知識工学と人工知能 56－12
（１９８８．１．１３）

補助線問題における学習

*諏訪　正樹　・　**元田　浩

*　東京大学工学部原子力工学科
**（株）日立製作所　基礎研究所

問題解決理論の中でも未解決部分の多い初等幾何学の補助線問題は、学習理論分野に興味深い論点を提示する。本報告では、１）ある状況要素に対応する図形パターンの想起が補助線生成のための基本メカニズムであること、２）これは一種の部分的戦略であり、問題の構造全体をそのまま記憶する学習よりも、むしろ問題を分割して記憶する学習機能が必要であること、を示す。一般に、人間は扱う問題が複雑であればある程、全体の構造ではなくそこに含まれる部分的なエッセンスを学習するようになるので、２）は補助線問題に限らず一般的な問題において生じる要請である。このような学習によって初めて大局的理解、類似性認識などの知的な推論が可能になる。

LEARNING ABOUT AUXILIARY-LINE PROBLEM IN GEOMETRY

*Masaki SUWA and **Hiroshi MOTODA

* Department of Nuclear Engineering, The University of Tokyo,
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113, Japan
** Advanced Research Laboratory, Hitachi,Ltd.
Kokubunji, Tokyo, 185, Japan

An auxiliary-line problem is the one which students can't solve without producing a new point by some auxiliary-lines. We haven't got plausible explanations about how they produce it and how they learn the way of producing it.

We propose the following two assertions. First, the association of figure patterns appropriate to situations in a problem is a basic mechanism for drawing auxiliary-lines and a figure pattern is a kind of partial strategy. Second, it is more important in auxiliary-line problems to learn several essential strategies from them than to learn their whole structure entirely, such as explanation-based learning.

The second assertion is true to general problems as well as auxiliary-line problems, because human beings tend to learn partial essence in the problem rather than the entire structure when they are faced with complicated problems. It is due to this kind of learning that they can execute intelligent inferences, such as comprehensive understanding or similarity recognition.

1.　緒言

初等幾何学に於ける補助線問題とは、問題文中に与えられている幾何的対象（点、線の位置関係及び性質）以外に、生徒が何等かの作図によって新たな点を創り出さなければ解くことのできない問題を指す。図１に典型的な補助線問題を２例示す。然るべき幾何教育を受けた人間は、初めて遭遇した補助線問題に於て目のさめるような補助線を引いて証明することが出来る。その思考過程は”発想”とか”ひらめき”という捉え所のないものに思えるが、実際には、過去の経験により蓄積された「何らかの基準」に基づいて処理されている過程である。「何か同じ様な問題を見たことがあるなあ！あの時は確かこういう風に引いたっけ．．」という類似性認識から補助線を生成することもあれば、また、「こんな所に線を引いても証明が展開しそうもないしなあ．．．」という様に様々な状況要素との兼ね合いから（大局的理解に基づいて）補助線を決定することもある。この基準がいかなるものでいかにして体得しているのかを探求することが、人間が有する類似性認識・大局的理解の底に潜む原則を知る助けになるのではないか、との動機から補助線問題に於ける学習を例題として取り挙げた。

さて、人間は何故学習できるのだろうか？　それは、人間が、学習を司る”基本的原則”を先験的にもしくは学習して持っているからである。学習するにも知識もしくは原則が必要なのである（”無”からは何も学習できない）。ここで、学習理論を構築するとは、即ち、この基本原則を探ることである。現在学習研究分野を賑わしているExplanation-based learning[3-5,8]におけるマクロオペレータ、チャンキングという概念は、ある事柄に習熟した人が示す条件反射的行動に対応するものであり、１つの歴然たる学習理論とみなして良い。また、generalization[3-5,8-10],discrimination[10,11]という概念は、様々な経験の比較により知識の適用範囲を広げたり狭めたりするという知識体系の整理プロセスに対応する学習理論である。

本研究の目的は、これらの学習理論によって補助線問題を説明できるか、もし完全に説明できないとすればどの様な新たな概念が必要なのか、を探ることである。本報はその第１段階として、計算機が人間と同じ様に知的に補助線問題を解けるようになるためには何を学習すればよいのかを明確にしたい。

2.　補助線問題の位置付けと本報の構成

補助線を必要としない問題は、問題空間における解の探索問題に帰着することにより計算機上で簡単に解決できる。ここで、探索とは、現在の問題の状態（幾何的対象に関して成り立つ性質、関係）をオペレータ群（幾何学における定理）によって順次変換し目標状態へ近づけることをいう。簡単な理由は、この種の問題では、初期状態から目標状態に至るあらゆる過程で少なくとも１つ以上適用できるオペレータが存在する（これを探索過程が連続であると呼ぶ）ので、網羅的な探索を行いさえすれば必ず目標状態にたどり着けるからである。しかし、補助線問題になると話は違う。それは以下の理由による。

1)探索過程が連続ではない。つまり、途中過程でオペレータが適用できなくなる状態が現れる。ここに至って、まさに補助線が必要になる。

2)補助線生成は一種の問題状態変換であるが、その変換の仕方は、オペレータの様な恒真的原則として与えられる類のものではない。「こういう要素がある時にはこういう補助線を引いてうまく行くことが多い」という風に、過去に似たような問題を解いた数々の経験の中から培われる類のものである。

ここに補助線問題の難しさがあり、計算機がそれを解きこなすには学習機能を持つ必要性が求められる。

ここで、以下の項目の探求を研究の具体的目的に据える。

Ａ：経験的な変換基準とは如何なるものか?

Ｂ：Ａを如何にして学習すればよいか?

の２点である。

本報の大部分はＡに関する考察により占められる。まず、従来の研究の枠組みの上で補助線問題を捉える（３章）ことによりＡに対する仮説を立て、その仮説に基づく補助線生成機構（４章）をもつ証明シミュレータを作成する（５章）。そして、証明シミュレータの動作結果（６章）から仮説の妥当性を検証し、更に、学習への展望について考察する（７章）。

3.　補助線問題に関連した学習研究

波田野・山村は、経験事象としてのBase問題と現在解こうとしているTarget問題がある対応付けΨのもとに同一視できるときに、Base問題の証明構造をΨによって変換してTarget問題の証明を得るという一種の類推による問題解決システムを開発した[1-2]。Ψの決め方によって様々な類推が存在するが、この研究では、Target問題の証明の正当性を保証するために、Ψにある制約を課し類推の範囲を限定している。この類推システムは、補助線問題に限らず一般的な幾何問題を過去の経験を生かして効率的に解くことを目指したものだが、Base問題として補助線問題を選び補助線の引き方まで分かっている証明構造をΨによって変換すれば、Target問題の補助線の引き方及び証明構造が一度に導かれると主張している。

この研究をExplanation-based learning研究[3-5,8]と比較するとBase問題からTarget問題へのmappingの方式にこそ違いが見られるが（Base問題を複数のTarget問題に適用可能とするために、前者はB-T 間の正当的対応付けの範囲を設定しているのに対し、後者はBase問題の構成要素間の関係のみが保存されるような一般化を行っている）、Base問題全体をそっくり利用しているという点では同じである。しかし、Base問題が複雑な構造をしている場合（補助線問題はそういう場合が多い）Base問題全体をそっくりそのまま記憶していても有用性は少なく、むしろそこに含まれる局所的・部分的戦略を記憶する方がより有効である。なぜなら、一般に前者の場合、問題全体のmapping という大きな制約のため適用範囲が極めて狭くなるのに対し、後者は、全く異なる問題であっても証明の途中過程に含まれるコンセプトが同じであれば適用可能であり、より人間らしい解き方といえるからである。問題状態の不連続面をいかにして連結させるかという補助線問題解法におけるエッセンスは部分的戦略であって、Base問題からこのエッセンスのみ抽出する学習こそが必要である。

Greenoは、必要とされる補助線を生徒が生成する能力に関して教育心理学的観点から理にかなった仮説を

与えている[6-7]。それは、人間は問題を解くためのプランに対応したスキーマを予め持っており、スキーマと現問題のマッチングにより欠けている部分が補助線として生成できるという仮説である。例えば「二等辺三角形の底角は等しいことを証明せよ」という問題を考えよう。”二等辺三角形の頂点と底辺の中点を結ぶ（補助線を引く）と２つの合同な三角形に分けられ、底角が等しくなる”というのが一般的証明である。彼は、生徒が実際に問題を解いたときのプロトコルを分析した結果、生徒が、

1)一辺を共有する２つの三角形に分けようというプランを持ち、
2)２つの三角形が合同になるように補助線の位置決めをする。

という階層的問題解決を図ることを結論付け、1)に対応する以下のようなスキーマを生徒が持っている、との仮説を立てた。即ち、スキーマは２つの三角形、５つの線分、４つの点のリストとそれらの関係を持つ。このスキーマと問題の二等辺三角形のマッチング（図２）から共有辺に対応する部分が補助線として必要であることが分かるとの主張である（スキーマによるパターン完成と呼ぶ）。この’スキーマ’という概念は、経験的な変換基準が部分的なものであることを裏付けている。しかし、戦略という名に値するだけの機能を有していない。つまり、スキーマにより1)のプランは実行されるが、2)の操作を実現できない。証明を完成させるための戦略としては、新しく生じた点が底辺の中点もしくは補助線と底辺が垂直に交わる様な点であることを生成できる機能が必須である。

ここで、前章のＡに関しては、「経験的な変換基準とは、部分的戦略である」ことが示唆され、Ｂについては、「部分的戦略を如何にして経験から学ぶか?　もしくは、具体的経験例（Base問題）を如何なる基準で分割するか?」とより具体的に言い換えることができる。

４．　補助線生成メカニズム

４．１　図形パターン

筆者は、部分的戦略としての変換基準は図形パターン（図３）であるという仮説を立てた。例えば問題状態中に一本の線分とその中点という要素が存在する場合、幾何問題のエキスパートはその要素を含むような図形パターンを想起し、問題図形にあてはめることによって補助線が見えてくる。図形パターンは、Greenoのスキーマと利用法が似ているが、戦略としての情報も持ち合わせている点が違う。即ち、スキーマが点と線分の関係リストのみから成るのに対し、図形パターンはそれら幾何的情報の性質（等しい、平行など）をも含んだ、いわば定理の複合体である。これにより、スキーマでは不可能であった新しい点の位置決めが可能になる。更に、エキスパートが図４の補助線を引く理由は、中点情報をこの様に利用することによって線分ＢＣの両側に２つの合同な三角形ができそれが生む新たな情報が証明にとって有用であると判断するからである。この事実は、図形パターンが定理の複合体であるべきことを示している。

４．２　論理表現

本研究では、Prologにより対象図形を表現する。図形の位置関係や性質を表すための述語としてpoint, line, equal, para, godo, soujiを用意する。表１に各述語の意味を示す。図５が例題１の論理表現である。これは、assertion 集合としてworking memory中に貯えられる。各述語の引き数（点の名前）はすべてconstantである。一方、図形パターンはホーン節として表現される（図６）。head部の述語pattern の引き数はパターンの名前である。Body部は図形パターンの持つ性質、点・線分の位置関係を表す述語のand結合になっている。各述語の引き数はすべて変数である。

４．３　問題図形と図形パターンのマッチング

述語pattern(X)をコールすることによって両図形がマッチするかどうかを試し、X に図形パターン名を返す様にする、つまり、図形パターンが適用可能か否かという問題をpattern の成功失敗に帰着する。そのためには、更に以下の用意が必要である。

1)マッチング前にpoint(new)を１つassertしておく。このassertion がないと、新しい点を生み出す補助線を引いたことにならない。この条件は、補助線により生み出される点はただ１つに限ると問題を限定している（人間も、２つ以上の点を生み出すような補助線は難しくて引かないので、実用上、これで支障はない）。
2)point以外の述語コールで、引き数内にnewというconstantを含むものは必ず成功するというルールを与える。この原則がないと、”new”は補助線により生まれる新しい点なのでそれを含む述語は決して成功しない。

両者のマッチングは、図形パターン中の変数と問題図形中の変数間の対応付けを探索することにほかならない。一般にマッチングが成功するような対応付けは複数種類存在し、各々異なる補助線を生み出す。図５、図６のマッチングにおいて、例えば｛X/a,Y/d,Z/new,W/c,V/b｝、｛X/a,Y/d,Z/new,W/b,V/c｝の対応付けは、それぞれ図７の補助線を生成する。図８は前者のマッチングによりinstantiateされたホーン節を示す。Body部中の newを含む述語が、”如何なる補助線が生成されたか”に関する情報を表している（前述2)の原則により可能）。

５．　証明シミュレータ

補助線問題証明シミュレータは、補助線生成部、証明生成部、幾何固有情報格納部、制御アルゴリズム部から成る（図９）。

５．１　幾何固有情報格納部

幾何固有情報とは、図形情報の論理表現の融通性のなさを補完するためのルール情報である。例として、図１０の図形を考えよう。論理表現 ang(b,c,d), ang(d,c,b), ang(a,c,d), ang(e,c,a) etc. がすべて同じ角であることはプログラムには分からない。また、equal(l(e,d),l(a,b)) , equal(l(e,d),l(b,a)), equal(l(b,a),l(d,e)) etc. も同じ意味であることが分からない。この不備を補うためには、上記の表現が意味的

に等価であることを更に論理で書かねばならない。本研究では、述語equivalentでそのためのルールを記述している。

5．2　補助線生成部

４種の図形パターン（図１１）を持つ。これだけでは、あらゆる補助線問題に対処するには不足している。しかし、ここでのシミュレータ構築の主目的は、図形パターンが補助線生成の源であることの妥当性の確認と学習研究の問題点の洗いだしであるので、４種のみに限定した。ＷＭ更新アルゴリズムは、新たに生み出された情報を貯えるに際してworking memory（以下ＷＭと略す）中の冗長性を取り除くためのものである。例えば、図８の新情報が得られたとしよう。既にＷＭ中にあるline(4,[a,d]) と新情報line(N1,[a,d,new]) は冗長なので両者を縮約して line(4,[a,d,new])をＷＭにassertする。

5．3　証明生成部

幾何学の基本定理と後向き推論アルゴリズムから成る。与えた定理は合同、相似、平行線と角、中点連結定理、変形則で、全部で35種である。

5．4　制御アルゴリズム

幾何固有情報を利用しながら補助線生成、証明生成を行う一連の過程を全体的に制御するアルゴリズムである（図１２）。先ず証明生成部が証明を試み、失敗すれば補助線生成後再び証明を試みる。後者の証明に失敗した場合は、補助線生成部が可能な限り別の補助線を生成し証明するというループを、成功するまで繰り返す。

6．　シミュレーション結果

Cprolog インタープリタで例題１，２を解かせた結果を図１３に示す。ここでは、可能な限り複数の正しい証明を出させた。図には、補助線生成部が何種類の補助線を引いたか、そのうち証明が成功したのはどういう補助線の時か、すべての証明を出すのに要した cpu時間（使用計算機VAX8600）を記してある。

7．　学習への展望

7．1　問題点

いくつかの研究事例に関する考察とシミュレーションによって以下の点が学習への問題点として明らかにされた。

1)部分的戦略として図形パターンは妥当である。その理由は、しかるべき図形パターンがあれば妥当な補助線がひけて正しい証明が得られること、図形パターンによる補助線生成メカニズムはprologで簡単にインプリメントできることの２点である。

2)しかし、あらゆる補助線問題に対処するためには果して何種類の図形パターンがあれば事足りるのであろうか?　”数々の補助線問題を解く過程でいかにして図形パターンを獲得すれば良いのか”、”如何なる基準で具体的問題を分割して記憶するのか”（Ｂの学習）が次の大きな課題となる。

3)シミュレータによる証明の特徴は i)網羅的に補助線を生成し ii)その全てに 関して証明を試みることである。これらを人間エキスパートの方法と比較する。i)に関して言えば、人間はある特徴だけしか見えないので思い付く補助線は数少なく、したがって複数の証明は生成できない。この点は機械の方が優れている。しかし、ii)の効率の悪さ（点の数の多い例題２では証明成功率は35分の4）は人間に比べてあまりにひどく、大幅な改善が必要な点である。人間の場合、証明を試みる数少ない補助線の中に正解があるのは、証明をする前に”引いた補助線が良さそうかどうか”を判断するプロセス（図１４）があるからである。そしてこのプロセスは、最初に証明を試みて失敗した時に心の中に生じる「補助線を引くための動機」により何らかの影響を受けている。では、その判断基準も学習の対象なのだろうか?　より具体的に言えば、

　　Ｃ：図形パターンの適用の仕方を学ばねばならないのだろうか?

という疑問が生じる。

7．2　ヒューリスティクス学習

ここで、前節Ｃの学習が必要か否かを考察するために、従来のヒュリスティクス学習研究事例との相性について考察する。

Version spaceは Mitchellが提唱した概念で、記号積分を行うシステムＬＥＸ[8-9] で利用されている。ＬＥＸは、積分規則の適用に成功した例（正の例）と失敗した例（負の例）から、被積分関数が如何なる条件を満たしているときにその規則を適用して良いのかを学習するシステムである。条件を特殊化し過ぎると正の例を説明できなくなり、また一般化し過ぎると負の例を説明してしまう。ＬＥＸでは、数学表記における概念（例えば関数、数式、多項式、一次式etc.）の階層構造に沿った一般化・特殊化を行うことによって、条件の適正な表現が階層構造上で存在すべき範囲（version space ）を狭めていく。Version space による学習コンセプトは、本研究には適用不可能である。なぜなら、幾何的対象間の位置関係や性質を［一般化－特殊化］という尺度で階層的に表現することが不可能だからである。つまり、この分野では、ある概念より１段 generalな概念、又は１段specificな概念は何であるかを語ることが難しい。

Discrimination learning は、Anderson[10],Langley[11]らが示した学習法である。それは、正・負の例におけるoperatorの適用状況の比較から、operatorの条件部に1)正の例にあって負の例にない条件を付け加える 2)負の例にあって正の例にない条件の否定を付け加える、という基本操作を通して、operatorの文脈依存性を増すという一種のヒューリスティクス学習である。この研究の延長として補助線問題を捉えれば、補助線によって生まれた新情報と他の問題状態相互にどういう関連があれば良い・悪いと判断するのかを学習する、というストーリーが考えられる。しかし、その方法は、以下の点で困難である。

1)”何を以て関連と言うのか”の定義が難しい。

2)学習すべき条件に現れるであろう属性（例えば、「これこれこういう関連が何個ある場合には・・」という場合の”関連の個数”といった属性etc.）として如何なる物を用意すれば有用なヒューリスティクスが得られるのかが予測不可能である。

これら２件の研究は、いずれも、domain theory として持っている個々のoperatorの適用に経験的な文脈依存性を持たせようという学習である。しかし、本研究の場合、図形パターン自体が既に多分の文脈依存性を持っており、更にそれを増そうとすると上記の様な困難を生じる。ここで敢えて文脈依存性を増すことはExplanation-based learningと同じく問題全体の学習を行うことになり、それは３章の観点から好ましくない。したがって、図形パターンの適用の仕方は学習すべき対象ではない。

７．３　複数の部分的戦略の併用

では、人間エキスパートが持つ判断基準とはいかなるものなのか？　それは、「自分の持っている部分的戦略をできるだけたくさん適用しよう」というヒューリスティクスであると考えられる。このヒューリスティクスに従って複数の部分的戦略を併用すれば、補助線の生成を知的に絞り込むことができる（図１５）。例題２を与えられたエキスパートは、問題要素中の中点に対して図１１のp3及びp4の図形パターン（部分的戦略）を想起し、またAB=CD という要素に対しては図の様な図形パターン（「XY=ZW に対しZWに等しいY?を持ってきて、三角形XY? が二等辺三角形になるようにせよ」という部分的戦略）を想起する。新しい点を１つだけ創り出すという条件の下でこれらの複数の戦略をすべて適用すると、補助線は図に示した３通りしか生成されない。これらはすべて正解の補助線であり、７．１節 3)の効率の悪さは解消されている。これは大局的な把握によって知的に問題解決した例であり、部分的戦略がその基本にある。

７．４　部分的戦略と類似性認識

人間は類似性の認識によって補助線を生成することもある。いきなり例題２を提示された人よりもそれを解く前に例題３（図１６）を学習した人の方が補助線を容易に引けるのは、”例題２が例題３（経験例）と似ていて例題３で使った方法が例題２でも一部使えるのではないか？”と考えるからである。逆に言えば、例題３において正しく部分的戦略を学習済みであるからこそ、例題２に接した時に例題３と類似している（一部が同じである）と感じることが出来る。その意味で、部分的戦略の学習は類似性認識の基本でもある。

８．　結言

1)定理の複合体としての図形パターンは補助線生成において強力である。

2)数々の経験例から学習すべき事柄は、問題全体の一般化構造でも、適用operatorの文脈依存性でもなく、ある状況要素に対応する部分的戦略であり、図形パターンがそれに相当する。

3)問題状態要素から複数の部分的戦略を想起しそれらを組合せることによって知的に制御された問題解決が可能になる。つまり、operatorとしての１つ１つの戦略の文脈依存性は少なくても複数の部分戦略を結集すれば全体として大局的に問題を理解することができる。その意味で、部分的戦略は大局的理解の基本である。

4)２つの問題が似ていると人間が感じるのは、両問題の一部分が同じであるからである。したがって、部分的戦略の学習は類似性認識にとって必須である。

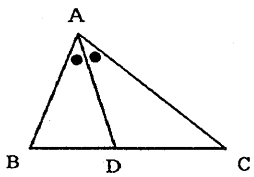
９．　今後の課題

ある補助線問題の例題から部分的戦略をいかにして切り出すか？　そのための基準が如何なるものかを探ることが今後の課題である。現時点では、証明失敗時に生じる「補助線を引くための動機」がその基準に何らかの関係を持つと考えており、その動機の定式化を進めている。

参考文献

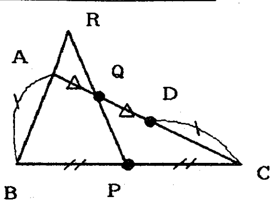
1) 波田野、小林　”類推による幾何学問題の解法”第５回知識工学シンポジウム資料 (1987)
2) 山村、小林　”非対称類推理論と問題解決における推論制御への応用　”第５回知識工学シンポジウム資料 (1987)
3) T.M.Mitchell, S.Mahadevan, L.I.Steinberg, "LEAP: A Learning Apprentice for VLSI Design", Proc. of 9th IJCAI (1985)
4) P.V.O'Rorke, "Generalization for Explanation-based Schema Aquisition", Proc. of AAAI (1984)
5) R.J.Mooney, "A Domain Independent Explanation-based Generalizer", Proc. of AAAI (1986)
6) J.G.Greeno, "A Study of Problem Solving", in Advances in Instructional Psychology Vol.1 (R.Grazer ed.), Lawrence Erlbaum Associates,Inc. (1978)
7) J.G.Greeno（山口、東　共訳）、”問題解決の過程－幾何の課題による研究”、サイエンス社(1985)
8) T.M.Mitchell,"Learning and Problem Solving", Proc. of 8th IJCAI (1983)
9) T.M.Mitchell, P.E.Utgoff, R.Banerji, "Learning by Experimentation: Acquiring and Refining Problem-solving Heuristics", in Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach (R.S.Michalski, J.G.Carbonell, and T.M.Mitchell eds.), Springer-Verlag (1983)
10) J.R.Anderson, "Acquisition of Proof Skills in Geometry", in Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach (R.S.Michalski, J.G.Carbonell, and T.M.Mitchell eds.), Springer-Verlag (1983)
11) P.Langley, "A General Theory of Discrimination Learning", in Production System Models of Learning and Development (D.Klahr, P.Langley, and R.T.Neches eds.), Bradford Books (1985)

例 題　　1



△ABCの∠BACの二等分線が辺BCと交わる点をDとすると、AB：AC＝BD：CDになることを証明せよ。

例 題　　2



△ABCの辺上にAB＝CDになる様に点Dを取る。BC，ADの中点を各々P，Qとする。PQの延長とBAの延長が交わる点をRとすれば、△ARQが二等辺三角形になることを証明せよ。

図１　典型的補助線問題

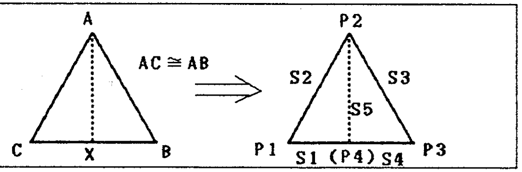


図2　スキーマによるパターン完成
（文献7より引用）

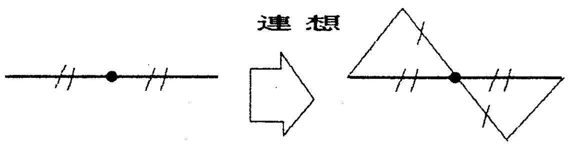


図３　中点情報から図形パターンへの連想

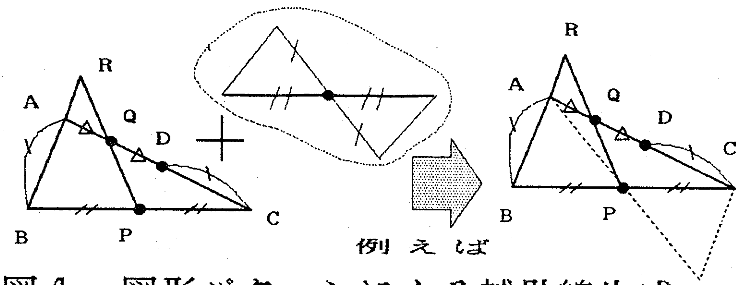


図４　図形パターンによる補助線生成

```
point (a).
point (b).
point (c).
point (d).
line (1, [a, b]).
line (2, [b, d, c]).
line (3, [a, c]).
line (4, [a, d]).
equal (ang (b, a, d), ang (c, a, d)).
```

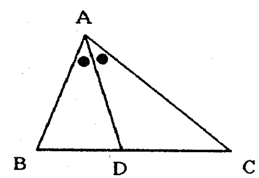
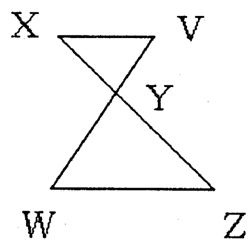


図５　例題１の論理表現




```
pattern (p1) :-
  point (X), point (Y), point (Z),
  point (W), point (V),
  line (N1, [X, Y, Z]), line (N2, [V, Y, W]),
  line (N3, [X, V]), line (N4, [W, Z]),
  not (N1==N2),
  para ([X, V], [W, Z]),
  equal (ang (Y, X, V), ang (Y, Z, W)),
  equal (ang (Y, W, Z), ang (Y, V, X)),
  equal (hi ([X, Y], [Y, Z]),
         hi ([V, Y], [Y, W])),
  equal (hi ([X, Y], [Y, Z]),
         hi ([X, V], [Z, W])).
```

図6　図形パターンＰ１の論理表現

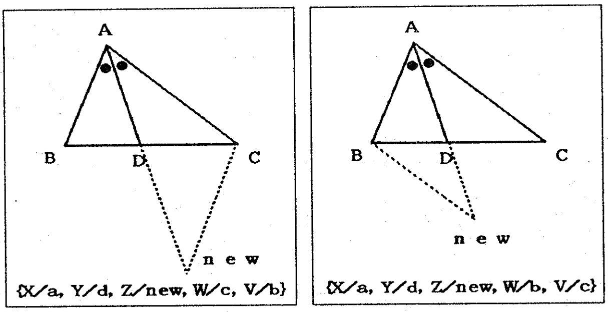


図７　対応付けと補助線

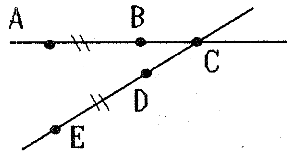


図１０　交わる
２直線

```
pattern(p1):-
  point(a), point(d), point(new),
  point(c), point(b),
  line(N1, [a, d, new]),
  line(2, [b, d, c]),
  line(1, [a, b]),
  line(N4, [c, new]),
  not(N1==2),
  para([a, b], [c, new]),
  equal(ang(d, a, b), ang(d, new, c)),
  equal(ang(d, c, new), ang(d, b, a)),
  equal(hi([a, d], [d, new]),
        hi([b, d], [d, c])),
  equal(hi([a, d], [d, new]),
        hi([a, b], [new, c])).
```

ＡＤを延長して

ＣからＡＢに
平行線を引くと

この様な
性質が成
り立つ

図８　補助線に関する情報

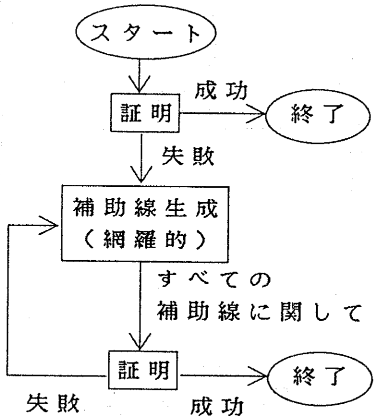


図１２　制御アルゴリズム

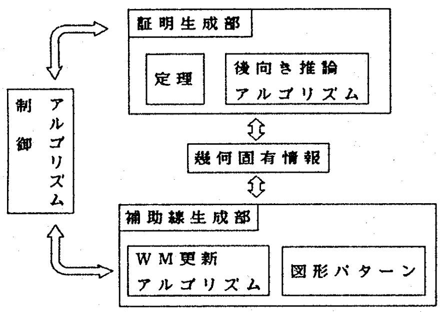


図９　証明シミュレータ

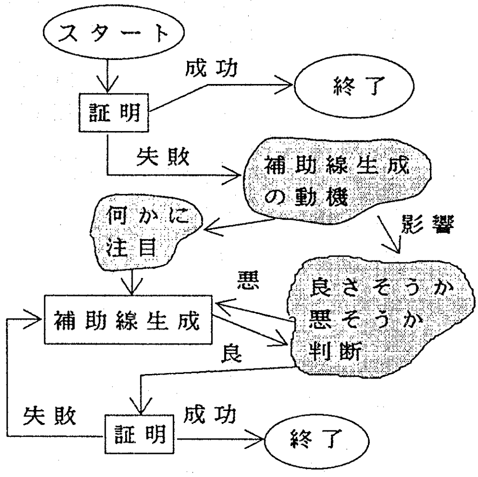


図１４　人間エキスパートによる
知的問題解決

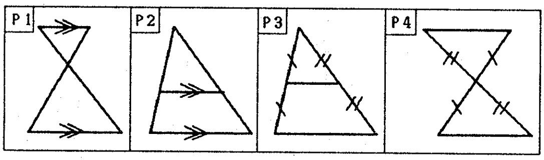


図１１　図形パターン

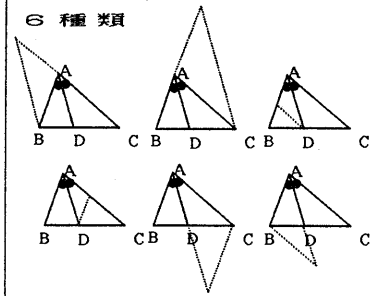
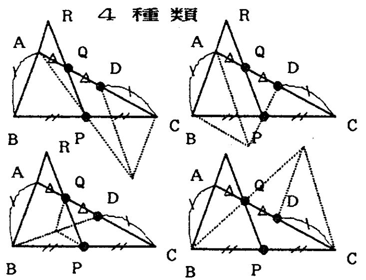
例題	生成された補助線	有用な補助線	cpu時間(sec)
1	6種類	6種類 	約 30
2	35種類	4種類 	約 1800

図13　シミュレーション結果

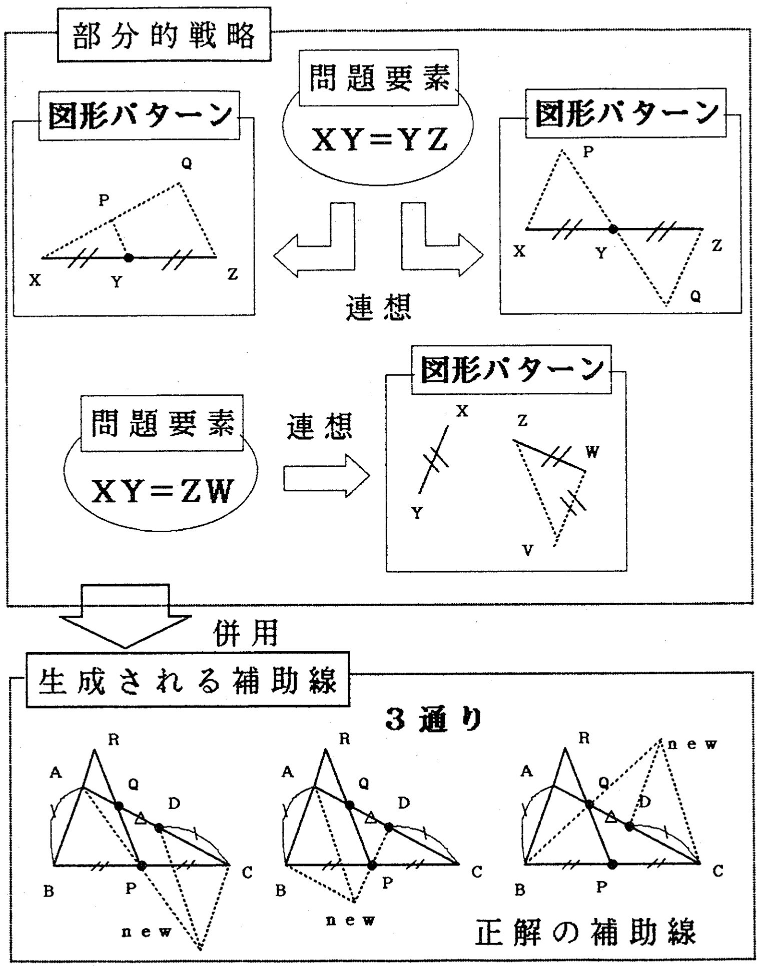
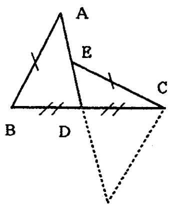


図15　複数の部分的戦略の併用

例題　3



左の図において，AB=CE及びBD=CDの2条件があるとき∠BAD=∠CEDを証明せよ　(左図の補助線を引けば証明できる)

図16　例題2に類似した補助線問題