知識工学と人工知能 63 − 7
(1 9 8 9. 3. 1 4)

問題の簡約可能性に着目した不定積分法の学習

白井豊，白石圭子，小野典彦，翁長健治

（広島大学工学部）

教師から与えられた種々の例題を解決しながら，その解決事例に解析を施し，そこから有用な探索制御知識を学習することのできる問題解決器の枠組みが数多く提案されている．これらが展開する問題解決は，与えられた例題をその解に導くためのオペレータ系列を前向きあるいは後向きに網羅的に探索することに基づいている．しかし，不定積分法のような問題領域では，この種の網羅的な探索だけでは解決が難しい問題が多数存在する．このような場合，われわれは問題を直接その解決状態に導こうとするのではなく，それを段階的に簡約化しながら問題解決を進めようとする．本稿では，このような観点からまず，問題の簡約化機構をもつ問題解決器の枠組みを提案する．ついで，その簡約化プロセスを制御するための戦略的な知識の学習機構を述べると共に，それが獲得する知識の操作性についても考察を行う．

Learning Indefinite Integration Strategy Based on Problem Reduciblity

Yutaka SHIRAI, Keiko SHIRAISHI, Norihiko ONO and Kenji ONAGA

Faculty of Engineering, Hiroshima University, Saijo, Higashi-Hiroshima 724

So far various problem solvers have been proposed with capability to learn useful search control knowledge from their own problem solving experience. Most of them, however, adopted forward search to get a solution of a given problem before their learning phase, so there exist problems, such as indefinite integration, that are inherently difficult to solve by exhausive forward search alone, due to infinite search space. Encountered such a problem, we set up a subproblem, which is known to be directly solved by a single operator or macro operator and attempt to reduce the original problem to the specified subproblem. In this paper, we present a framework of a problem solver based on problem reducibility augmented by capability to automatically learning reducibility and reduction strategy, and finally discuss operationality of thus acquired strategic knowledge from new viewpoint.

1 はじめに

知識処理技術の高度化に伴い，**“知識獲得ボトルネック”** がエキスパートシステム等の知識システム構築上の障害となりつつある．それに伴い，その解消を目的とした，知識の自動獲得に対する研究が盛んに行われており [Michalski 83,86][Marcus 88]，例題からの学習を問題解決における知的制御に応用する試みが注目を集めている [Mitchell 83][Minton 88]．

Mitchell の手法では，基本的な問題状態書換えルール（オペレータ）による前向き網羅適用により問題解決をした後，その解法例の解析に基づき，オペレータ前提部の洗練化，および，マクロオペレータの獲得を行い，問題の解法戦略を学習させるものである．

しかし，問題解決空間が広大で複雑になると，学習以前に，前向きの横型探索では解決できない場合が生じる．このような場合に対処するためには，なんらかの副目標を設定してやり，探索を後ろ向きに制御する必要性がある．本稿では，まず，不定積分を例題として，問題の簡約可能性に着目することにより，後ろ向き探索機能を付加した問題解決の基本的枠組みを提案する．（これを**簡約機構**と呼ぶ）．次に，簡約化可能性に基づく問題解決戦略の学習について述べる．学習手法としては，近年，脚光を浴びつつある**説明に基づく一般化 [Explanation Based Generalization，以下ＥＢＧという]** [Mitchell 86][DeJong 86] を応用する．また，その際に現在ＥＢＧの中心的トピックスとなりつつある **“操作性規範 (operationality criterion)”** について，検証する．

2 不定積分法における簡約可能性

不定積分法の問題は，与えられた問題を初期状態，解決状態（$\int$記号がなくなった状態）を目標状態，基本公式をオペレータとするならば，『初期状態から目標状態へ導くのオペレータの適用系列の探索問題』と定式化できる．

しかし，不定積分法では，目標状態に基づき既存のオペレータを前向きに網羅的に適用しても，解けない問題も存在する．オペレータの中には，問題状態に対し部分的に適用するものや，前提部に，未決定変数が存在するものがある．このようなオペレータを前向きに適用するためには，なんらかの戦略によって，前もって適用部分および未決定変数を特定する必要がある．しかし，そのような特定戦略を，前向きに探索中に組込むことは困難である．

例えば，以下に示す $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$（以下この問題を例題 (1) とする）などは，その典型である．

【例題１】

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$$
$$\Downarrow op_a$$
$$\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$$
$$\Downarrow op_b$$
$$\int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{(x+1)^2}{4}+1}dx$$
$$\Downarrow op_c$$
$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{4}+1}dx$$
$$\Downarrow op_d$$
$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}$$
$$\Downarrow op_e$$
$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\times\frac{1}{2}dx$$
$$\Downarrow op_f$$
$$\frac{1}{8}\times\int \frac{1}{t^2+1}dx$$
$$\Downarrow op_g$$
$$\frac{1}{8}\tan^{-1}t$$
$$\Downarrow op_h$$
$$\frac{1}{8}\tan^{-1}(\frac{x+1}{2})$$

計算機にこれと同一の処理を前向きの網羅探索だけで行わせることは不可能である．特に，オペレータ op_b

$$\frac{A}{B}\Rightarrow\frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{C}}$$

適用の際の $C=4$ の同定，および，op_d, op_e の適用部分の決定は，われわれ人間も，前向きに推論しているとは考え難い．おそらく，既存のオペレータ

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow tan^{-1}x$$

を適用することを副目標にして，以下の探索をそれに基づき簡約できるように，後ろ向きに制御していると推察できる．そして，その副問題の設定基準の多くは経験的に獲得されたものであると考えられる．

本稿では，このような段階的に問題の簡約を施しながら解決を試みる簡約機構を，問題解決システムに組込むことにより探索の効率化を行う．

さらに，上述のような，提示された問題を直接解決状態に変換するオペレータ（このようなオペレータを称して，**直接解決オペレータ**とする）を保持していなくとも，問題を逐次的に簡約化するオペレータによって解決できる可能性を，**簡約可能性**と定義する．この簡約可能性に着目すると，不定積分の個々の問題解決は，副目標への後ろ向きと前向き簡約を適用する“簡約化プロセス”，および，従来通りの網羅探索を施す“直接解決プロセス”に分離することができる．

【問題解決プロセス】

1. 直接解決プロセス
   (a) 前向きの網羅探索
2. 簡約プロセス
   (a) 前向きの網羅探索
   (b) 副目標による後ろ向き探索

3 学習システムの構成

不定積分法のような問題空間においては，基本的オペレータを前向きに網羅適用していたのでは，状態数が爆発し，解決不能に陥る場合がある．このような問題を解消するために，以下のような簡約機構を保持した学習システムを設計する．

1. 問題空間を直接解決プロセス，ならびに，簡約プロセスに分割し，両プロセスを逐次的に適用することにより，問題解決の効率化をはかる．
2. 獲得した解法（オペレータの適用系列）に，洗練化を施すことにより，マクロオペレータの獲得を行う．

問題解決モジュールは，まず，直接解決プロセスにおいて，従来通りに前向きの横型探索を行う．ただし，適用されるオペレータ集合は，互に無競合で，かつ，個々のオペレータは，その適用により直接解決状態に変換できる能力を保有するものとする（これを，**直接解決オペレータ**と呼ぶ）．このオペレータ集合は，その前提部における類似性評価を容易にするために，その構造によって，階層化されている．

直接解決プロセスによって解決できない場合は，簡約プロセスが起動し，標準化サブプロセスによって，数式の標準化が施される（この際，適用されるオペレータを**標準化オペレータ**とする）．続いて，直接解決オペレータの適用可能状態に変換することを，副目標に掲げ，前向き後ろ向き両方向から問題の簡約が行われる．

前向き簡約プロセスにおいては，ある項（この部分を**"focus"**と呼ぶ）に着目し，その項が与えられた問題に存在するとき，定められたオペレータを前向きに適用することにより，簡約を試みる．（その際，適用されるオペレータを，**focus 駆動型オペレータ**と呼ぶ．）

後ろ向き簡約プロセスにおいては，まず，現問題状態と階層化された直接解決オペレータの前提部との間の類似性に基づき，副問題を設定する．次に，そのオペレータと現問題状態との差異（この部分を**"interest"**と呼ぶ）に着目し，それを解消する方向にオペレータの適用を後ろ向きに制御させる．しかし，前提部が一般的すぎ，相互間の競合が陽に起きるため，ある程度の網羅探索が必要とされるが，前向きに比べると遙かに少ない探索量ですむ．（その際適用されるオペレータを，**interest 駆動型オペレータ**と呼ぶ．）この3つのタイプのオペレータを称して，**簡約オペレータ**と云う．

以上のようにして，問題が解決されると，その解法は学習モジュールに送られ，オペレータ自動生成機構が起動する．

まず，解法からある基準（後で詳述）にしたがって，マクロオペレータの候補を抽出する．そして，その前提部を洗練化し，一般化する．さらに，その洗練化されたマクロオペレータを，後で述べる操作性規範に基づき評価した後，直接解決オペレータ集合に付加する．

したがって，学習システムの構成は，以下のようになる．

1. 問題解決モジュール
   (a) 直接解決プロセス
      - 直接解決オペレータ
   (b) 簡約プロセス
      i. 標準化サブプロセス
         - 標準化オペレータ
      ii. 前向き簡約サブプロセス
         - focus 駆動型簡約オペレータ
      iii. 後ろ向き簡約サブプロセス
         - interest 駆動型簡約オペレータ
2. 学習モジュール
   (a) マクロオペレータの抽出プロセス
   (b) 前提部の洗練化プロセス
   (c) 直接解決オペレータの更新・付加プロセス

4 機能性に基づくオペレータ集合

4.1 直接解決オペレータ (Direct-solution operator)

直接解決オペレータとは，その適用により解決状態（$\int$記号が存在しない状態）を直接導出できるオペレータのことをいう．（例．$\int \exp(x)dx \Rightarrow \exp(x)$，$\int \sinh x dx \Rightarrow \cosh x$ 等）このオペレータの前提部は，初期の状態では，極めて特殊化されているため，オペレータ間の競合がない．ゆえに，このオペレータの前提部は殆ど解決状態に等価と考えてよい．

したがって，直接解決オペレータの前提部は後ろ向き簡約プロセスにおける副目標の候補集合として機能する．木状の前提部はその類似度が容易に評価でき，interest 部を検出可能な状態で記述されていなくてはならない．直接解決オペレータを，前提部の構造的類似度によって以下のように木状の階層化を行う．即ち，各ルートにオペレータを記述する（図1参照）．

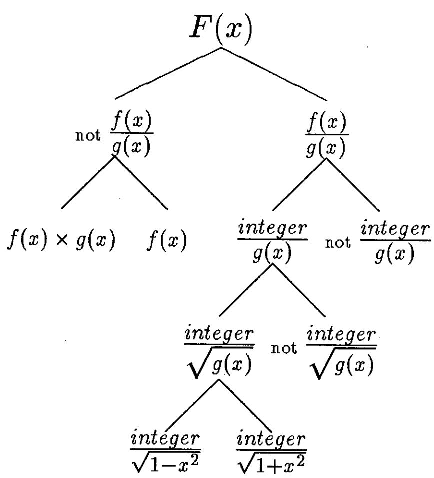
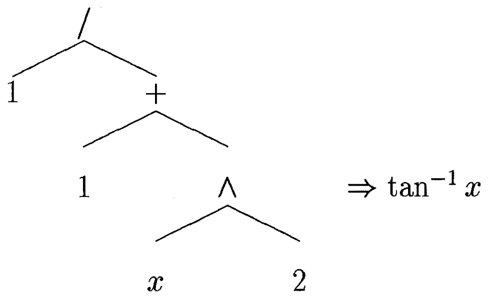


図1

さらに，interest 駆動型オペレータの適用に対し，interest 部を容易に検出可能にするために，個々のオペレータの前提部は，図2のように，2分木形式で記述されている．



$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \tan^{-1}$$

図2

後ろ向き簡約プロセスが起動すると，まず，この階層木にそって，現問題を含有するノードすなわち，最も類似度の高い集合を探索する．次に，そのノードの下位に記述されているオペレータ集合を，副目標の候補として抽出する．その上で，その全候補に対し，現問題との相違部分を interest として導出し，簡約を試みる．

また，簡約機構を介して学習されたオペレータは，それの副目標として参照した集合と同等のノードに逐次的に付加されていく．それによって，初期の状態では極めて特殊化された問題しか扱えなかった直接解決空間が拡張され，問題解決能力が改善されて行くことになる．

4.2 簡約オペレータ (Reduction operator)

4.2.1 標準化オペレータ

本オペレータは，極めて基本的で，簡約プロセス中，常に適用可能である．オペレータの種類としては，

$$\int C \times F(x)dx \Rightarrow C \times \int F(x)dx(C : real)$$

$$\int (F(x) + G(x))dx \Rightarrow \int F(x)dx + \int G(x)dx$$

などが考えられる．

4.2.2 focus 駆動型簡約オペレータ

このオペレータは数式中に focus 部が同定できれば，その部分に対して前向きに適用する．したがって，以下に示す通り前提部が focus 部として記述されており，それ自身によって適用が起動される．

$$\sin^2 x \Rightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow 1, \quad \sin x \times \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x$$

これによって，

$$\int \cos^2 x - 2\sin^2 x dx$$

などは，たちどころに解決される．しかし，focus が検出できれば，必ず適用し簡約できるとは限らない場合がる．例えば，

$$\int \frac{1}{sin^2 x}dx \Rightarrow \int \frac{2}{1-\cos x}$$

などは，簡約したとは，いい難い．本オペレータが効力を発揮するのは，focus 部だけか，その定数倍の時のみに限定されると考える．そこで，本 focus 駆動型オペレータは，直接適用するか，または，標準化オペレータを介して適用するかいずれかでなくてはならないという制約を課すことにする．

4.2.3 interest 駆動型簡約オペレータ

このオペレータは，まず目標を決定し interest を同定しないと，適用不能である．なぜなら，オペレータは未決定部を前提部中のもっているからである．例えば，$\int \frac{1}{4+t^2}dx$ から target operator $\int \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow \tan^{-1} x$ への簡約のために，$\frac{A}{B} \Rightarrow \frac{A}{C}/\frac{B}{C}$ を適用するためには，その interest に着目し，C=4 を同定しなければならない．このように，interest が決定し初めて適用可能状態となるオペレータを interest 駆動型簡約オペレータと定義する．そこで，本オペレータは，まず直接解決オペレータの前提部に対し，副目標が設定可能であり，その相違部である interest によって，適用部分，および，未決定部を決定できる状態に限り，適用可能であると規定する．ただし，副目標の設定可能性は，直接解決オペレータのい前提部の階層構造における，現問題状態を含有する候補集合の検出可能性に依存するものとする．

5 簡約機構

不定積分法の簡約プロセスで適用するオペレータの適用戦略は，用途や目的は多様である．部分積分や置換積分はもとより，三角関数や因数分解等の不定積分法以外のオペレータも多数含まれる．

したがって，それらを，全て一意に扱うことは極めて困難なので，簡約プロセスを以下の３つのサブプロセスに分割し，各プロセスの逐次処理によって，定式化する．

【簡約プロセス】

1. 数式の標準化サブプロセス．
   数式の分解等を行い数式をオペレータの適用可能状態に整える．

2. 前向き簡約サブプロセス．
   数式のある項 (focus) に着目して，簡約化する．
   【例】$\sin^2 x \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}$
   このプロセスで適用するオペレータのことを **"focus" 駆動型オペレータ**と云う．

3. 後ろ向き簡約サブプロセス後ろ向きに副目標を設定し，現状態との差異 (interest) を解消する方向へ簡約する．この際，適用されるオペレータを **"interest" 駆動型オペレータ**" と云う．

5.1 標準化サブプロセス

オペレータの適用する場合，そのオペレータを適用可能な状態，すなわちオペレータの前提部とマッチングのとれる形に標

準化する必要がある．例えば，

$$\int(5\sin x+6x^2)dx$$

の問題を解決する場合，$\int\sin xdx \Rightarrow -\cos x$ および $\int x^n dx \Rightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ を適用する前に，以下のような，数式の標準化を行う必要がある．

$$\int(5\sin x+6x^2)dx$$

$$=\int 5\sin xdx+\int 6x^2dx$$

$$=5\int\sin xdx+6\int x^2dx$$

このような処理は，人間は殆ど無意識に行う．途中の処理過程を記憶することさえしない人もいるだろう．しかし，一般に標準化は，ほとんどのオペレータの適用の前に，必ず施されている．それは，このプロセスが簡約プロセス中では基本的で，利用度の高いことを示している．そのようなことから，標準化は簡約プロセスでは，最も優先的に行われることにし，前向き後向き両簡約サブプロセス中，随時適用可能であると規定する．

5.2 前向き簡約サブプロセス

不定積分の問題は色々な関数を扱っているため，部分的にそのような関数を扱うためのオペレータを適用する．その適用は，決った項(focus)に対し機械的に行われる．例えば，問題として，

$$\int\cos^2 xdx$$

が与えられると，必ず

$$\cos^2 x\Rightarrow\frac{1+\cos 2x}{2}$$

の適用を考える．それは，"focus" として，$\cos^2 x$ を認識し，前向きにオペレータを適用していると考えられる．

このプロセスの必要性は，数式中における focus 部の有無に依存していると考えられる．しかし，前述したように，問題中に focus 部が存在しても簡約可能性が期待できないものも存在する．したがって，その focus 部による適用を制限する必要があり，以下のように規定する．

1. まず，問題状態が，focus だけならば適用する．適用不可ならば，2. へ

2. 標準化オペレータが適用可能であれば適用し，1. へ戻る．それ以外は，適用不可とみなす．

5.3 後ろ向き簡約サブプロセス

以上の 2 の簡約プロセスは，数式の構造および "focus" によって，前向きに処理してきたが，それだけでは，結局$\int$ (定数 $\times focusdx$) のような形式の問題しか解決できない．簡約オペレータには，その適用部等が未決定であると，前向きに適用できないものも数多く存在する．このようなオペレータの適用には，ある副目標を設定し，それと現問題状態との差異 (interest 部) によって後ろ向きに制御してやることが不可欠である．

5.3.1 副目標の設定

副目標は，当然解決状態に最も近く，さらに確実に解決状態に変換するオペレータが存在する状態に対し設定する必要がある．そこで，副目標は直接解決オペレータの前提部（これを **"target operator"** とする．）に対しのみに設定されるものとする．しかし，その設定基準が明確である訳ではないため，ある程度候補を絞るものの，個々に対し網羅的に設定する必要がある．

一般にわれわれは，数式の構造の類似度に基づき副問題を設定している．例えば

$$\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

に対しては，

$$\int\frac{1}{x^2+1}dx\Rightarrow\tan^{-1}x$$

を適用すること副目標と仮定し，x^2+2x+2 を x^2+1 に簡約することを考えるだろう．

関数間の類似度の評価を可能にするために，階層化された直接解決オペレータの前提部に対し，以下のように副目標を設定する．

1. 階層構造に基づき，現問題を含有する候補集合（これを **"candidates set of target operator"** と呼ぶ）を検索する．

2. 候補集合に含まれる全オペレータに対し，網羅的に簡約を試みる．

例えば，上記の問題に対する候補は，木ノード $not\ \frac{integer}{\sqrt{f(x)}}$ がポイントする，以下のものが列挙される．

$$\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow\log|x|,\qquad\int\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\tan^{-1}$$

$$\int\frac{-1}{1+x^2}\Rightarrow\cot^{-1},\qquad\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx\Rightarrow\log|f(x)|$$

副目標は個々の前提部に対し，設定するが，interest の同定は，集合全要素に共通している部分は無視し，相違部に着目して行う．例えば，上記の問題では，x^2+2x+2 が interest として，検出され，x^2+2x+2 を x^2+1 等に簡約することを試みる．また，$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx\Rightarrow\log|f(x)|$ のように具体化されたゴールが設定不能な場合も考えられる．この場合は，まず現問題から $f(x), f'(x)$ の同定を行った後に，副目標を決定する．(このことを，**副目標の前向き設定**と呼ぶ）例えば，

$$\int\frac{2x}{x^2+2x+3}$$

場合は，$f(x)=x^2+2x+3$ を同定し，ゴールを，

$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$$

に設定し簡約する．

同様な方法で部分積分についても副目標の前向き設定を行った後に，簡約を行うと定式化できる．例えば，問題として

$$\int x\times\exp(x)dx$$

が与えられると，部分積分オペレータ

$$\int f'(x)\times g(x)dx\Rightarrow f(x)\times g(x)-\int f(x)\times g'(x)dx$$

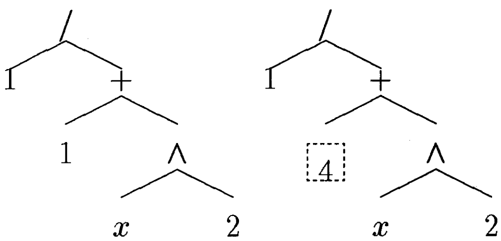
で $g(x)=x$ と認識すると，副目標は，$\exp(x)$ に設定され，簡約が施される．

5.3.2 interest 部の検出

"target operator" の候補集合が決定しても，interest 部を検出することは，容易ではない．interest 部は，数式の一部分であることが多いため，数式を，何等かの形式に書換える操作性を持つ必要がある．そこで，次のような手続きを踏む．

1. 現状態（数式）を 2 分木形式に変換する．
2. 予め 2 分木で記述されている直接解決オペレータの前提部と比較することによって，interest 部を検出する．

例えば，現問題$\int \frac{1}{4+x^2}dx$ における interest 部の検出は以下の通り行う．



$\int \frac{1}{1+x^2}$ $\int \frac{1}{4+x^2}$

6 学習機構

われわれは，問題解決を行いながら問題の解法を学習している．例えば，

$$\int \frac{7}{2x^2+4}$$

を試行錯誤的に解決した後なら，$\int \frac{3}{4x^2+8}$などは，たちどころに解決してしまうだろう．それは，前問題を解決したことによって，その解法を一般化して，学習したためと考えられる．このような一般化に基づく学習機構を計算機上に埋め込むことは，人工知能研究，特に学習の分野において，極めて有用な研究課題とされている．

一般化機構については，種々の方式が提案されている．主流は事例の類似性に基づく帰納的な手法を駆使した **"類似性に基づく一般化 [Similarity-Based Generalization，以下ＳＢＧという]"** [Winston 72][Michalski 86] であった．しかし，ＳＢＧでは，事例を大量に与えなくてはならず，さらには，正当性をもった類似度を規定することが困難である等の問題点が指摘されている．

それに対し，１つの事例から正当性（説明）に基づき，演繹的に一般化を施すというＥＢＧが近年，注目されている．

しかし，ＥＢＧ的学習をなんの制約もなく，漸進的に行うと，過剰および不適切な一般化が生起し，ルール間の競合が起きる危険性がある．そのため，[Mitchell 86] は，学習機構を制御するために，"操作性規範 (operationality criterion)" という概念を導入した．そして，その操作性を，学習の規範として機能させることにより，過剰な学習などを抑制させた．また，操作性についても，昨今様々な論議を呼び，ＥＢＧの中心的トッピクスになりつつあることは，周知の事実である [Keller 88][Serge 87]．

本稿では，上述したような一般化に基づく学習機構を，問題解決オペレータ集合に対し操作性を定義した上で，オペレータの自動洗練化機構を付加することにより実現する．なお，洗練化手法としては，ＥＢＧの基本戦略である**制約の後方伝播法 (constraint backward propagation)**[Mitchell 83] を引用する．

6.1 オペレータ集合における操作性 (operationality)

[Keller 88] は，操作性は使用可能性 (usability) および有用性 (utility) に依存していると定義している．さらに，その評価基準は "有効性 (effectiveness)" ならびに "効率性 (efficient)" であるとし，問題の正解率，処理時間によって実験的評価を行っている．

しかし，このような評価は，与えられた問題に大きく依存し，汎用性に乏しい．そのような定義では，確かに頻出の問題に対しては有用性が認められるが，それ以外のものに対しては，逆に操作性が劣化する場合が生じると考えられるからである．

[Korf 85] は，マクロオペレータによる，探索空間の効率化を図るためには，探索空間を "マクロ空間" で分割してやらなければならないとしている．

そこで本稿では，操作性を直接解決オペレータ集合の前提部に対して以下のように定義し，オペレータ空間の形成を学習の指針とすることにする．

[操作性のあるオペレータ集合]
オペレータ前提部の和集合は，探索空間と等価であり，その個々の集合は互に無競合である．さらに，その結論部は全て，解決状態を導出しているとき，このオペレータ集合は，可操作であると云う．

$$IF\ \ A_1\ \ THEN B_1$$

$$IF\ \ A_2\ \ THEN B_2$$

$$\vdots$$

$$IF\ \ A_n\ \ THEN B_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$$

$$A_i \bigcap A_j = \emptyset\,;\, i \neq j$$

$$\forall i B_i \in G$$

G：解決状態の集合
U: 全探索空間
$A_i(i = 1 \sim n)$：オペレータの前提部
$B_i(i = 1 \sim n)$：オペレータの実行部

この操作性を満たすと，システムは学習を停止するが，それまでは，より広い探索空間を解決できるオペレータ集合が形成できるように，前提部の洗練化を施し続ける．

6.2 オペレータの自動洗練化機構

初期状態での直接解決オペレータの前提部は，特殊的で拡張性に欠ける．例えば，オペレータ$\int \cos x dx \Rightarrow \sin$ だけでは，$\int 5 \sin x dx$ すら解決状態に変換できない．

したがって，問題解決能力を向上するためには，簡約可能性を踏まえて，オペレータの洗練化を施す必要がある(例えば，上記の例では，前提部を $\sin \rightarrow A \times \sin(A : real)$ と変換する)．

本稿では，解決した解法木に基いた，前提部の洗練化手続きを**自動洗練化機構**と称し，以下のステップによって，実現する．

【自動洗練化機構】

1. 解法系列から，直接解決オペレータを少なくとも，1つ含有するマクロ系列を組合せ的に分解し，抽出する．(**マクロオペレータの抽出プロセス**)
2. そのマクロ系列各々に対し，制約の後方伝播方によって，前提部の洗練化を行う．(**前提部の洗練化プロセス**)
3. 洗練化させた前提部をもったマクロオペレータを，操作性に基づき評価し，直接解決オペレータの更新および付加を行う．(**直接解決オペレータの更新・付加プロセス**)

6.2.1 マクロオペレータ抽出プロセス

解法系列からのマクロオペレータ抽出を考える際，まずどの系列をマクロ化するかを決定する基準を明確にする必要がある．なぜなら，オペレータ系列の部分集合は，全てマクロオペレータと見なせるため，これを全てマクロ化していては，冗長なものを多く抽出する結果になるからである．したがって，マクロオペレータ抽出における確固たる基準を設定しなければならない．[山田 88] では，“完全因果性” という基準に基づいて行っている．また，[白井 88] では，マクロオペレータ統合のための必要条件を，以下のように設定した．

【マクロオペレータ統合のための必要条件】

1. 融合される任意のオペレータにおいて，そのオペレータの適用後の状態が，次に適用されるオペレータの前提部を常に満たして いなければならない．
2. そのマクロオペレータの適用が解法を導く上で，有用であることを保証していなければならない．

そこで，以下の基準を設定することにより，上記の条件を満たすマクロオペレータ候補系列を，解法系列より抽出することを考える．

【マクロオペレータ候補系列の抽出基準】

1. 系列が連鎖していて，続けて適用されているもの．
2. その系列中の最後のオペレータが，必ず直接解決可能オペレータであるもの．

この基準によって，必要なマクロオペレータを抽出することができる．

簡約オペレータ適用中の中間状態には，必然的に未解決状態が存在する．それらを各々問題と考えると，それ以後(直接解決オペレータまで)のオペレータ系列もそれぞれにマクロオペレータとして，有用である．なぜなら，個々のマクロオペレータは，その中間状態と等価な問題に対し直接解決能力を保持しているからである．

例えば，解法系列が

$$op_1, op_2, op_3, op_4$$

ただし，op_4 は直接解決オペレータである.) であるとすると，以下の３つの候補を抽出することができる．

$$op_3, op_4$$

$$op_2, op_3, op_4$$

$$op_1, op_2, op_3, op_4$$

このように，解法系列から複数個のマクロオペレータ候補を抽出することができる．

6.2.2 前提部の洗練化プロセス

上述した抽出プロセスによって，抽出されたマクロ系列に対し，その前提部を洗練化し，マクロオペレータの生成を行う．その洗練化手法は，[Mitchell 83] で提案された “制約の後方伝播法” を応用する．

制約の後方伝播法とは，オペレータの前提部に規定されている制約条件を解法系列に対し後ろ向きに，連言をとることによって，前提部の制約を洗練化する手法である．この手法を適用すると，オペレータの前提部の記述が正当性を保持している限り，マクロオペレータの前提部が演繹的に洗練化されていくことになる．では，実際に，例題 (1) を基にして，前提部の洗練化を行ってみる．

例題 (1) で適用したオペレータ

op_a : $x^2 + Ax + B \Rightarrow (x+C)^2 + D(A, B, C, D : integer; eq(C, \frac{A}{2}); eq(D, B - \frac{A^2}{4}))$
op_b : $\frac{A}{B} \Rightarrow \frac{E}{F}(C : integer, eq(E, \frac{A}{C}), eq(F, \frac{B}{C})))$
op_c : $\int C \times f(x)dx \Rightarrow C \int f(x)dx(C : real)$
op_d : $A \Rightarrow (B)^2(eq(B, \sqrt{A})$
op_e : $\int f(g(x))dx \Rightarrow \int f(t) \times g'(t)dx$
op_f : $\int C \times f(x)dx \Rightarrow C \int f(x)dx(C : real)$
op_g : $\int \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow \tan^{-1} x$
op_h : $f(t) \Rightarrow f(g(x))$

【注】この場合，op_fおよび op_hは合せて置換積分である．したがって，このオペレータ系列は分解不能であると考える．これから，抽出されるマクロオペレータ候補系列および洗練化されたものは以下の通りである．

$Macro_1 : op_e, op_f, op_g, op_h$

$$D \times \int \frac{1}{(B(x+C))^2+1}dx \Rightarrow A \times tan^{-1}(B(x+C))$$

$$(real(D), eq(A, B \times D))$$

$Macro_2 : op_d, op_e, op_f, op_g, op_h$

$$D \times \int \frac{1}{E(x+C)^2+1} \Rightarrow A \times tan^{-1}(B(x+C))$$

$$(eq(B, \sqrt{E}), real(D), eq(A, B \times D))$$

$Macro_3 : op_c, op_d, op_e, op_f, op_g, op_h$

$$\int \frac{D}{E(x+C)^2+1}dx \Rightarrow A \times tan^{-1}(B(x+C))$$

$$(eq(B,\sqrt{E}), real(D), eq(A, B \times D))$$

$Macro_4 : op_b, op_c, op_e, op_f, op_g, op_h$

$$\int \frac{1}{(x+C)^2+F}dx \Rightarrow A \times tan^{-1}(B(\dot{x}+C))$$

$$(integer(F), eq(D, \frac{1}{F}), eq(B,\sqrt{D}), real(D), eq(A, B \times D))$$

$Macro_5 : op_a, op_b, op_c, op_e, op_f, op_g, op_h$

$$\int \frac{1}{x^2+Gx+H}dx \Rightarrow A \times tan^{-1}(B(x+C))$$

$$(integer(H), eq(F, H-\frac{G^2}{4})), integer(G), eq(C, \frac{G}{2}), real(D))$$

$$eq(D, \frac{1}{F}), eq(B,\sqrt{E}), eq(AB \times D))$$

以上のように，１つの問題を解決することにより複数のマクロオペレータを獲得することができる．これを，直接解決オペレータとして付加することにより，問題解決能力を向上させる．

6.2.3 直接解決オペレータの更新・付加プロセス

マクロオペレータの抽出および洗練化プロセスにより獲得したマクロオペレータを，直接解決オペレータとして記述すると，これまで簡約プロセスを踏まないと解決できなかった問題が直接解決可能となる．しかし，洗練化されたマクロオペレータを全て付加していては，オペレータの総数が増大し，その膨大なマッチングコストによって，逆に効率が低下する可能性もある．さらに，オペレータ集合間での，前提部における競合が生じると，以後の問題解決プロセスに大きな破綻をきたす恐れもある．

そこで，前述した“オペレータ集合における操作性”に基づいたオペレータの更新・付加を実行することにより，問題解決器における性能の向上をはかる．直接解決可能オペレータの前提部を，オペレータルールの競合を回避しながら拡張するため，次に示すように直接解決オペレータ更新ルールを規定する．

1. 前提部の標準化を行い，基本的に

$$\int F(x)dx$$

形式のオペレータルールだけを付加する．

2. 獲得されたマクロオペレータと，既存のオペレータまたはマクロオペレータ間で競合部が存在する場合は，双方を評価し，その競合を解消する．

洗練化されたマクロオペレータの前提部を評価する場合，その構造は一定である方が好ましいと考えられる．特に，積分部($\int$の中に含まれる部分）以外の部分を規定する必要はない．例えば，例題(1)で求めたマクロ中の$Macro_1, Macro_2$などは，積分部の外に実数部分が掛合わされた形式になっている．このような場合，積分部外の部分は標準化プロセスで容易に簡約化される．したがって，この部分と等価な前提部，すなわち標準化後の状態が必ずその直後に存在する筈である．この時双方を記述付加することは，冗長なことと考える．($Macro_2$と$Macro_3$は等価である.)．このような場合は，標準化後の状態を洗練化したマクロオペレータのみを付加することにする．また，その直後に標準化されたものが無い場合，次の標準化則を適用する．

$$IF \quad A \times \int F(x)dx \Rightarrow G(x)$$

$$THEN \quad \int A \times F(x)dx \Rightarrow G(x)$$

洗練化によって獲得したマクロオペレータと，既存の直接解決オペレータまたはマクロオペレータと競合する場合が生じることが容に考えられる．このような場合の制御は，競合解消制御は極めて難解であると考える．例えば，例題(1)を解決し，洗練化によってマクロを獲得した後，

$$\int \frac{A}{x^2+Bx+C}dx \Rightarrow E\log|\frac{x+C}{x+D}|$$

というマクロを新しく獲得した場合，当然$Macro_5$との間に相互干渉が起り，以後の問題解決に支障をきたすと考える．

このような問題に対処するために，本稿では，前提部の洗練化によって得た制約条件によって，次のように競合を禁制する．それぞれ互いの制約の否定条件を他方に付加することにより，両前提条件を，互いの相互競合を打消合わさせるように機能させる．

$$\int F(x)dx(A_1, A_2 \sim A_n) \Rightarrow G(x)$$

$$\int F(x)dx(B_1, B_2 \sim B_m) \Rightarrow H(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int F(x)dx(A_1, A_2 \sim A_n, not(B_1 \sim B_m)) \Rightarrow G(x)$$

$$\int F(x)dx(B_1, B_2 \sim B_m, not(A_1 \sim A_n)) \Rightarrow H(x)$$

$A_i(i \sim n), B_i(i \sim n)$:前提部の制約条件

以上のようなことを考慮した後に，各々獲得されたマクロオペレータは，その簡約プロセスにおいて，参照した副目標と同じノードに付加される．また，fucus駆動オペレータによって解決された場合は，その数式の構造を評価し，適切なノードに付加される．

7 おわりに

本稿では，不定積分法を例題にして，以下により実現した，学習システムの基本的な枠組みについて述べた．

1. これまで，一意に扱われていたオペレータ集合を，機能性に着目し分類した．
2. 簡約可能性に基づき，問題解決プロセスを，簡約プロセスおよび直接解決プロセスに分割した．
3. オペレータ間の競合を回避する目的で，操作性規範を定義した上で，オペレータの自動洗練化機構を付加した．

今後の課題は，問題状態およびオペレータの表現法の考案，ならびに，オペレータ前提部における階層構造により規定した類似度の理論的な定式化である．さらには，簡約機構の不定積分法以外の数式処理への応用，および，知的ＣＡＩへの拡張を予定している．

［参考文献］

[Michalski 83,86] Michalski, R. S., Carbonell, J. G. and Mitchell, T. M. (eds): Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach Vol.1,2, Morgan Kaufman, Los Altos (1983,1986).

[Marcus 88] Marcus, S. (eds): Automating Knowledge Acquisition for Expert Systems, Kluwer Academic Publishers (1988)

[Mitchell 83] Mitchell, T: Learning and Problem Solving, Proc. of IJCAI-83, Kalsruhe, Weat Germany (1983).

[Minton 88] Minton, S.: Learning Search Control Knowledge: An Explanation-Based Approach, Kluwer Academic Publishers (1988)

[Mitchell 86] Mitchell, T. M. , Keller, R. and Kedar-Cabelli, S.: Explanation-Based Generalization: A Unifying View, Machine Learning, Vol 1,1 No.1 pp.47-80 (1986).

[DeJong 86] DeJong, G. and Mooney, R.: Explanation-Based Generalization:An Alternative View, Machine Learning 1,1, No.2 pp.145-176 (1986).

[Keller 88] Keller, R. M.: Defining Operationarity for Explanation-Based Learning, Artificial Intelligence **35** pp. 227-241 (1988).

[Korf 85] Korf, R. E.: Learning to Solve Problems by Searching for Macro Operators, Pitman Advanced Publishing Program (1985).

[Winston 72] Winston, P. H.: Learning Structural Descriptions from Example, In (P. H. Winston, Ed) The Psychology of Computer Vision, McGraw-Hill, New York (1972).

[Michalski 83] Michalski, R. S.: A Theory and Methodology of Inductive Learning , Artificial Intelligence **20** (1983).

[Serge 88] Serge A. M.: Machine Learning of Robot Assembly Plans, Kluwer Acsdemic Publishers (1988).

[山田 88] 山田, 安部, 辻: 問題解決における戦略学習システム:PiL ー直接解決可能性に基づく一般化ー, 情報処理学会研究会, 88-AI-56-14 (1988).

[白井 88] 白井, 小野, 翁長: 不定積分マシン学習におけるマクロオペレータのＥＢＧ的学習法, 電気関係学会中国支部連合大会予稿集 (1988).