を解くシステムについて述べる。

数学応用問題を解くプロセスは、問題文を理解し、データを整理した上で、そこから変量間の関係を抽出することによってこれを解く、というステップに分けられるが、その過程には、通常の問題解決プロセスや自然言語理解における本質的な問題が含まれている。従って、従来も比較的数多く研究対象として選ばれており、様々な研究が行なわれている。

本稿では問題文を読み取って整理した上で、その結果を定式化するという、いわば数学的世界における問題文の理解という問題に関して若干の検討を行なったので、これを報告する。

2. 基本的な考え方

前述の様に、数学の問題を解くというプロセスは大別して

- ① 問題文を理解し、問題文によって設定された小世界のモデル化を行なう。
- ② そのモデルから問題解決に関係する変量間の関係を抽出し、定式化する。
- ③ 式を解いて解答を得る。

という、3つのプロセスに分けて考えることが出来る。以下で、それぞれのプロセスについて本システムの考え方を述べる。

2.1 問題文の整理

①は「要するに、何を言っているのか」ということの整理であり、一般の文理解と共通したプロセスである。特に、数学の場合には、問題文中に散在しているデータを整理し、事実間の関係をまとめるという手続きが重要である。

通常、例えば食塩水の問題に限っても、問題文の構成や文の構文構造は多様であり一定ではない。そこで「要するに、どの様な問題が与えられたのか」の認識を得る為には、問題文中に散在しているデータを一定の形式に整理する必要がある。我々が数学の問題を解く場合には、問題の見通しを良くする為に、図やグラフの形にデータを整理する、という形でこの操作を行なう。

こうしたデータや事象の整理を行なう為には、どのデータ、事実がまとまって、1つの概念、事象を記述するかの認識が必要であり、その為には、それぞれの名詞、動詞がどの様な意味をもち、それに係る語句がその意味の中にどう位置付けられるかが判別出来なければならない。

名詞の場合、例えば「1%の食塩水100g」、「濃度が1%で、重さが100gの食塩水」という様に表現は多様であっても、我々人間はいずれも同一の意味をもつと判断する事が出来る。これを可能にする為には、(a) まず、それぞれの表層表現が解釈されて同一の意味表現に変換されること、及び(b) その意味表現を読み取って「食塩水」という概念の構造と、それぞれの連体修飾語との関係を識別出来ること、すなわち「1%の」、「濃度が1%の」という記述が濃度を指定するものであり、食塩水概念は実際に濃度という属性をもっており、従ってこれらのデータはその属性値を指定しているものである、という判断がつくことが必要となる。

動詞に関しても、全く同様に各々の格に係る名詞句や副詞節によって与えられるデータが、動詞概念のどこに位置付けられるかの認識が必要である。

この為、本システムでは、問題文が解釈されて、まず同義文に対して安定な意味表現に

変換される。この意味表現は、本システムで取り扱う範囲の中学の数学応用問題中に含まれる大部分の同義表現に対して、同一の意味構造を与える能力をもつ（例えば文献[4]）。解釈によって意味表現が得られると、それをたどり、まず各名詞句に関するデータが名詞フレームにまとめられる。次いで動詞句のデータ（即ち各名詞フレーム）が動詞フレームにまとめられる。これにより、問題文の構成や文構造における変動、ばらつきが吸収される。

2.2 変数間の関係の抽出、定式化

②は、いわば実世界モデルを数学的変数の世界に投影する手続きである。前述の問題文のまとめあげは、文の意味理解に大きく関わっているプロセスであるが、単に問題文を整理しただけでは問題を解くことは出来ない。本システムでは、問題文は表層の単語に対応する名詞フレーム、動詞フレームにまとめられるが、それらの単語の意味が数学的変数とどう結びついているかわからないと、整理したデータを問題解決に利用することはできない。一般に、数学的変数（以下、変数）は、問題文中の名詞句内で定義される場合と、動詞句によって定義される場合とがある。名詞句内で定義される例としては、「縦が横より8cm長い長方形」などがあり、本システムでは、図1の様な形で名詞フレーム内に、直接変数間の関係式が記入される。従って、この場合には、データ整理によって直ちに変数間の関係が抽出されることになり、定式化が可

(長方形 n (カテゴリ 図形)
 ((所有する属性)
 (縦 a)
 (横 b)
 (面積 c))
 ((変数関係)
 ($a \times b = c$)
 ((概念間関係)
 ((CUT-OFF ((from 長方形
 (object 正方形))))
 →
 (BECREATED ((material 展開図))))))

図1 長方形フレーム

能である。

一方、動詞句内で変数間の関係が定義される場合には、データ整理によって得られた動詞フレーム中に直接変数間の関係が記述されることはない。

例えば、「食塩水1と食塩水2を混ぜる」という動詞句は、本システムでは図2の様にまとめられるが、これだけでは問題解決には役立たない。

((MIX ((material 食塩水1)
 (material 食塩水2)))
 →
 (BECREATED ((material 食塩水3))))

図2 MIXフレーム

この場合には、「溶液と溶液を混ぜると、新しく溶液が出来る」とか、「水と塩を混ぜると食塩水が出来る」といった知識、及び混ぜ合わせる物質の成分の重さと生成される物質の重さや濃度との関係に関する知識が、「混ぜる」の意味として与えられており、データ整理の結果がこうした知識にあてはめられなければならない。これによって、初めて定式化が可能になる。

同様に、「Aさんが、10時に家を出て、毎分120mの速さで町へ向かった。」という場合も (START(A, 家, 10時))、(MOVE(A, 家, 町, 120m/分)) などの形でデータを整理しただけでは、そこから変数間の関係を得ることは出来ない。「10時に家を出る」ということは、「家」が「10時」以降の主体の移動によって引き起こされる距離の算出起点であり、移動時間の算出起点が「10時」である、という認識が必要である。又、「町に向かって毎分120mの速さで向かう」ということについても、目的地が「町」であること、即ち「町」と主体との間の距離が毎分120mの割合で減少すること、及び前文と合わせて出発地が「家」であり「家」と主体の間の距離が0から毎分120mの割合で増加することなどの認識が必要である。従って、こうした動詞においては、その意味が変数間の関係に帰着出来る形で記述されていなければならない。

本稿で扱う問題の範囲内では動詞は
 (i) 既に定義されている概念を操作することによって、新しい概念が生成されることを意味し、それらの概念の属性間の関係を指定するもの。

「混ぜる」「切り取る」「加える」
 「2倍する」「割る」など。

(ii) 物質の属性や事象の空間関係等の変化を表わすもの。

「増加する」「出発する」
 「追いつく」など。

に大別される。「縦は横より3倍長い」「縦は横の長さの3倍ある」などの表現は、意味表現上では「もっている」というprimitive動詞による記述に変換される。この「もっている」は後述する様に動詞フレームを作らない。又、「縦の長さは3cmである」は意味表現上で「等しい」という述語によって表わされ、これも動詞フレームを作らない。

本システムでは、(i)のタイプの動詞の意味は図3の様に表わされる。

即ち、変数用の関係が名詞フレーム中に直接記述される(尚、例えば「直方体展開図を折り曲げると、直方体が出来る」という様な知識は「直方体展開図」「折り曲げる」「直方体」のいずれに連合していてもよいものである。従って、本システムでは(i)のタイプの動詞の意味は、動詞もしくは動詞に格を介

して係る名詞のいずれかの辞書中に記憶されていれば良い様になっている。又、「→」の後にくる動詞フレーム中の名詞フレームも代名詞による前方照応の対象となる)。これに対して(ii)のタイプの動詞の意味は、名詞概念の属性を言及するものではなく、図3の形では意味を記述出来ない。そこで、このタイプの動詞の意味が変数間の同等関係や変化をベースに構成されていることから、これをprimitiveとして意味を記述することを試みている。

(例)

```
(START (A, 家, 10時))
  =(EQUAL (LOCATION1, 家))
    &(INCREASE(DISTANCE1, t, r))
LOCATION1 : 名詞フレーム、
          Aの10時における位置
DISTANCE1 : 名詞フレーム、Aの時刻
            tにおける位置と家との
            距離
          r : 変化の割合
(MOVE(A, 家, 町, 120 m/分))
  =(INCREASE(DISTANCE1, t, 120m/分))
    &(EQUAL(DISTANCE2, 0))
          :
          :
DISTANCE2 : 名詞フレーム、
            LOCATION1 と家との間の
            距離
```

(MIX(溶液1フレーム、溶液2フレーム)) → (BECREATED(溶液3フレーム))

(例) データ整理によって得られた動詞フレーム
 (MIX(塩1, 水1))

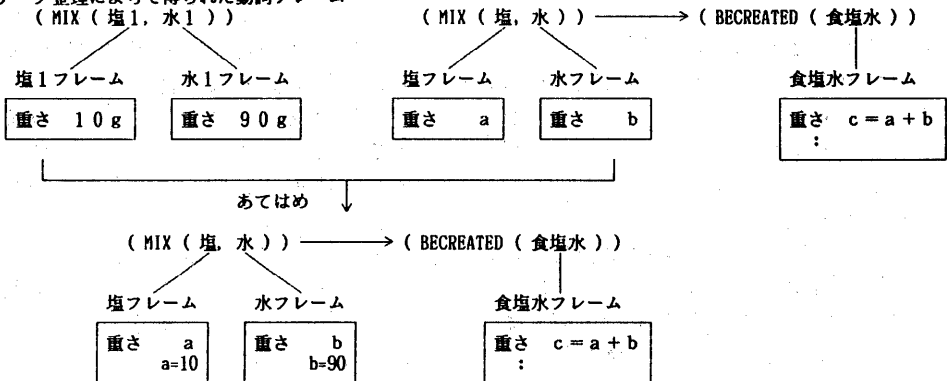


図3 (i)のタイプの動詞の意味

$$(INCREASE(X(t), t, r)) \& (EQUAL(X(t_0), L)) \\ = (EQUAL(X(t), r \cdot (t - t_0) + L))$$

X(t) : 時刻をパラメータとして
もつ任意の名詞フレーム

r : 変化の割合

t₀ : 特定の時刻

L : 時刻t₀におけるX(t)の値

(実際のインプリメントは若干、この表現法と異なる。)

この様にこのタイプの動詞は、次第に、よりprimitiveなレベルに分解され、最終的に変数間の同等関係に帰着される。このレベルになって初めて定式化が可能になる。

2.3 求解

③のプロセスは式の運用や求解の手続きに関する知識の運用等興味深いテーマを含むが、本稿では①②に重点を置き、③は単純に手続きの形で実現している。

3. システムの構成

本システムの構成を図4に示す。

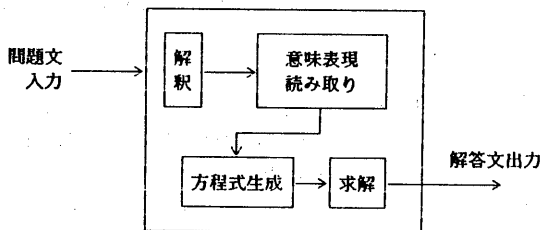


図4 システムの構成

問題文が入力されると、解釈され、意味表現に変換される。次いで意味表現読み取りルーチンにより問題文中のデータが読み取られ、フレームの形式に整理される。これに基づいて方程式が生成され、求解ルーチンにより、解が求められて出力される。

本システムで取り扱う数学の問題は、旺文社刊「高校受験シリーズ進学教室中学数学」中の整数、体積、面積、食塩水(溶液)濃度、距離に関する1次方程式及び2次方程式の問題から選定した。

4. 各部の動作

4.1 文解釈

問題文が入力されると解釈され、各文毎に単語間の係り受けを表わす木構造に変換される。(図5に一例を示す。)

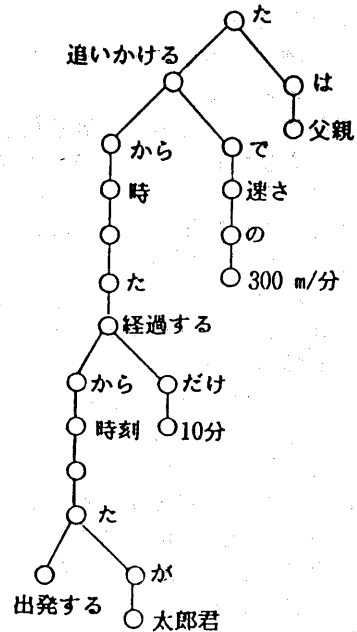


図5 解釈結果

各単語には意味表現が連合しており、必要に応じて Primitive レベルの意味表現が生成される(図6)。

このレベルで、同義文の間のSyntaxの差異が吸収され、同一の意味表現に帰着される。

4.2 意味表現の読み取りとデータの整理

ここでは、図5の形で与えられる文解釈結果を一文毎に読み取り、問題文中に与えられている情報をフレームの形で整理する。

読み取りは、解釈結果の木のトップノード(主動詞)から読み始め、適宜図6の形のプリミティブレベルの意味表現に展開しながら、枝毎に動詞、名詞、動詞・・・という順に読み進んで行く。

処理は動詞処理と名詞処理に大別される。

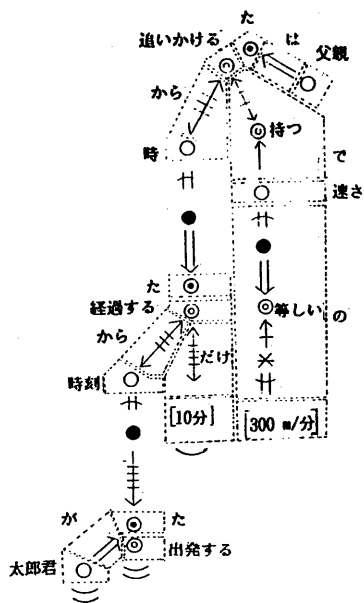


図6 意味表現の例

4.2.1 名詞処理

これは、各名詞句の意味表現を読み取って、その結果をフレームに整理する処理である。

各名詞には

- ①それがどの様なカテゴリーに属するか、又、
- ②属性間にどの様な関係が在るのか(例えばタテ×ヨコ=面積)、及び、
- ③その名詞と他の概念との間に、どの様な関係があるか(例えば「長方形の4隅から正方形を切り取ると展開図が出来る。」等)。

ということが、図1のフレームの形で記憶されている。

属性毎に変数が予め定義されており、属性間の関係は変数で記述される。又、③は、図3の形式で記述される。

意味表現中の名詞に着目し、その名詞処理が起動されると、その名詞に連合しているフレームが検索される。次いで、そこに記述されている属性に関して、なんらかの限定が行なわれているかを見るために、意味表現上で着目している名詞に係っている形容詞、関係

節等の枝を辿り、特定の値が指定されていれば、それをフレームの中の該当する属性に値として書き込む。「縦が横より8cm 長い～」の様な関係が指定されていれば、これを属性毎に定義されている変数間の関係式として書き込む。「Aさんが町に到着する時刻」の様な、時刻及び場所を限定する関係節の場合は、その関係節内の動詞について後述する動詞処理(4.2.2)を行ない、関係節内の情報を動詞フレームの中にとどめる。次いで、このフレームと同じ動作主体と動詞名をもつフレームを他の文の整理結果中から探し、その時刻又は場所を読み取る。対応するフレームが前文の整理結果中になかった場合には、関係節の処理で得られたフレームに対して後述の動詞フレームの分解処理(4.3)を行ない、その結果を用いて、同様な処理を繰り返す。

「これ」、「それ」等の代名詞は、それより前に位置する最後の名詞(前文もみる)を指示していると判断している。「この～」、「それ～」等連体詞の場合には、～に位置する名詞と同じカテゴリーの名詞のうち、前方最後尾にあるものを選択する。

4.2.2 動詞処理

ここでは動詞句の情報を整理してフレームの形にまとめる。各動詞には、格を介して係り得る名詞のカテゴリーのリストから成るフレームが連合している。意味表現中の動詞に着目して動詞処理が起動されると、どの様な格が付いているかをチェックし、格とその先の名詞句とのカテゴリーの整合性をチェックした後、連合している動詞フレームに名詞処理の結果を代入しまとめる。

その際、例えば図3の例では、「溶液を混ぜる」ことについての知識を表わしているが、その溶液が実際には食塩水であることが判明した段階で、「溶液」フレームから「食塩水」フレームに置き換えられ、変数間の関係式も食塩水フレーム中の変数間の式に置き換えられる。

尚、属性を内包する意味の「もっている」、「ひとしい」、「ある」、「いる」は、動詞フレームを持たない。「ある」、「いる」は概念の定義を表わし、主格の名詞句処理結果

がそのまま文全体の処理結果となる。属性を内包する意味の「もっている」は、主格概念が目的格概念を内包することを定義し、従って、目的格概念についての名詞句処理結果が、主格名詞句の処理結果として得られる名詞フレームの該当する属性スロットに代入され、それが文全体の処理結果となる。「ひとしい」は、主格概念である属性が「に」格に存在する値を持つことを意味し、属性を限定している実体概念中の該当するスロットにその値が代入される。

4. 2. 3 動詞処理と名詞処理の共同動作

動詞処理と名詞処理は交互に起動し合いながら意味表現を読み進み、文全体のデータを整理する。意味表現の各部分でまとめられた名詞フレーム及び動詞フレームが結果として得られる。

まず意味表現のTOP に位置する主動詞の処理が起動され、これに関する情報をフレームにまとめようとする。そのために、各格の先の名詞句のデータを得ようとして名詞処理を起動する。名詞句の処理中にその名詞に係る限定情報を名詞フレームにまとめようとして、限定情報中に含まれる動詞について動詞処理を起動する。このように、意味表現の枝を末端に向かって読み進むにつれ名詞処理と動詞処理が交互に起動される。末端の名詞について名詞処理が行なわれると、その結果が上の動詞処理に返され、動詞フレームにまとめられる。その結果がさらに上位の名詞処理に返される。このように意味表現の動詞毎に、そのまわりの名詞句の情報を動詞フレームにまとめつつ最終的に文全体の情報が主動詞のフレームに集計される。

尚、文中に、「いくら」「何」など、求めるべき値を指定する語があれば、名詞もしくは動詞フレーム中の該当するスロットの変数に“?”を代入する。それ以外の点については、疑問文の処理は平叙文の処理と同様である。以上の処理が問題文中の各文に対して行なわれ、問題文全体のデータをまとめた名詞及び動詞フレームのリストが得られる。

4. 3 変数間の関係の抽出、定式化

2で述べた様に、ここまでの段階で、名詞

句中で定義された属性間の関係は、既に該当する変数を用いて定式化されている。そこで、動詞フレーム中のデータを、変数間の関係にbreak downする処理を行なう。各動詞フレームは、4. 2の処理により問題文の順に、リスト化されている。

(1) 名詞概念中の属性間の関係を指定するタイプの動詞(2. 2(i))の場合

①動詞フレームに連合している辞書もしくは、動詞フレーム中の名詞フレームの内部を検索し、図3のタイプの意味フレームを取り出す(スロットのカテゴリによって、複数の意味フレームが用意されていることがあるが、その場合は、着目している動詞フレームのスロットのカテゴリに合うものを選ぶ)。

②動詞フレームの内容を、これにあてはめる。

③これにより、変数間関係が式の形で、意味フレーム中に生成される。以上の処理を全ての動詞フレームについて行なう。

(2) 変数間の同等関係や変化を指定するタイプの動詞(2. 2(ii))の場合

①動詞フレームに連合している意味フレームを検索する。

②動詞フレーム中の内容を意味フレームにあてはめる。

③意味フレームが概念や変数間の同等関係を記述するもの((EQUAL(...)))の形をもつであれば、それ以上意味が分解されることはないので、そこで終わる。

④それ以外の関係を記述するもの(例えば(INCREASE(...))等)であれば、①からの処理を繰り返す。その過程で、意味を分解していく為に何らかの付帯条件が満足されなければならない場合(例えば2.2のINCREASEの例)、及び、前文までの動詞フレームの内容を参考にしなければならない場合(例えば、時刻を限定する関係節の処理(4.2.1)中に行なう動詞フレームの前方照応)とがある。その際、直接、前文までの動詞フレーム又は意味フレームを引用できないことがある。その場合には、直接引用できる形に動詞フレ

ーム又は意味フレームを交換する為の知識 (例えば、

```
(EQUAL(LOCATION1, 家))
=(EQUAL(DISTANCE2,0))
```

LOCATION1:名詞フレーム,
Aの10時における位置。

DISTANCE2:名詞フレーム, Aと家と
の間の10時における距離。

の様な知識)を利用して、あてはめを行なう。

以上の処理を全ての動詞フレームについて行なう。これにより、全動詞フレームが概念、もしくは変数間の同等関係に帰着される。変数間の同等関係を表わすフレームからは、直ちに方程式が得られる。概念間の同等関係の場合(例えば上の例の場合、(EQUAL(LOCATION1, 家))。これは、位置と位置の同等関係を表わし、このフレームが最後まで残ってしまった場合には、ここから直接問題解決に有用な式を得ることは出来ない)には、これを変数間の同等関係に置き換える為の知識(例えば上の (EQUAL(LOCATION1, 家)) = (EQUAL(DISTANCE2,0))。ここで、DISTANCE2 には、例えば2.2 の例の increase等の他の知識中で変数に帰着で出来ることが動詞もしくは意味フレームのあてはめの過程で判明する。)を利用して変数間の関係に置き換え、そこから方程式を得る。

4.4 求解

以上の処理により、問題文中に含まれる変数間の関係に関する方程式が得られる。これらの式中で、求めるべき変数には“?”が代入されており、求められた方程式は、その変数に関する一つの式にまとめられる。これにより、最終的に、“?”の代入された変数に関する1次又は2次の方程式が得られるので、これを解いて解を求める。以上の処理は知識にはよらず、手続き的に行なわれる。

5. 処理例

以下に処理例を示す。

```
**** input sentence ****
(tate ga yoko yori 8_cm naga_i chouhoukei ga a_ru)
**** result of parsing ****
(a_ru ga chouhoukei
  < = @catm00010 tate ga naga_i (
    ( dake 8_cm )
    ( yori yoko ) ) )

**** input sentence ****
(kono 4_sumi kara 1_hen ga 6_cm no seihoukei o
 kirito_ru)
**** result of parsing ****
(kirito_ru (
  ( o seihoukei
    < = @catm00010 1_hen ga dea_ru 6_cm )
    ( kara 4_sumi kono ) ) )

**** input sentence ****
(kore o orima_ge te youseki ga 768_cm3 no
 chokuhoutai o tsuku_ru)
**** result of parsing ****
(tsuku_ru (
  ( o chokuhoutai
    < = @catm00010 taiseki ga dea_ru 768_cm3 )
    ( te orima_ge ru o kore ) ) )

**** input sentence ****
(kono chouhoukei no tate no nagasa o moto_me yo)
**** result of parsing ****
(moto_meru (
  ( o nagasa no tate no chouhoukei kono )
  ( yo ) ) )

**** noun-frames after reading questions ****
((rectangle 1 (category figure)
  ((attribute)
    (vertical a)
    (horizontal b)
    (area c))
  (relation)
  (a = b + 8)
  (a * b = c)
  (a = ?)))
(square 1 (category figure)
  ((attribute)
    (side d)
    (area e))
  (relation)
  (d * d = e)
  (d = 6)))
(unfolded-figure 1 (category figure)
  ((attribute)
    (vertical f)
    (horizontal h)
    (height i)
    (volume j))
  (relation)
  (f = a - 2 * d)
  (g = b - 2 * d)
  (i = d)
  (f * h * i = j)
  (j = 768)))
(rectangular 1 (category figure)
  ((attribute)
    (vertical f)
    (horizontal h)
    (height i)
    (volume j))
  (relation)
  (f = a - 2 * d)
  (g = b - 2 * d)
  (i = d)
  (f * h * i = j)
  (j = 768)))

**** verb-frames after reading questions ****
(((cut-off ((from rectangle1) (object square1)))
->
  (becreated ((material unfolded-figure1)))
  ((fold ((unfolded-figure1)))
->
  (becreated ((material rectangular1))))))
```

図7 処理例

```

**** derived equations ****
((a = b + 8)
 (a * b = c)
 (a = ?)
 (d * d = e)
 (d = 6)
 (f = a - 2 * d)
 (g = b - 2 * d)
 (i = d)
 (f * h * i = j)
 (j = 768)
 (f = a - 2 * d)
 (g = b - 2 * d)
 (i = d)
 (f * h * i = j)
 (j = 768))

**** final equation ****
(a * a - 32 * a + 112 = 0)

**** answer ****
((kotaewa 28 desu))

```

図8 処理例(続き)

6. まとめ

本システムでは、問題文の数学的理解という点に重点を置き、名詞及び動詞の意味を参照しながら、変数間の関係を抽出するプロセスのモデル化を試みた。しかしながら動詞の意味の記述方法が2で述べたように二つの手法に分かれ、統一的な取り扱いを実現することができなかった。今後、この点について検討を加えて行きたい。

参考文献

- (1) 桜井・志村：“算術問題解答システム”，情報学会 知識工学と人工知能研究会，34-3(1984)
- (2) 山本・中川：“日本語の算数文章題の理解・解決システム”，情報学会，「自然言語処理技術」シンポジウム(1984)
- (3) D.G.Bobrow：“Natural Language Input for a Computer Problem-Solving System”，in M.Minsky(ed.)” Semantic Information Processing ”，MIT Press(1968).
- (4) 高木・小原：“属性形容詞の意味構造 — 意味表現方法の一つの試み — ”信学論(D)，J65-D,11,(1982)