

アナログ/メンバーシップ・グレード変換機能 を有するファジィ推論エンジン

上 原 清 彦

(株)東芝 総合研究所

本論文では、アナログ値およびデジタル表現されたファジィ集合を入力可能とするデジタル処理型ファジィ推論エンジンのアーキテクチャを提案する。推論演算は、ファジィ集合を α -レベル集合の集合族で統一的に定義するという条件の下に実行する。これは、 α -レベル集合による定義がメンバーシップ関数によるそれよりも、任意のファジィ集合の記憶に必要なメモリ容量や学習による逐次修正などに要する処理量の点で有効であることによる。

まず、簡単に α -レベル集合表現の有効性について述べる。次に、アナログ入力の推論に必要となるインターフェースとして、アナログ値をデジタル表現されたメンバーシップ・グレードへ直接に変換するハードウェアについて述べる。更に、本論文で提案するファジィ推論エンジンのアーキテクチャに基づいて、 α -レベル集合毎に推論を実行する手法について言及する。ここでは、max-min 合成を用い、ファジィ関係 R_c 、 R_p を例に具体的な推論演算手法を述べる。最後に、推論における演算量について簡単に考察を加える。

FUZZY INFERENCE ENGINE WITH ANALOG/MEMBERSHIP-GRADE CONVERSION

Kiyohiko UEHARA

Research & Development Center, TOSHIBA Corporation

1, Komukai, Toshiba-cho, Saiwai-ku, Kawasaki, 210, Japan

In this paper, a novel architecture of fuzzy inference engine is proposed, which accepts analog voltage input as well as fuzzy sets given in digital form. Inference operation is conducted under condition that all fuzzy sets are defined by family of their α -level sets. This is because definition by α -level sets is much more advantageous than that made by membership function to required memory capacity for fuzzy sets and processing time in correction of fuzzy sets in learning systems.

First, an assessment is made of the suitability of definition by α -level sets. Second, an interface is proposed, which converts analog voltage to digital membership grade directly. It is necessary for analog-input inference operation with digital processing. Third, the method of inference operation is described, based on architecture of inference engine proposed here. Then, illustrative examples are shown by using fuzzy relations R_c and R_p with max-min composition. Finally, a brief discussion on processing time is presented.

1. まえがき

ファジィ推論は、制御、モデリング、人工知能など多くの分野でその応用が試みられている。特に、制御に於いては、ファジィ制御と称され、多くの応用事例によりその有効性が確認されている。

従来、ファジィ推論の演算は、対象とするファジィ集合が実数あるいは自然数などの空間上にある場合、そのファジィ集合をメンバーシップ関数で定義して行っていた。一方、ファジィ集合は、表現定理によれば α -レベル集合の集合族によっても定義することが可能である。 α -レベル集合は、ファジィ集合の演算や関係を計算する場合に非常に有効な表現形態である。また、ファジィ論理処理システムをデジタル回路によりハードウェアで実現する場合を考えると、ファジィ集合を記憶するのに必要なメモリ容量や、ファジィ集合を学習により逐次修正する場合などに要する時間に於いても α -レベル集合の集合族による表現は有効である。

本論文では、対象とするファジィ集合をすべて α -レベル集合の集合族で統一的に表現するという条件の下に、アナログ入力を可能としたファジィ推論エンジンを構成する手法について提案する。推論エンジンは、デジタル処理型のファジィ推論が可能のように、アナログ値を直接にデジタル表現されたメンバーシップ・グレードに変換する機能を有する。更に、ファジィ集合入力の状態にも対応可能なアーキテクチャとしている。そのため、 α -レベル集合毎に推論が可能となるよう考慮し、アナログ入力とファジィ集合入力に共通の処理と固有の処理を分離した構成としている。

以下、第2章では、ファジィ集合を α -レベル集合の集合族で表現した場合の有効性について簡単に述べる。第3章では、アナログ値をデジタル表現されたメンバーシップ・グレードに変換するアルゴリズム及びそのハードウェア構成について述べる。第4章では、 α -レベル集合によるファジィ推論演算の基本的概念を説明し、本論文で提案するファジィ推論エンジンのアーキテクチャを示す。更に、そのアーキテクチャに従って、種々の含意規則に基づくファジィ推論演算のアルゴリズムについて説明する。最後に、第5章でまとめを行う。

2. ファジィ集合の α -レベル集合表現による効果

2.1 α -レベル集合の定義

空間 U 上のファジィ集合 A を定義するメンバーシ

ップ関数を $\mu_A(u)$ とすると、 A の α -レベル集合 A_α は次式で定義される。

$$A_\alpha = \{u \mid \mu_A(u) \geq \alpha, u \in U\}; \\ \alpha \in (0, 1] \quad (1)$$

上式から明らかなように、 α -レベル集合はクリスプ集合(非ファジィ集合)である。また、 A が凸ファジィ集合の場合は、 A_α は閉区間となる。凸ファジィ集合とは、メンバーシップ関数 $\mu(u)$ が次式の条件を満足するファジィ集合をいう。

$$\mu(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq \\ \min[\mu(u_1), \mu(u_2)]; \\ 1 \geq \lambda \geq 0 \quad (2)$$

式(2)の条件を満たす関数を準凹関数という。

ファジィ論理処理では、凸ファジィ集合を扱うことが多い。ファジィ制御においてもその例外ではない。そのため、本論文では対象とするファジィ集合はすべて凸ファジィ集合とする。従って、 α -レベル集合は閉区間となるため、次のように表現する。

$$A_\alpha = [u_\alpha^l, u_\alpha^r] \quad (3)$$

凸ファジィ集合の場合は、その α -レベル集合が上式のように2つのパラメータで表現でき、種々の処理においても都合が良い。

2.2 α -レベル集合表現の効果

ここでは、ファジィ論理処理システムをデジタル回路により専用ハードウェアで実現する場合を考える。メンバーシップ関数を基本に考えると、任意のファジィ集合を記憶するのに必要なメモリ容量は全空間の要素数 N だけ必要になる。これは、全空間の要素毎にメンバーシップ・グレードを記憶する必要があるからである。ところが、 α -レベル集合で表現すると、メンバーシップ・グレードを M レベルで表現する場合、 $2M$ のメモリ容量となる。これは、凸ファジィ集合を仮定していることから、 α -レベル集合は閉区間となり、その左端と右端の2つの値を記憶すればよいからである。すべてのメンバーシップ・グレードに対する α -レベル集合を記憶することを考えると、メンバーシップ・グレードのレベル数 M の2倍に相当するメモリ容量が必要になる。

以上のことから、次のことが言える。

メンバーシップ関数を記憶する場合は、全空間の

要素数を多くするとそれに比例して必要なメモリ容量が増加する。これに対し、レベル集合を記憶する方法では、全空間の要素数に無関係となり、メンバーシップ・グレードのレベル数にのみ依存する。メンバーシップ・グレードのレベル数はそれほど多く必要としないと考え、対象とするファジィ集合のダイナミックレンジを大きく採るためには α -レベル集合を記憶する方が有利である。メモリ容量が少ないことはメモリ容量自体の問題のみならず、ファジィ集合を学習により逐次修正などを行う場合に、修正時間の短縮につながる。

また、ファジィ推論演算を行う上でも、 α -レベル集合による表現が演算量の点で有用であることが後の議論でわかる。更に、拡張原理⁽¹⁾によりファジィ集合間の演算を行う上でも、 α -レベル集合による表現は有効であり、ファジィ論理処理においても都合のよい表現形態である。

以上の観点から、本論文では、ファジィ推論エンジンを α -レベル集合の概念に基づいて構成することを考える。その一つの形態として、アナログ値とデジタル表現されたファジィ集合の両タイプを入力可能とするデジタル処理型のファジィ推論エンジンについて議論する。

3. α -レベル集合の概念に基づいた

アナログ/メンバーシップ・グレード変換

3.1 アナログ/メンバーシップ・グレード変換の

原理とアルゴリズム

凸ファジィ集合の場合、そのメンバーシップ関数が準凹関数であることから、一般に次の条件を満足する。

$$A \alpha' \supset A \alpha'', \quad \alpha' < \alpha'' \quad (4)$$

すなわち、

$$[u_1^{\alpha'}, u_2^{\alpha'}] \supset [u_1^{\alpha''}, u_2^{\alpha''}] \quad (5)$$

この性質を利用すると、入力であるアナログ値 u の α -レベル集合に属する態様によって、メンバーシップ・グレードに変換することができる。直接的には以下に示すようなアルゴリズムになる⁽²⁾。なお、ここでメンバーシップ・グレードを、

$$\alpha_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M;$$

とし、互いに次の関係にあるものとする。

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1 \quad (6)$$

アルゴリズム I :

- ① 最も下位のレベルのメンバーシップ・グレード α_1 に対する α -レベル集合 $A \alpha_1$ に u が属するか否かを調べる。
- ② ①における処理の結果、 u が $A \alpha_1$ に属していなければ、 u のメンバーシップ・グレードは、“0”となる。 $A \alpha_1$ に属していれば、次に $A \alpha_2$ に u が属しているか否かを調べる。
- ③ ②における処理の結果、 u が $A \alpha_2$ に属していなければ、この段階で u のメンバーシップ・グレードは、 α_1 となる。 $A \alpha_2$ に属していれば、更に、 $A \alpha_3$ に u が属しているかどうかを調べる。
- ④ 以後、同様にしてメンバーシップ・グレードが決定されるまで、より高いレベルの α -レベル集合へと u の属性を調べていく。

上記のアルゴリズムは容易に実現できるが、ウィンドウ・コンパレータによる比較演算がメンバーシップ・グレードのレベル数に相当する回数だけ必要となる。ところが、式(4)から明らかなように、ある α -レベル集合 $A \alpha$ に対する u の属性を調べ、 $A \alpha$ に属しているならばこれよりも大きいメンバーシップ・グレードに対する α -レベル集合に属する可能性がある。また、 $A \alpha$ に属していなければ、これよりも小さいメンバーシップ・グレードに対する α -レベル集合にのみ属する可能性がある。この性質を用いると、逐次比較型A/D変換器⁽³⁾におけるアルゴリズムが利用できる。このアルゴリズムを用いれば、メンバーシップ・グレードのレベル数 M に対し、 $\log_2 M$ 回の比較演算でよい。すなわち、メンバーシップ・グレードを K ビットで表現した場合は、 K 回の比較演算でよい。以下、メンバーシップ・グレードは、 2^k のレベル数とし、 K ビットで表すものとする。

逐次比較型A/D変換器におけるアルゴリズムを用いたアナログ/メンバーシップ・グレード変換器のハードウェア構成を図1に示す。メンバーシップ・グレードを K ビットで表現するので、 K ビットの逐次比較レジスタSAR (Successive Approximation Register)を用いる。メモリ u_L 、 u_R は、変換に用いるファジィ集合 A の α -レベル集合 $A \alpha$ である閉区間の左端、右端をそれぞれ記憶している。両メモリとも、1番地に最も低いレベルの α -レベル集合に相当する閉区間の左端、右端が格納されており、上位のアドレスに行くに従い、順次、

高いレベルの α -レベル集合に相当するそれらが格納されているとする。以下、図1に従って変換のアルゴリズムを説明する。

アルゴリズムⅡ：

- ① まず、KビットのSARは、そのMSBを”1”にする。SARの出力はメモリ u_L 、 u_R に与えられ、メンバーシップ・グレード α_2^{k-1} に対する α -レベル集合 $A_{\alpha_2^{k-1}}$ である閉区間の左端 $u_1^{\alpha_2^{k-1}}$ 、右端 $u_2^{\alpha_2^{k-1}}$ をそれぞれ出力する。
- ② $u_1^{\alpha_2^{k-1}}$ 、 $u_2^{\alpha_2^{k-1}}$ は、D/A変換器によりそれぞれアナログ電圧 $a_1^{\alpha_2^{k-1}}$ 、 $a_2^{\alpha_2^{k-1}}$ に変換され、ウィンドウ・コンパレータに加えられる。このウィンドウ・コンパレータは、入力電圧 u に対し次式を満足するかどうかを判断する。

$$a_1^{\alpha_2^{k-1}} \leq u \leq a_2^{\alpha_2^{k-1}}$$

この判断結果は、SARに入力される。

- ③ 上述の処理により得られる判断結果に応じ、SARは次の処理を行う。

- i) $a_1^{\alpha_2^{k-1}} \leq u \leq a_2^{\alpha_2^{k-1}}$ が成立した場合：

SARはMSBを”1”にした状態で、(1/2)MSBの重みに相当する桁のビットを”1”にし、メモリ u_L 、 u_R にアドレスとして与える。その結果、メンバーシップ・グレード $\alpha_{(2^{k-1} + 2^{k-2})}$ に対する α -レベル集合である閉区間の左端、右端がそれぞれメモリ u_L 、 u_R から出力される。これらの値はD/A変換され、再びウィンドウ・コンパレータに加えられる。

- ii) $a_1^{\alpha_2^{k-1}} \leq u \leq a_2^{\alpha_2^{k-1}}$ が不成立の場合：

SARはMSBを”1”から”0”にし(1/2)MSBの重みに相当する桁のビットを”1”にして、メモリ u_L 、 u_R にアドレスとして与える。その結果、 α_2^{k-2} のメンバーシップ・グレードに対する α -レベル集合である閉区間の左端、右端がそれぞれメモリ u_L 、 u_R から出力される。これらの値はD/A変換され、再びウィンドウ・コンパレータに加えられる。

- ④ 以上の動作を同様に繰り返し、SARにおけるそれぞれのビットの”1”、”0”を求めていく。LSBが決定した段階で、SARの出力は変換結果として u のメンバーシップ・グレードを与える。

なお、SARは逐次比較型A/D変換器におけるそれと同一のものが使用でき、シフトレジスタにより容易に実現できる⁽³⁾。

3.2 変換例

前節で説明したSARを用いたアルゴリズムに従い、アナログ/メンバーシップ・グレード変換の例を以下に示す。ここでは、メンバーシップ・グレードを3ビットで表現し、図2に示すメンバーシップ関数から得られる α -レベル集合を用いて変換するものとする。よって、 α -レベル集合は7つ(M=7)となる。入力電圧 u は、同図に示す入力空間上の位置にあるものとする。

- ① SARはMSBを”1”、すなわち、”100”にする。メモリ u_L 、 u_R のアドレス”100”のそれぞれの内容をD/A変換する。図2に示す

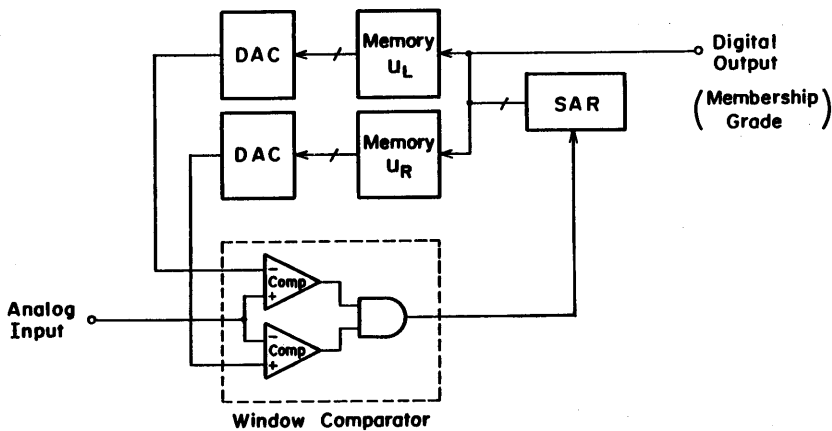


図1 アナログ/メンバーシップ・グレード変換器のハードウェア構成

ように、入力電圧 u はこの結果得られたアナログ電圧が与える閉区間 $[a^{\alpha_1}, a^{\alpha_4}]$ に含まれる。よって、ウィンドウ・コンパレータの出力 O_w は、"1" となる。

- ② O_w は "1" であるから、SARはMSBを "1" に保った状態で(1/2) MSBの重みに相当する桁のビットを "1" にする。すなわち、SARの内容を "110" にする。
- ③ SARの内容 "110" をアドレスとして、メモリ u_L 、 u_R の内容を読み出し、これらの内容をD/A変換する。図2に示すように、入力電圧 u はこの結果得られたアナログ電圧が与える閉区間 $[a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}]$ に含まれない。よって、ウィンドウ・コンパレータの出力 O_w は、"0" となる。
- ④ O_w は "0" であるから、(1/2) MSBの重みに相当する桁のビットを "0" に戻し、(1/4) MSBの重みに相当する桁のビットを "1" にする。すなわち、SARの内容を "101" にする。
- ⑤ SARの内容 "101" をアドレスとして、メモリ u_L 、 u_R の内容を読み出し、これらの内容をD/A変換する。図2に示すように、入力電圧 u は、この結果得られたアナログ電圧が与える閉区間 $[a^{\alpha_4}, a^{\alpha_5}]$ に含まれるので、ウィンドウ・コンパレータの出力 O_w は、"1" となる。この段階でLSBが決定しているため、SARの内容である "101" を変換結果として出力し、変換処理を終了する。

4. α -レベル集合によるファジィ推論エンジン

4.1 対象とするファジィ推論

本論文で対象とするファジィ推論について、メンバーシップ関数を用いた表現に従って述べる。ここでは、直接法によるファジィ推論を対象とする。すなわち、次に示す形式の推論について議論する。

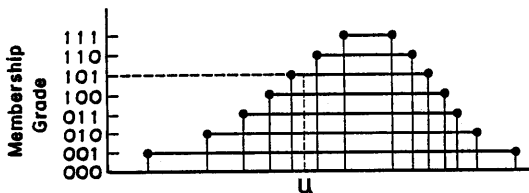


図2 アナログ/メンバーシップ・グレード変換の例

条件命題: If x is A then y is B .

事実 : x is A' .

結論 : y is B' .

但し、 A 、 A' は空間 U 上のファジィ集合、 B 、 B' は空間 V 上のファジィ集合である。これらのファジィ集合のメンバーシップ関数をそれぞれ、 $\mu_A(u_i)$ 、 $\mu_{A'}(u_i)$ 、 $\mu_B(v_j)$ 、 $\mu_{B'}(v_j)$ とする。すなわち、

$$A = \sum_i \mu_A(u_i) / u_i, \quad B = \sum_j \mu_B(v_j) / v_j$$

$$A' = \sum_i \mu_{A'}(u_i) / u_i, \quad B' = \sum_j \mu_{B'}(v_j) / v_j$$

また、ファジィ推論における含意公式および合成規則は以下の定義に従うものとする。

(1) 含意公式

ファジィ制御などによく用いられる次の2つのファジィ関係を用いる。但し、ここで各ファジィ関係について、

$$R = A \times U \rightarrow V \times B \\ = \sum_{i,j} [\mu_A(u_i) \rightarrow \mu_B(v_j)] / (u_i, v_j)$$

とし、 $\mu_A(u_i) \rightarrow \mu_B(v_j)$ を次のように定義する。

$$R_C : \mu_A(u_i) \xrightarrow{C} \mu_B(v_j) \\ = \sum_{i,j} (\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(v_j)) / (u_i, v_j) \quad (7)$$

$$R_P : \mu_A(u_i) \xrightarrow{P} \mu_B(v_j) \\ = \sum_{i,j} (\mu_A(u_i) \cdot \mu_B(v_j)) / (u_i, v_j) \quad (8)$$

(2) 合成規則

次式で定義される max-min 合成 \circ を用いる。

$$B = A' \circ (A \times U \rightarrow V \times B) \\ = \sum_j \bigvee_i \{ \mu_{A'}(u_i) \wedge [\mu_A(u_i) \rightarrow \mu_B(v_j)] \} / v_j \quad (9)$$

ここで、 \vee 、 \wedge はそれぞれ max演算、min演算を表す。

従来のファジィ推論の演算は、メンバーシップ関数を用いて次のように行うことになる。まず、推論の前件部を与えるファジィ集合 A と後件部を与えるファジィ集合 B から含意公式により得られるファジィ

イ関係Rを求める。更に、このファジィ関係Rと事実を与えるファジィ集合A'を用いて、式(9)に示した合成規則により推論結果であるファジィ集合B'を得る。

4.2 α -レベル集合上におけるファジィ推論

従来は、ファジィ集合をメンバーシップ関数で定義し、ファジィ推論を実行していた。ここでは、ファジィ集合を α -レベル集合で定義し、 α -レベル集合毎に推論結果を得る手法について述べる。

α -レベル集合上におけるファジィ推論とは、事実を与えるファジィ集合A'の α -レベル集合A' α とファジィ関係Rの α -レベル集合R α から推論結果であるファジィ集合B'の α -レベル集合B' α を得ることを言う。これは、max-min合成が次式の性質を満足することより可能となる。

$$B'\alpha = A'\alpha \circ R\alpha \quad (10)$$

すなわち、 α -レベル集合毎にmax-min合成が可能であることによる。式(10)から明らかなように、推論結果であるファジィ集合の α -レベル集合は、直積A' α ×VとR α の論理積の結果を空間V上に射影を施すことによって得られる。

α -レベル集合上の推論は、対象とするファジィ集合を凸ファジィ集合とすると、演算を簡略化することができる。これについては第4.4節で述べる。

4.3 ファジィ推論エンジンのアーキテクチャ

図3に本論文で提案するファジィ推論エンジンのアーキテクチャを示す。以下に各部の機能を説明する。

AMC (Analog/Membership-grade Conversion):

前述のようにアナログ値をデジタルのメンバーシップ・グレードへ変換する機能である。

マッピング・テーブル (MT; Mapping Table):

AMCまたはPP(後述)の出力を用い、推論結果としてB α におけるどの α -レベル集合を選択すべきかを与える。この処理は適用する含意公式に依存する。具体的な手法は次節で説明する。出力形態は、B α -メモリのアドレスA₁~A_Mである。但し、推論結果が空集合となる場合はアドレスA₀を出力するものとする。

B α -メモリ (B α -M; B α -Memory):

B α 及び空集合を意味する記号を記憶している。アドレスA₁~A_Mにそれぞれ対応して、B α ₁~B α _Mが記憶されている。アドレスA₀には、空集合を意味する記号 ϕ を記憶している。

PP (Projection Process):

A' α ×VとR α の論理積の結果を空間V上に射影を施す処理を行う。具体的な出力パラメータは、第4.2節で例を通して説明する。ここでの処理も含意公式に依存する。

4.4 レベル集合に基づいたファジィ推論演算

本節では、図3に示すアーキテクチャを基に、前述の種々の含意公式によるファジィ推論演算の手法について述べる。

4.3.1 Rcによる推論演算

まず、Rcの α -レベル集合を求めることを考える。 α -レベル集合上の演算には次のような性質がある。

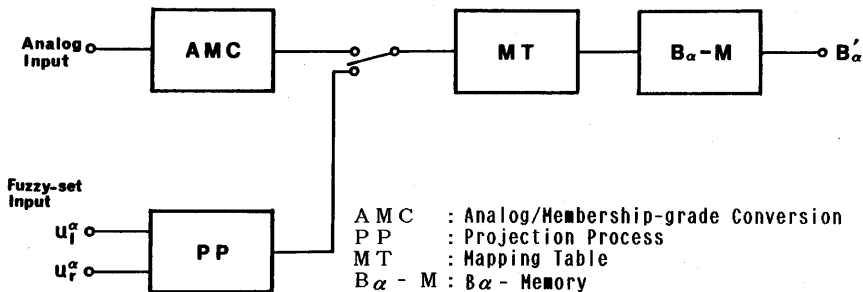


図3 本提案によるファジィ推論エンジンのアーキテクチャ

$$(P \cap Q) \alpha = P \alpha \cap Q \alpha \quad (11)$$

ここで、P、Qはファジィ集合であり、 $(P \cap Q) \alpha$ は $P \cap Q$ の α -レベル集合を表す。従って、式(11)より次式が得られる。

$$R c \alpha = \sum_{i,j} (\mu_{A\alpha}(u_i) \wedge \mu_{B\alpha}(v_j)) / (u_i, v_j) \quad (12)$$

上式に基づいて $R c \alpha$ を図示すると図4のようになる。同図に示すように、空間 $U \times V$ 上における直積 $A \alpha \times B \alpha$ となる。ファジィ集合は α -レベル集合で表現しているため、ファジィ関係は α -レベル集合を与える閉区間の左端、右端の情報で表現される。ここでは、推論演算が容易になるように、各 u_i^α 、 u_r^α に対する空間 V 上の閉区間あるいは空集合として表現している。図4では、その閉区間を太線で示している。

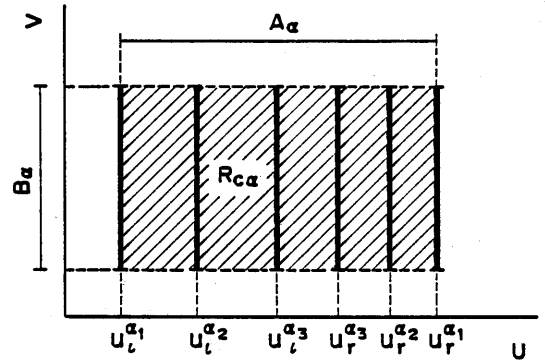


図4 R c の α -レベル集合 $R c \alpha$

第4.2節で述べたように、 α -レベル集合毎の推論結果は、 $R c \alpha$ と $A' \alpha \times V$ の論理積の結果を空間 V 上に射影することによって得られる。よって、この論理積が空集合とならない限り、射影の結果は $B \alpha$ となる。この論理積が空集合となるか否かは、事実を与えるファジィ集合 A' の α -レベル集合 $A' \alpha$ と $A \alpha$ の論理積が空集合となるか否かを調べればよい。図3におけるPPではこの処理を行って、推論結果の α -レベル集合 $B' \alpha_i$ を求める場合、次式に従うパラメータ α° を出力する。

$$\alpha^\circ = \begin{cases} \alpha_i & : A' \alpha_i \cap A \alpha_i \neq \phi \\ \alpha_\phi & : A' \alpha_i \cap A \alpha_i = \phi \end{cases} \quad (13)$$

マッピング・テーブルは、入力 α° に対して次式に従うテーブルが選択される。

$$\alpha_b = \begin{cases} \alpha_i & : \alpha_i \leq \alpha^\circ \\ \alpha_\phi & : \alpha_i > \alpha^\circ \text{ or } \alpha^\circ = \alpha_\phi \end{cases} \quad (14)$$

; $i = 1, 2, 3, \dots, M$

このマッピング・テーブルは、 α_i 、 α_ϕ をキーとし、後に述べるアナログ入力に対する推論における処理と共用するために上式で定義している。式(14)は、式(7)による $R c$ の定義式における \min 演算から導かれる。

α° により選択されたマッピング・テーブルから、 α_i に相当するキーにより α_b を得る。マッピング・テーブルの最終的な出力は、 $B \alpha$ -メモリに対す

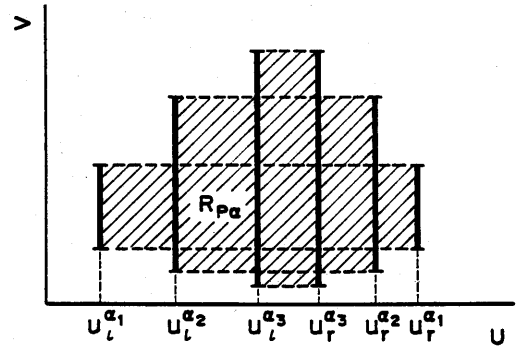


図5 R p の α -レベル集合 $R p \alpha$

るアドレスである。 α_b が α_i を与えるときは $B \alpha_i$ を格納するアドレス A_i を、 α_ϕ を与えるときは ϕ を格納するアドレス A_ϕ を出力する。

マッピング・テーブルの出力するアドレスにより、 $B \alpha$ -メモリから読み出すことによって推論結果を α -レベル集合で得る。以上の処理を $i = 1, 2, 3, \dots, M$ に対して行うことで推論結果を与えるファジィ集合の α -レベル集合が全て求まる。

ファジィ制御のように、 A' が非ファジィ集合で一つの数値 u に対して特性関数が "1" を与える場合、上記の推論演算は更に簡略化される。すなわち、 u が $A \alpha$ に含まれるか否かを調べ、含まれていれば $B \alpha$ が推論結果となり、含まれていなければ推論結果は空集合となる。また、 A が凸ファジィ集合であ

ることを考慮すれば、 u の A に対するメンバーシップ・グレードが α' の場合、 u は α' 以下の α -レベル集合に必ず属していることになる。よって、推論結果は、 α' 以下のメンバーシップ・グレードに対する B' の α -レベル集合はそれぞれ α' 以下のメンバーシップ・グレードに対する α -レベル集合 $B\alpha$ となる。また、 α' より大きいメンバーシップ・グレードに対する α -レベル集合はすべて空集合となる。従って、まず、 u をAMCで A へのメンバーシップ・グレードに相当する値 α° に変換し、この α° に対するマッピング・テーブルを選択する。 α_i をキーとしてアドレスを生成し、 $B\alpha$ -メモリから読みだして推論結果 $B'\alpha_i$ を得る。

4.3.2 Rpによる推論演算

まず、Rpの α -レベル集合 $Rp\alpha$ を求めることを考える。ファジィ集合は、 α -レベル集合で表現しているの、その α -レベル集合を与える閉区間の左端 u_i^α 、右端 u_r^α に対して $Rp\alpha$ が後件部の空間 V 上の閉区間あるいは空集合として求まる。その例を図6に太線で示す。Rpの定義式から明らかのように、メンバーシップ関数による定義で考えた場合、このファジィ関係は u_i^α 、 u_r^α に対し、後件部を与えるファジィ集合 B のメンバーシップ関数に α を乗じた関数となる。このようにして得られた関数は、準凹関数という性質を保存しているため、その α -レベル集合は閉区間となる。この閉区間が図6に太線で示した空間 V 上の閉区間に相当する。 $Rp\alpha_i$ における $u_i^{\alpha_i}$ 、 $u_r^{\alpha_i}$ に対するこれらの閉区間 $I\alpha_{i1}$ は次のようにして得ることができる。

ファジィ集合は α -レベル集合で表現しているため、上述のように α を乗じることは、各メンバーシップ・グレードに対して α を乗じることによって得られるマッピング・ルールで、 $B\alpha$ のうちの一つの α -レベル集合を選択し割り当てることに相当する。すなわち、求めるべき閉区間 $I\alpha_{i1}$ においては、

$$\alpha_k \cdot \alpha_j = \alpha_i$$

より、

$$\alpha_k = \alpha_i / \alpha_j \quad (15)$$

から求まる α_k に対する B の α -レベル集合 $B\alpha_k$ がその求めるべき閉区間 $I\alpha_{i1}$ である。なお、マッピング・ルールは、式(15)から $j = i, \dots, H$ に対して求めることになる。なぜなら、 $Rp\alpha_i$ において、 $\alpha < \alpha_i$ の場合における u_i^α 、 u_r^α に対す

る閉区間 $I\alpha_{i1}$ は存在せず、空集合となるからである。なお、式(15)から得られる値が"1"を越える場合においても、 $I\alpha_{i1}$ は存在せず空集合となる。

次に、 $A'\alpha_i$ と $Rp\alpha_i$ の論理積を空間 V 上に射影することを考える。ここでは、次の2つの場合について考えなくてはならない。

i) 次式を満足する場合：

$$A'\alpha_i \cap A\alpha_m \neq \phi \quad (16)$$

推論結果を与えるファジィ集合 B' の α -レベル集合は、閉区間 $I\alpha_{i1}$ となる。

ii) 式(16)を満足しない場合：

$A'\alpha_i$ が $[u_i^{\alpha_i}, u_r^{\alpha_i}]$ で与えられるとする。 $u_i^{\alpha_i}$ 、 $u_r^{\alpha_i}$ の A に対するメンバーシップ・グレードをそれぞれ $\alpha_{i'}$ 、 $\alpha_{i''}$ とし、

$$\alpha_m = \max(\alpha_{i'}, \alpha_{i''}) \quad (17)$$

とおくと、 $\alpha_m \geq \alpha_i$ の場合、閉区間 $I\alpha_{i1}$ が推論結果を与えるファジィ集合 B' の α -レベル集合となる。 $\alpha_m < \alpha_i$ の場合は、推論結果は空集合となる。すなわち、

$$\alpha^\circ = \begin{cases} \alpha_m & : A'\alpha_i \cap A\alpha_m \neq \phi \\ \alpha_m & : A'\alpha_i \cap A\alpha_m = \phi \\ & \text{and } \alpha_m \geq \alpha_i \\ \alpha_\phi & : A'\alpha_i \cap A\alpha_m = \phi \\ & \text{and } \alpha_m < \alpha_i \end{cases} \quad (18)$$

上述の手法で α -レベル集合により推論結果が得られるのは、次式が成立することによる。

$$u_i^{\alpha_1} \leq u_i^{\alpha_2} \leq u_i^{\alpha_3} \leq \dots \leq u_r^{\alpha_3} \leq u_r^{\alpha_2} \leq u_r^{\alpha_1} \quad (19)$$

$$I\alpha_{i1} \subseteq I\alpha_{i2} \subseteq I\alpha_{i3} \subseteq \dots \subseteq I\alpha_{iH} \quad (20)$$

以上の α° を得るまでの処理をPPが行う。マッピング・テーブルは、式(15)より次式に従うテーブルが選択される。

$$\alpha_b = \begin{cases} \alpha_i / \alpha^\circ & : \alpha_i / \alpha^\circ \leq 1 \\ \alpha_\phi & : \alpha_i / \alpha^\circ > 1 \\ & \text{or } \alpha^\circ = \alpha_\phi \end{cases} \quad (21)$$

さて、ここでAが非ファジィ集合で、一つの値uに対して特性関数が"1"を与える場合を考える。uのAに対するメンバーシップ・グレードを α_j とすると、式(16)を満足する場合は、

$$\alpha_u = \alpha_j$$

となる。また、式(17)においては、

$$u_{\alpha_j}^{\alpha_j} = u,$$

$$u_{\alpha_j}^{\alpha_j} = u$$

と考えられるので、

$$\alpha_u = \alpha_j$$

となる。従って、閉区間 I_{α_j} が推論結果を与えるファジィ集合の α -レベル集合となる。

5. 演算量の比較

前章で述べた α -レベル集合上によるファジィ推論と等価なことをメンバーシップ・グレードによる定義で考えると、演算量は概略的に次のようになる。

空間U、Vの要素数をそれぞれ N_u 、 N_v とすると、メンバーシップ関数による定義では、min演算を $N_u \times N_v$ 回、その結果のmax値を得るのに比較演算を $N_u \times M_v$ 回必要とする。よって、演算回数の合計を求めると、

$$2 \times (N_u \times M_v)$$

となる。簡単のため、 N_u と N_v がほぼ等しいとすれば、演算量は、全空間の要素数の2乗に比例することがわかる。これに対し α -レベル集合によるファジィ推論では、メンバーシップ・グレードのレベル数Mに比例する。

従って、全空間の要素数が多い場合は、 α -レベル集合による推論演算の方が有利と考えられる。従って、ファジィ集合を学習により逐次修正することを考えた場合の優位性に加え、推論演算にも効果が現れる。

6. むすび

ファジィ集合をすべて α -レベル集合で表現するという条件の下に、アナログ入力を可能としたデジタル処理型のファジィ推論エンジンのアーキテクチャを提案した。このアーキテクチャは、デジタル表現されたファジィ集合の入力にも対応可能なよ

うになっている。

まず、ファジィ集合を α -レベル集合の集合族で定義することの有効性について示した。次に、アナログ入力の推論演算で必要となるアナログ/メンバーシップ・グレード変換は、逐次比較型A/D変換における変換アルゴリズムを応用できることを示した。更に、 α -レベル集合上でのファジィ推論の演算手法について述べ、推論エンジンのアーキテクチャを提案した。このアーキテクチャを基に、具体的な演算手法を例を用いて説明し、最後に、演算量について簡単に考察を加えた。

文 献

- (1) Zadeh, L.A.: "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", Part 1, 2 and 3, Information Sciences, 8, pp. 199-249, 301-357 (1975), 9, pp. 43-80 (1976).
- (2) 上原, 他: "アナログ-ファジィ論理インターフェース用データ変換器", 電子通信学会論文誌(c), J67-C, 4, pp. 391-396 (1984).
- (3) 相良岩男: "マイコンエッジのA/D・D/A変換技術", 日刊工業新聞社 (1980).