知識工学と人工知能 47－4
（1986. 7. 11）

縮約規則のない論理に基づく定理証明法の理論的考察

井上　伸二・小野　寛晰
（広島大学総合科学部）

古典論理は決定不能であるが、古典論理から縮約規則を除いて得られる論理ＬＫ°に対しては決定手続きが存在することが知られている。 Grišinは古典論理とＬＫ°の間の関係を示すために、各論理式Ａに対し論理式$A^{(m)}$を定義し、Ａが古典論理で証明可能となるための必要十分条件は、あるｍについて$A^{(m)}$がＬＫ°で証明可能となることであるという結果を得た。 本研究では、これらの結果に基づいて古典論理に対する新しい定理証明法を提案し、さらに証明可能性の複雑さを測る一つの基準を導入し、それらの理論的考察を行なった。

THEOREM PROVING BASED ON THE LOGIC WITHOUT THE CONTRACTION RULE

Shinji INOUE and Hiroakira ONO
Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University
1-1-89 Higashisenda-machi, Naka-ku, Hiroshima, 730, Japan

While the classical logic is undecidable, the classical logic LK° without the contraction rule is decidable. It is shown by Grišin that a formula A is provable in the classical logic if and only if $A^{(m)}$ is provable in LK° for some m, where $A^{(m)}$ is defined effectively by A for each m. These facts lead us to a new method of theorem proving. In this paper, we will study the method and also introduce a criterion of complexity of the provability.

１． 序

通常の古典論理から縮約規則をとり除いて得られる論理LK°に対しては、決定手続きが存在することはWang［12］（p. 228）やGrišin［４］等により示されている。本報告では、まずLK°に関するGrišinの結果を紹介し、つぎにLK°の決定手続きを利用して得られる古典論理に対する新しい定理証明法について述べ、その理論的考察を行なう。実用化に関する幾多の問題点は今後の課題として残されている。

古典（述語）論理が決定不能であることは、1936年にChurchにより証明された。それに対し、1960年代の始めから古典論理の定理証明に対する能率のよい部分的アルゴリズムの研究が行なわれるようになった。1965年のJ.A. Robinson による resolution principleは、計算機による定理証明の実現への突破口となった（例えば［１］）。

他方、これとは別に、古典論理の決定可能な部分クラスの研究も古くから行なわれ、現在までに多くの結果が得られている。それらのうちの多くは、冠頭標準形（ prenex normal form ）の量化記号（ quantifier ）の並び方により定められる論理式の部分クラスの決定問題を論じたものである（［２］）。これらの研究はそれ自身としては興味深いものであるが、定理証明の立場から眺めると、量化記号の並び方に条件を課するのは必ずしも自然なものとはいえず、またこれらの決定手続きとresolution principleとがうまく適合するともいい難い。

さて、古典論理を証明論的な立場から研究する際には、Gentzen により導入された形式体系ＬＫを用いるのがもっとも都合がよい（［３］）。いま、このＬＫから縮約規則（ contraction rule ）とよばれる推論規則を除いて得られる体系をLK°と表わすことにしよう。すると、この形式体系LK°においても基本定理（ cut elimination theorem ）が成立し、さらにそのことからLK°が決定可能となることが導かれる。２節ではこれらの結果について解説する。

縮約規則は、一見単純な規則でありながら、数学を展開する際には重要な役割を果たしている。例えば、縮約規則なしではラッセルの逆理を導くことはできない。事実、LK°上の集合論の無矛盾性が証明できるのである（［５］）。また、縮約規則のない論理は多値論理や relevant logic などの非古典論理を統一的に扱うための基礎体系となり得ることも明らかになりつつある（［７］、［９］）。

ところでGrišinは、ＬＫとLK°との関係を示す一つの定理を証明した。この結果とLK°の決定手続きとを組み合わせることにより、従来の方法とは異なった古典論理に対する部分的なアルゴリズムを得ることができる。この結果については、３節でふれることにしよう。３節ではさらに、あたえられた論理式Ａに対する証明の複雑さを示す一つの尺度を導入し、その証明論的な意味を明らかにする。

本報告の内容と関連を持つ結果としては、 Ketonen - Weyhrauch［６］をあげることができる。［６］では、計算機により数学を扱う場合の「現実的な」論理

として、古典論理の部分体系（"direct predicate calculus"）が導入されている。この論理は我々の体系LK°とほぼ同じものになっている。しかしながら、［6］ではその体系と古典論理との関係については何も明らかにされていない。

本研究を行なうに際し、さまざまな助言をいただいた Jagiello 大学の A. Wroński 氏及び静岡大学の古森雄一氏に感謝の意を表したい。

2.　縮約規則のない論理LK°とその決定手続き

Gentzen は古典論理に対する一つの形式体系として、ＬＫを導入した。ＬＫでは<u>sequent</u> とよばれるつぎの形の表現

$A_1, \ldots, A_m \longrightarrow B_1, \ldots, B_n$　（ただし、$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ は論理式）

が取り扱われる。上のsequent は論理式　$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$　と同じ内容を表わしている。ＬＫの公理は　$A \longrightarrow A$　の形のsequent のみからなり、それと構造に関する推論規則、及び各論理記号 ── すなわち、$\neg$、$\supset$、$\wedge$、$\vee$、$\forall$、$\exists$ ── に関する推論規則からなっている。（詳細については、例えば［10］を参照されたい。） sequent　$\longrightarrow A$　がＬＫで証明可能のとき、論理式ＡはＬＫで証明可能であるということにする。

定理　２．１　［ＬＫの基本的性質］

1）（完全性－Gödel）　論理式ＡがＬＫで証明可能なとき、またそのときのみＡは恒真（valid)である。

2）（決定不能性－Church）　与えられたsequent がＬＫで証明可能か否かを判定するアルゴリズムは存在しない。

3）（ＬＫの基本定理－Gentzen）　与えられたsequent がＬＫで証明可能ならば、それはcut とよばれるつぎの推論規則

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, A \qquad A, \Sigma \longrightarrow \Pi}{\Gamma, \Sigma \longrightarrow \Delta, \Pi}$$

を一度も用いずに証明可能である。

ここでＬＫから<u>縮約規則</u>とよばれるつぎの推論規則を取り除いて得られる体系を考えてみよう。

$$\frac{A, A, \Gamma \longrightarrow \Delta}{A, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \longrightarrow \Delta, A}$$

ＬＫと違い、この論理では式の左側のコンマ、右側のコンマはそれぞれ$\wedge$と$\vee$とは異なった意味を持つ。そこで、この論理におけるコンマを表現するために、新たに二つの論理記号＆と＋を導入し、さらにそれらに対し以下のような推論規則を仮定する。

$$\frac{A, B, \Gamma \longrightarrow \Delta}{A \,\&\, B, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, A \quad \Sigma \longrightarrow \Pi, B}{\Gamma, \Sigma \longrightarrow \Delta, \Pi, A \,\&\, B}$$

$$\frac{A, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad B, \Sigma \longrightarrow \Pi}{A + B, \Gamma, \Sigma \longrightarrow \Delta, \Pi} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \longrightarrow \Delta, A + B}$$

このようにして得られた体系をＬK°とよぶことにする。

定理　２．２　（ＬK°の基本定理－Grišin）　与えられたsequent がＬK°で証明可能ならば、それはcut を一度も用いずにＬK°で証明可能である。

この結果を用いて、我々はＬK°に対する一つの決定手続きを与えることができる。ここで述べる方法はtableau methodとよばれている（定理証明におけるWangのアルゴリズムも同じアイデアに基づいている［11］）。ここでは、そのアウトラインを述べるにとどめる（詳しくは、例えば［７］を見よ）。

まず、sequent の有限列 $\{S_1;S_2;...;S_k\}$ を配列（configuration)とよぶ。いまＲをcut 以外のＬK°の推論規則としたとき、Ｒを配列 $\{S_1;S_2;...;S_m\}$ に適用して $\{S'_1;S'_2;...;S'_n\}$が得られるとは、あるS_iにＲを「逆に適用して」得られるsequent をT_1（及びT_2）とすると、列$S_1,...,S_{i-1},T_1,(T_2,)S_{i+1},...S_m$がちょうど列$S'_1,S'_2,...,S'_n$ に一致することとする。

与えられたsequent Ｓに対し、配列｛Ｓ｝から始め、すでに得られた配列に対しては上のように推論規則を「逆に」適用して新しい配列を作っていく ── こうして得られる配列の列のことをtableau という ── ことにする。このようにして最後に公理の形をしたsequent のみからなる配列が得られたとき、Ｓのtableau は閉じているということにしよう。ところで、ＬK°の ∀右、∃左という二つの推論規則については、これらを逆に適用したときには新しい変数が導入されることになる。ところがＬK°の場合には、これらの推論規則により導入される新しい変数の範囲を、sequent Ｓから定まるある有限集合に限定することができるのである。（それに対し、ＬＫではこのように限定することはできない。）従って、｛Ｓ｝から始まるようなtableau の数は有限個であることがわかる。これらのtableau のうち一つでも閉じているものがあれば、ＳはＬK°で証明可能であり、そうでなければ証明可能でないことになる。以上のことからつぎの結果が得られる。

定理　２．３　ＬK°は決定可能である。

３．　Grišinの定理と、古典論理に対する定理証明法

つぎにＬK°での証明可能性とＬＫでの証明可能性との関係を調べてみよう。ま

ずＬＫの任意の論理式Ａ及び任意の正整数mに対し、LK°の論理式$A^{(+m)}$および$A^{(-m)}$を以下のように帰納的に定義する。

1） $A^{(+n)} = A^{(-n)} = A$　　Ａがatomicのとき,

2） $(\neg A)^{(+n)} = \neg(A^{(-n)})$, $(\neg A)^{(-n)} = \neg(A^{(+n)})$,

3） $(A \supset B)^{(+n)} = A^{(-n)} \supset B^{(+n)}$,
$(A \supset B)^{(-n)} = \neg(A^{(+n)}) \vee B^{(-n)}$,

4） $(A \wedge B)^{(+n)} = A^{(+n)} \wedge B^{(+n)}$,
$(A \wedge B)^{(-n)} = A^{(-n)} \,\&\, B^{(-n)}$,

5） $(A \vee B)^{(+n)} = A^{(+n)} + B^{(+n)}$,
$(A \vee B)^{(-n)} = A^{(-n)} \vee B^{(-n)}$,

6） $(\forall x A)^{(+n)} = \forall x(A^{(+n)})$,
$(\forall x A)^{(-n)} = (\forall x A^{(-n)})^{n}$,

7） $(\exists x A)^{(+n)} = n(\exists x A^{(+n)})$,
$(\exists x A)^{(-n)} = \exists x(A^{(-n)})$,

ただし、ｍＢ及びB^{m}はそれぞれＢをm個＋及び＆で結んで得られる論理式とする。以下では$A^{(+m)}$を単に$A^{(m)}$と表わすことにする。

つぎの結果がGrišinによって示されている。

定理　３．１　ＬＫの任意の論理式Ａに対し、ＡがＬＫで証明可能なとき、またそのときに限りあるmに対して$A^{(m)}$がLK°で証明可能である。

定理２．３の決定手続きと定理３．１とから一つの定理証明法を得ることができる。すなわち、論理式$A^{(1)}$、$A^{(2)}$、・・・をつぎつぎに生成し、決定手続きに従ってそれらが証明可能か否かをチェックする。証明可能なものが見つかれば終了し、そうでなければ以上の手続きを繰り返せばよい。

それでは$A^{(m)}$のmは一体どのような意味を持っているのだろうか。まず、つぎのことを注意しておこう。

「$A^{(m)}$がLK°で証明可能であり、$m < n$ならば、$A^{(n)}$もLK°で証明可能である」

さて、ＬＫの任意の論理式Ａに対し#(A)を

$$
\#(A) = \begin{cases} m & A^{(n)}\text{が}LK^{\circ}\text{で証明可能であるような}n\text{のうち最小の数が}m\text{であるとき} \\ \infty & \text{どの}n\text{に対しても、}A^{(n)}\text{は}LK^{\circ}\text{で証明可能でないとき} \end{cases}
$$

により定める。（もちろん、定理２．１の２）より、関数#はrecursive ではあり得ない。）#(A)を、論理式Ａの「証明の複雑さ」（complexity of provability)とよぶことにしよう。

#(A)の持つ証明論的性質を分析するために、古典論理に対するもう一つの形式体系ＣＬＣを用いることにする。この体系は1950年代の末から日本で研究が始まった、計算機による定理証明の際に導入されたものである　（例えば［８］を見よ）。ＣＬＣでは論理式の有限列のことをsequent という。sequent $A_1, A_2, \ldots, A_m$において、あるｉとｊに対し　$A_i = \neg A_j$　であれば、このsequent はＣＬＣの公理であるといわれる。ＣＬＣには構造に関する推論規則はなく、論理記号に関する推論規則のみからなる（［８］を参照のこと）。ＣＬＣの推論規則とＬＫの

推論規則の間の対応をみるために、$\wedge$ と $\forall$ に関する推論規則を例としてあげておく。

$$\frac{\Gamma,\ A,\ \Delta \qquad \Gamma,\ B,\ \Delta}{\Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta}\ \wedge \qquad \frac{\Gamma,\ \neg A,\ \neg B,\ \Delta}{\Gamma,\ \neg(A \wedge B),\ \Delta}\ \neg\wedge$$

$$\frac{\Gamma,\ A(a),\ \Delta}{\Gamma,\ \forall x A(x),\ \Delta}\ \forall \qquad \frac{\Theta,\ \neg A(b),\ \Gamma,\ \neg\forall x A(X)}{\Theta,\ \neg\forall x A(x),\ \Gamma}\ \neg\forall$$

ただし、aは下のsequent に含まれないような自由変数、bは任意の自由変数とする。

ＣＬＣの（$\neg\forall$），（$\exists$）はそれぞれＬＫの（$\forall$左）、（$\exists$右）に対応している。いまＣＬＣにおける論理式Ａに対する一つの証明Ｐにおいて（$\neg\forall$），（$\exists$）が最大何重に適用されたかの回数を$q(A;P)$と表わすことにする。さらに、$q(A)$を

$$q(A) = \min\{\, q(A;P)\ ;\ P\text{はAに到る証明}\,\}$$

により定義する。するとつぎの結果が得られる。

定理　３．２　$\#(A) \leqq q(A) + 1$

このことから、$\#(A) = m$ ならば、Ａのどんな証明をとっても少なくともｍ－１重の（$\neg\forall$）と（$\exists$）の適用が必要になることがわかる。

４．　従来の方法との比較、及び今後の課題

この報告では、一つの定理証明法を提案しその理論的考察を行なったが、まだプログラム作成までには至っていない。ここで従来の方法との比較を行ない、また今後解決すべきいくつかの問題点をあげておこう。

まず我々の方法の利点をあげると、我々の方法は決定可能な手続きの繰り返しからなるという点にある。従って、与えられたkに対して $\#(A) \leqq k$ か否かの判定が（原理的には）可能であり、またたとえ $\#(A) > k$ であっても、そのことからＡの証明の難しさについての情報を得ることができる。

つぎに我々の方法では与えられた論理式をSkolemの標準形に変換しておく必要がない。また、一般的にはunification は変数の間のみで行えば十分である。逆に我々の方法では、各ｍについて$A^{(m)}$を求めるという変換は必要になる。

今後なすべきことは、まず能率のよい決定手続きを求め、それを用いてプログラムを作成することである。これについては、ＣＬＣに対してこれまで得られてきた研究成果が参考になるだろう。

ところで、定理２．３は関数記号を含まないような言語に対してのみ証明されている。もちろん、関数記号は述語記号で置き換えることができるから、この制

限は本質的でないともいえる。しかし、実用上は関数記号が自由に使える方がよい。それでは、定理２．３を関数記号を含む場合にまで拡張することができないだろうか（ｃｆ．［６］）。これはまず検討しておかなければならない問題である。この他、Grišinの結果をHerbrandの定理との関係で調べてみるというのも理論的に興味ある問題であろう。

いずれにせよ、この報告では一つの可能性を提起したにすぎない。これらの問題点の解決には今後の研究を待たなければならない。

参　考　文　献

[1] C.L. Chang and R.C.T. Lee, Symbolic logic and mechanical theorem proving, Academic Press, 1973.

[2] B. Dreben and W.D. Goldfarb, The decision problem, Solvable classes of quantificational formulas, Addison-Wesley Publ. Co., 1979.

[3] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Z. 39 (1934/35), 176-210, 405-431.

[4] V.N. Grišin, A nonstandard logic and its application to set theory (in Russian), Studies in formalized languages and nonclassical logics, "Nauka" (1974), 135-171.

[5] V.N. Grišin, Predicate and set-theoretical calculi based on logic without contractions, Math. USSR Izvestija 18 (1982), 41-59.

[6] J. Ketonen and R. Weyhrauch, A decidable fragment of predicate calculus, Theoretical Computer Science 32 (1984), 297-307.

[7] Y. Komori, Predicate logics without the structure rules, (to appear).

[8] 西村敏男、定理の証明、情報処理　24 (1983), 267-276.　（なお「数学セミナー」1985年12月号にも、 System 5 による「論理体系ＣＬＣ」という解説記事がある。）

[9] H. Ono and Y. Komori, Logics without the contraction rule, J. of Symbolic Logic 50 (1985), 169-201.

[10] G. Takeuti, Proof theory, North-Holland Publ. Co., 1975.

[11] H. Wang, Toward mechnical mathematics, IBM J. Res. Develop. 4 (1960), 2-22.

[12] H. Wang, A survey of mathematical logic, North-Holland Publ. Co., 1963.