知識工学と人工知能 60 − 5
( 1 9 8 8. 9. 2 1 )

# 連続値論理数学について

月本 洋
(株) 東芝

最近、ファジー論理等の、論理数学の連続化の試みがいくつか散見されるが、未だ基礎、応用に渡って有効な理論が存在するとは言い難い。本稿では、事象と命題の間の或る対応に着目する事により、連続値論理数学の基礎が構築できる事を命題論理に関して述べる。その手順は以下の通りである。①事象と命題の対応からブール代数の公理が、多項式関数の剰余類間計算と巾等律に帰着される。②巾等律をはずした関数空間が、ヒルベルト空間になる。③論理エントロピーを定義する事により、この関数空間の部分集合が、連続値命題と対応している。
尚、ファジー論理のメンバーシップ関数が正弦(余弦)関数になる事も併せて述べる。

# On a continuously valued logical mathematics

Hiroshi Tsukimoto

Toshiba Corporation
1−1, Shibaura 1−Chome, Minato−Ku, Tokyo 105, Japan

Nowadays, there are some trials to build a continuously valued logic (ex. Fuzzy logic), nevertheless we don't have an effective theory which covers basis and application. In this paper, we propose a continuously valued logical mathematics based on a certain correspondence between events and propositions, which is described as follows.
① Axioms of Boolean algebra are divided into idempotent law and a calculation of the residue by a certain polynomial function.
② Function space which consists of the residues is Hilbert space.
③ By introduction of logical entropy, a subset of this space represents continuously valued propositions.
Additionally it is described that a membership function of Fuzzy logic is a sine (cosine) curve.

## 1. はじめに

古典論理は、その表現範囲が限定されている為、現実的応用等において、有効でない場合が多い。その為現在まで、各種の古典論理の拡張の試みがなされて来た。直観主義論理、様相論理等がそれに相当するが、それらの多くは公理主義的形式的手法が、公理の本質もしくは意味を等閑視する事につながり、たとえ形式的体系化が成されても、豊かな応用的成果をもたらしているとは言い難い。又工学的応用を主目的として、ファジー論理も最近熱心に研究されているが、メンバーシップ関数等の基礎付けが貧弱であり、古典論理の自然な拡張とは言い難い。

筆者は、事象と命題の間に存在する或る対応に着目して、古典論理の拡張を試みたが、まず連続値命題の表現に関して、或る程度の結果を得たので、ここに報告する。

本稿では、命題が事象に関する命題であり、確率と真理値の間に或る対応が存在する事が認められると言う事実から出発し、この対応を、多項式関数から或る多項式関数による剰余への写像と数学的に定式化する。これにより論理計算が、確率関数の上記の剰余間の計算として定義できる事を示す。次にこの剰余の巾等律を満足する部分集合が、ブール代数と等価である事を示す。即ち古典論理の証明等が通常の数式処理と同等に行なえる事を示す。更に古典論理を拡張する為に、巾等律をはずし、その関数空間に内積を定義し、この内積より定義されるノルムに関しこの関数空間が、完備な内積空間即ちヒルベルト空間になる事を示し、直交関数展開した後に、論理エントロピーを定義する事により、この空間を構造化し、極座標表示等により、連続値命題がこの空間の部分集合と対応する事を示す。又メンバーシップ関数が正弦(余弦)関数になる事も併せて述べる。

## 2. 原理と数学的定式化

### 2.1 事象と命題の対応

例えば「雨がふる」と言う事象に確率と言う付値が存在するのに対し、「雨がふる」と言う命題には真理値と言う付値が存在する。事象は常に時間の中で生起するものであるから、非確率事象は基本的には有り得ない。即ち事象は全て確率的である。しかし命題に関しては、我々の関心はその生起ではなく、その真偽、及びその命題のもたらす情報量にある。

従って、「地球が丸い」と言う原子事象$A$の確率$P(A)$に関して2回発生すれば、

$P(A)\,P(A) = \{P(A)\}^2$

となるが、これに対応する原子命題に関しては、「地球が丸い」と言う言明を何回行なおうが、1回行なう事と同じであり、その真理値$R(a)$に関しては、以下の様になる。

$R(a) \otimes R(a) = R(a)$

但しここで$a$は原子事象$A$に対応する原子命題、$\otimes$は乗算に対応する演算である。即ち同一原子命題の真理値の“乗算”の結果はその原子命題の真理値と等しい。

以上の簡単な考察から原子事象の確率$(X)$と原子命題の真理値$(x)$の間には次の対応が存在する事がわかる。

$X^n \to x$

これ以降の議論は上記の対応の展開である。即ち次の原理の展開である。「原子事象は全て確率的であり、原子事象の付値である確率$(X)$と原子命題の付値である真理値$(x)$の間には、$X^n \to x$と言う対応が存在する。」

### 2.2 数学的定式化

#### 2.2.1 写像$T$(今後の議論は主に1変数について行なうが、必要に応じ、$n$変数に適宜拡張される。)

事象の確率から構成される空間を確率空間$P$とする。命題の真理値から構成される空間を論理空間$L$とする。写像$T$を以下の様に定義する。

$T{:}TX^n = x$

ここで$X \in P$は原子事象の確率で、原子事象は互いに独立とする。$x \in L$は原子命題の真理値とする。$n \in N$は任意とする。($X$、$x$の定義域は$[0, 1]$)即ち写像$T$は確率空間の確率の多項式関数(確率空間の部分集合)を定義域とし、論理空間の真理値の多項式関数(論理空間の部分集合)を値域とする写像である。

確率、真理値と言う意味を捨象して考えると、この写像$T$は多項式$f(x)$の$g(x) = x^n - x$による剰余$q(x)$への写像と同等である。代数的に表現すれば、多項式環$R[x]$の、$g(x) = x^n - x$から生成される単項イデアル$[x^n - x]$による、剰余環$R[x]/[x^n - x]$の上への準同型写像となる。$x^n \to x$は全ての$n$について成立しなければならない。全ての$n$について共通の根は0、1のみであるから、上記の剰余環から$R[x]/[x^2 - x]$を選択することになる。

$f(x) = p(x)\,(x^2 - x) + q(x)$

とおくと

$$q(x) = (1 - x)\,f(0) + xf(1) \qquad \ldots . \quad (1)$$

となる。

従って、写像$T$は$R[X] \to R[x]/[x^2 - x]$となったが、計算上と後の理論展開上の目的で、$T$の定義は(1)式を用いて以下の様に行なう。

$Tf(X) \triangleq f(0)\,(1 - x) + f(1)x$

但し、$f(x)$は$[0, 1]$で定義された多項式関数である。今後、$f(0)$、$f(1)$, $1-x$は$f_0, f_1, \bar{x}$と略記する。また、$x$を強調する時、$T$を$Tx$と記す。従って$Txf(X) \triangleq f_0\bar{x} + f_1 x$となる。$n$変数からなる場合には、

$$Tx_if \triangleq f(X_1,...,0,...X_n)\overline{x}_i + f(X_1,...,1,...X_n)x_i$$

となり、

$T \triangleq \prod_i Tx_i$とすると、

$$Tf = \sum_{j=1}^{2n} f_j \widehat{x}_j \qquad .... \quad (2)$$

となる。

但し、$f_j$は$f(e_1 ... e_n)$ ($e_i$は0, 1のいずれか)であり、$\widehat{x}_j$は

$$\prod_i e(x_i) \quad \left( e(x_i) = \begin{cases} \overline{x}_i \ (e_i = 0) \\ x_i \ (e_i = 1) \end{cases} \right)$$

である。2変数の場合には、以下の様になる。

$$\begin{aligned} Tf(X,Y) &= TxTyf(X,Y) \\ &= Tx(f(X.0)\overline{y} + f(X,1)y) \\ &= Txf(X,0)\overline{y} + Txf(X,1)y \\ &= (f(0,0)\overline{x} + f(1,0)x)\overline{y} \\ &\quad + (f(0,1)\overline{x} + f(1,1)x)y \\ &= f_{00}\overline{x}\overline{y} + f_{10}x\overline{y} + f_{01}\overline{x}y + f_{11}xy \end{aligned}$$

### 2.2.2 論理計算の定義

確率関数の、写像$T$の像を、論理関数と定義する。$X$と$x$の違いを無視して表現すれば、論理関数は、確率関数の$x^2 - x$による剰余となる。但し$x$の定義域は[0, 1]である。又、確率関数とは、原子事象の確率の多項式関数の事である。

従って論理計算は$x^2 - x$の剰余間の計算となる。具体的に最も基本的な否定(NOT),論理積(AND)、論理和(OR)は次の様になる。原子事象$A, B$の確率を$X, Y$とする。これに対応する原子命題を$a, b$とし、真理値を$x, y$とする。又$\mathcal{T}$を$f$から$f$の $\prod_i (x_i^2 - x_i)$ による剰余への写像とする。但し$f$は多変数多項式関数とする。

原子命題$a$の否定$\overline{a}$の真理値は

$T(1-X) = 1-x$ となる。

又、原子命題$a, b$の論理積$a \wedge b$の真理値は

$\mathcal{T}(xy) = xy$ となる。

更に原子命題$a, b$の論理和$a \vee b$の真理値は、ド·モルガンの法則($a \vee b = \overline{\overline{a} \wedge \overline{b}}$)を用いて、

$$\begin{aligned} 1-(1-x)(1-y) &= 1-(1-x-y+xy) \\ &= x+y-xy \end{aligned}$$

となる。

$\mathcal{T}f(x_i)$ は $x_i^n$ を$x_i$と置き換える事と同じであるから、これを用いて以下の論理計算をおこなう。

ⓐ $a \wedge \overline{a} =$ 人 (但し人は矛盾)

$\mathcal{T}(x(1-x)) = \mathcal{T}(x-x^2) = x-x = 0$

従って0は矛盾に対応する。

ⓑ $a \vee (\overline{a} \wedge b) = a \vee b$

の証明を$\mathcal{T}$を用いて左辺ー右辺=0でおこなう。

$\mathcal{T}((x+(1-x)y-x(1-x)y)-(x+y-xy))$

$= \mathcal{T}(x+y-xy-xy+x^2y-x-y+xy)$

$= \mathcal{T}(-xy+x^2y)$

$= -xy+xy = 0$

ⓒ 命題論理の公理$a \rightarrow (b \rightarrow a)$はトートロジーであるが、これはこれに対応する論理関数が1であることを意味する。この公理を$a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$を用いて書き変えて論理計算すると次の様になる。

$a \rightarrow (b \rightarrow a) = \overline{a} \vee (\overline{b} \vee a)$

$\mathcal{T}((1-x) + ((1-y) + x-x(1-y))-(1-x)((1-y) + x-x(1-y))$

$= \mathcal{T}(1-x+1-y+x-x+xy-(1-x)(1-y+xy))$

$= \mathcal{T}(2-y-x+xy-1+y-xy+x-xy+x^2y)$

$= \mathcal{T}(1-xy+x^2y)$

$= 1-xy+xy = 1$

上記3例よりわかる通り、証明、簡約化等を$\mathcal{T}$を用いて通常の数式処理と同様に行える。

## 3. 古典論理の定式化

ここでは、$\mathcal{T}$を用いて、古典論理を定式化する。前章では、事象と命題に関する原理から導かれた剰余間の計算を論理計算と定義し、若干の例を示したが、この章ではまず、前章で定義された論理関数の、巾等律を満たす部分集合がブール代数と等価である事を示し、次に推論を定式化する。

### 3.1 古典論理(ブール代数)との等価性

#### 3.1.1 巾等律

$\mathcal{T}$を用いて巾等律を書くと、$\mathcal{T} f^2 = f$となる。これを、1変数の関数の場合に、解くと次の様になる。

$f(x) = ax+b$とおき、上式に代入すると、

$\mathcal{T}(ax+b)^2 = ax+b$

$\rightarrow \mathcal{T}(a^2x^2 + 2abx + b^2) = ax+b$

$\rightarrow a^2x + 2abx + b^2 = ax+b$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a^2 + 2ab - a = 0 \ ....... & ① \\ b^2 - b = 0 \ ............ & ② \end{array} \right\} \text{となる。}$$

②より$b = 1, 0$となり

$b = 1$の時①より$a^2 + 2a - a = 0 \rightarrow a = 0, a = -1$となり

$b = 0$の時①より$a^2 - a = 0 \rightarrow a = 0, 1$となる。

$$\text{即ち} \left. \begin{array}{lll} a = 0, & b = 0 & \rightarrow f(x) = 0 \\ a = 0, & b = 1 & \rightarrow f(x) = 1 \\ a = 1, & b = 0 & \rightarrow f(x) = x \\ a = -1, & b = 1 & \rightarrow f(x) = -x+1 = 1-x \end{array} \right\} \text{となる。}$$

上記の4つの関数は1変数の古典論理の命題に対応している。

$$\text{即ち} \left. \begin{array}{ll} 0 \ ....... & \text{矛盾} \\ 1 \ ....... & \text{トートロジ} \\ x \ ....... & \text{肯定} \\ 1-x \ .... & \text{否定} \end{array} \right\} \text{である。}$$

これは容易に$n$変数に拡張される。従って$\tau f^2 = f$(巾等律)は、剰余として定義された論理関数の部分集合である古典論理関数を条件付ける式である事がわかる。

### 3.1.2 ブール代数の公理との対応

ここでは、ブール代数の公理が、剰余間の計算と巾等律に帰着される事を見る。ブール代数の公理は非常に多くの書物に、様々な形で表現されているが、バーコフ/バーティの「現代応用代数」1) の公理を採用する。

$L1$ $x \wedge x = x, x \vee x = x$ (巾等律)

$L2$ $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$ (交換律)

$L3$ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (結合律)

$L4$ $x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y) = x$ (吸収律)

$L5a$ $x \wedge [y \vee (x \wedge z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$L5b$ $x \vee [y \wedge (x \vee z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (モジュラ律)

$L6$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (分配律)

$L7$ $x \wedge O = O \quad x \vee O = x$
$x \wedge I = x \quad x \vee I = I$ (普遍限界)

$L8$ $x \wedge x' = O \quad x \vee x' = I$ (補元性)

$L9$ $(x')' = x$ (対合律)

$L10$ $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
$(x \vee y)' = x' \wedge y'$ (ド・モルガンの法則)

剰余間の計算は$L2, L3, L7, L9, L10$を満たし、巾等律を付加する事により, $L1, L4, L5a, L5b, L6, L8$を満たす事が簡単な計算からわかる。
従って、古典論理(ブール代数)の公理は剰余間の計算と巾等律に帰着できる事がわかる。

### 3.2 推論の定式化

命題$b$が命題$a$の定理であるとは$a \to b$がトートロジである事である。$a \to b = \bar{a} \vee b$であるから、$a \vdash b$を$\tau$を用いて定式化すると以下の様になる。
但し$f, g$は$a, b$に対応する真理値であるとする。

$\tau((1-f) + g - (1-f)g) = 1$

$\to \tau(1 - f + g - g + fg) = 1$

$\to \tau fg = f$ (但し$f$は古典論理に対応している為、$\tau f = f$を満たす)

従って、$g$が$f$の定理である時、$\tau fg = f$を満たす事になる。
更にこれを書き直すと、$\tau f(1-g) = 0 \to \tau f\bar{g} = 0 (\bar{g} \triangleq 1-g)$となるが、これは導出原理に対応する式である。

本章では、剰余間の計算と巾等律がブール代数と等価である事とそれによる推論の定式化を見たがこの論理関数の定義域、値域が$[0,1]$である事を考えれば、何らかの連続化が果たされたかも知れないが、次章以降では巾等律をはずした論理関数がどの様に命題を表現しているかを見る。

## 4. 論理空間の関数解析

ここでは、古典論理の条件である巾等律($\tau f^2 = f$)をはずした論理関数全体$L_1 (\subset L)$空間を調べる。

### 4.1 内積の定義

$n$変数からなる$L_1$を考える。
内積$<f,g>$を

$$<f,g> \triangleq 2^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \tau f \bar{g}\, dx_1 \cdots dx_n \qquad \ldots. \quad (3)$$

と定義する。以後繁雑を避ける為、積分は常に重積分とし$<f,g> = 2^n \int_0^1 \tau f \bar{g}\, dx$ と記述する。
(但し$\bar{g}$は$g$の共役複素数)
式(3)は内積の下記4条件を満足する。

(I1) $<f,f> \geqq 0,\ <f,f> = 0 \iff f=0$

(I2) $<f,g> = \overline{<g,f>}$

(I3) $<af,g> = a<f,g>$

(I4) $<f+g,h> = <f,h> + <g,h>$

(I1)の証明(1変数で行なうが一般性を失わない。)

$$2^1 \int_0^1 \tau f \bar{f} dx = 2 \int_0^1 (f_0 \bar{f}_0 (1-x) + f_1 \bar{f}_1 x)\, dx$$
$$= 2 [f_0 \bar{f}_0 (x - \frac{x^2}{2}) + f_1 \bar{f}_1 \frac{x^2}{2}]_0^1$$
$$= 2 (\frac{1}{2} f_0 \bar{f} + \frac{1}{2} f_1 \bar{f}_1)$$
$$= f_0 \bar{f}_0 + f_1 \bar{f}_1$$
$$= |f_0|^2 + |f_1|^2 \geqq 0$$

又$<f,f> = 0 \quad \leftrightarrow |f_0|^2 + |f_1|^2 = 0 \quad \leftrightarrow f = 0$

(I2)の証明

$$<\overline{g,f}> = \overline{2 \int_0^1 \tau g \bar{f} dx} = 2 \int_0^1 \tau f \bar{g}\, dx = <f,g>$$

(I3)の証明　明らか

(I4)の証明　明らか

### 4.2 ノルムの定義

ノルムを$\|f\| \triangleq <f,f>^{\frac{1}{2}}$と定義する。下記条件を満たす事は簡単にわかる。

(N1) $\|f\| \geqq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f=0$

(N2) $\|af\| = |a| \cdot \|f\|$

(N3) $\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|$

$L1$は上記の内積、ノルムに関し、完備な内積空間、即ちヒルベルト空間になる。これは、$L1$が1次多項式関数から構成される事から簡単にわかる。上記のノルムを今後、$N_R(f)$,もしくは$N_R(f(x))$と書く。

$N_R(f(x))=(2^n\int_0^1 \tau f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ であるが、これは、同一のトートロジ(即ち"1")であっても、そのノルムが、空間の変数の数により異なる。即ち、

$N_R(1)=(2^n\int_0^1 \tau 1^2 dx)^{\frac{1}{2}}=(2^n(1-0))^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{n}{2}}$となる。

このノルムは後の直交関数展開の時に便利である為、導入したが、ノルムが空間に依存する為、相対的ノルムと呼ぶ。$N_R(fx)$)に対し、ノルム(絶対的ノルム)$N(f(x))$を次の様に定義する。

$$N(f(x))\triangleq(\int_0^1 \tau f^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

### 4.3 直交関数展開

式(2)の$x_j=\phi_j$と置く。この$\phi_j$に対し、$<\phi_j, \phi k>=0$ $(j\neq k)$となり、又 $\|\phi_j\|=1$ となる。従って$\{\phi_j\}$は正規直交系となる。(この正規直交系はブール束のアトムを拡張したものになっている。)以下、ヒルベルト空間に対し成立する事は全て成立する。即ち

① $\{\phi_j\}$は完全である。

② 全ての$f\in L_1$は$\{\phi_j\}$により展開される。

$$f=\sum_{j=1}^{2^n}<f, \phi_j>\phi_j$$

③ 全ての$j$で $<f, \phi_j>=0$ならば$f=0$である。

以上の事より、$n$変数よりなる論理関数は$2^n$次元のベクトルとして表現できる事がわかる。又$n$が可算無限の時はこのヒルベルト空間の次元は連続無限となる事もわかる。

1変数の場合の正規直交系は$\{x, \bar{x}\}$となる。

2変数の場合の正規直交系は$\{xy, x\bar{y}, \bar{x}y, \overline{xy}\}$となる。

$x\vee y$に関して正規直交展開すると下記の様になる。

$f=x+y-xy$に対し、各係数を求めると次の様になる。

$$<f, xy>=2^2\int_0^1\int_0^1 \tau(x+y-xy)xydxdy$$

$$=4\int_0^1\int_0^1 xydxdy=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$<f, x\bar{y}>=2\int_0^1\int_0^1 \tau(x+y-xy)x\bar{y}\,dxdy$$

$$=4\int_0^1\int_0^1 x\bar{y}\,dxdy=1$$

$$<f, \bar{x}y>=2^2\int_0^1\int_0^1 \tau(x+y-xy)\bar{x}ydxdy=1$$

$$<f, \bar{x}\bar{y}>=2^2\int_0^1\int_0^1 \tau(x+y-xy)\bar{x}\bar{y}\,dxdy$$

$$=4\int_0^1\int_0^1 0dxdy=0$$

従って$f=1\cdot xy+1\cdot x\bar{y}+1\cdot\bar{x}y$となる。又、これはベクトル表示で$(1, 1, 1, 0)$となる。

## 5. 論理エントロピーと論理空間の構造

### 5.1 論理エントロピー

論理エントロピー$H(f)$をノルム(絶対的ノルム)$N(f)$に基づいて、次の様に定義する。

$$H(f)\triangleq-log_2(N(f))^2(=-log_2(\int_0^1 \tau f^2 dx))$$

この$H(f)$は命題の持つ情報量を意味する。

具体的例は、下記の通り、

$H(1)=0$ …… トートロジーは情報量が0ビット

$H(x)=1$ …… $x$即ち「$A$である」は情報量が1ビット

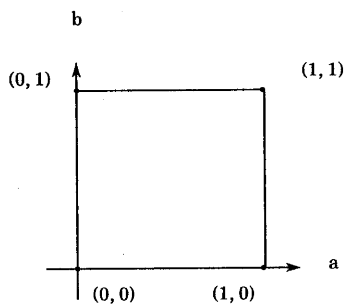
$H(xy)=2$ …… $xy$即ち「$A$かつ$B$である」は情報量が2ビット

$H(0)=\infty$ …… 矛盾は情報量が無限大

上記の説明により、このエントロピーの定義が妥当な事がわかる。

### 5.2 論理関数空間の構造

今までの議論により、命題がベクトル表示されることがわかった。次にこの関数空間内で命題がどの様に分布しているかを見る。一番簡単な1変数よりなる空間(2次元)で見てみる。




上図にエントロピー＝1の曲線を導入する。

$$-log_2 N^2(f)=-log_2(\int_0^1 \tau f^2 dx)=1$$

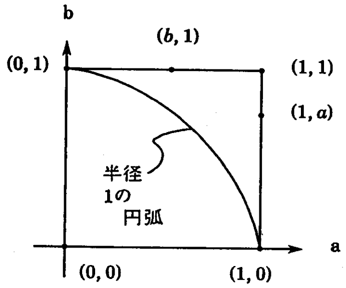
$f=ax+bx$ とおき代入し計算すると、

$$-log_2(\frac{1}{2}(a^2+b^2))=1$$

$\rightarrow\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}\rightarrow a^2+b^2=1$ となり、

半径1の円となる。

従って次図の様な曲線がエントロピー＝1の曲線となる。



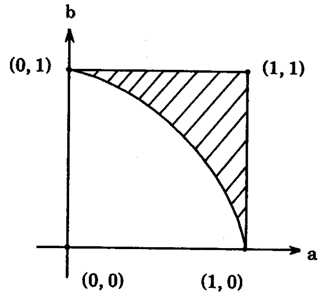

この曲線上の命題は論理エントロピー＝1である。即ち、情報量を1bit含んでいる。

上図の(1,a),(b,1)を考える。(1,a)は(エントロピーが(1,0)より小さい。(エントロピーはノルムに反比例する。)そして、aを0→1と動かす事を考えると、(1,0)→(1,1)となる。(1,0)は"$x$である"と言う命題に対応し、(1,1)は"$x$であるかも知れない、$\bar{x}$であるかも知れない"etc.の情報量0ビットの命題に対応する。従って(1,a)($0 \leqq a \leqq 1$は)"$x$であるかも知れない"と言う命題に対応し、aの減少とともに"$x$である"に近づく事になる。(b,1)も同様に考えると、"$\bar{x}$かも知れない"と言う命題に対応する。

更にこの空間を極座標$(r, \theta)$表示すると、rが情報量を表わし、θが性質を表わす事がわかる。例えば、$x$を"高い"とするならば、$\bar{x}$は"高くない"＝"低い"となり、

$\left.\begin{array}{l}\theta = 0 \text{ で高い} \\ \theta = \pi/2 \text{で低い}\end{array}\right\}$ となるのだから、$\theta = \pi/4$は"高くも低くもない"となり、θが増大するにつれ、徐々に"高い"→"低い"と移行する事がわかる。この議論は一般に$n$変数の場合にも拡張できる。従って論理空間$L_1$の次図の斜線部分は、自然言語からなる命題と対応している事がわかる。

(1変数(＝2次元)の場合)




最後にファージ論理のメンバーシップ関数は、上記のθから$a$もしくは$b$への関数であるから$a = \cos\theta$、$b = \sin\theta$即ち余弦(正弦)関数になる事がわかる。

6. まとめ

事象と命題の対応から、論理関数を確率関数の$x^2 - x$の剰余として把え、この論理関数のうち巾等律を満たす関数がブール代数と等価である事を見た後に、巾等律をはずした論理関数が或る内積に対して、ヒルベルト空間となり、ベクトル表示され、更に論理エントロピーを導入する事により、自然言語表現と対応する部分集合が存在する事がわかった。

以上の手法で連続値論理数学の基礎が確立されたと言えるが、今後の課題としては、推論規則の確立、述語論理への拡張等がある。

参　考　文　献

1)　バーコフ/バーティ、一松訳、現代応用代数I、新曜社 1972