知識工学と人工知能 64－5
（1989. 5. 18）

代数学的手法に基づく幾何学的概念の推論

伊庭　斉志　　　　井上　博允

東京大学工学部

本論文では、幾何学的な概念に関する的確な推論の実現のために、記号論理上の推論と代数学的手法を統合した枠組みを提唱する。さらに軌跡問題の解法により、その枠組みの有効性を示す。

従来の幾何学的推論や学習の研究では、予め記述された述語の変形操作に基づいているものが多く、幾何学的性質の本来の図形的意味を扱うには不十分であった。我々は的確な幾何学的推論の実現のため、代数学的手法としてWuの手続きを採用して、推論システムの構築を試みた。代数学的手法は、推論における補助線やヒューリスティックスの問題を回避し、幾何学的概念の形式的な扱いを可能にするが、同時に「独立変数の選定」などの計算上の問題も伴う。この問題の解決には多項式としての純粋に代数学的な記述上の考察のみでは不十分であり、代数式の導出過程での記号論理的記述に基づく推論を必要とする。

本稿では、これらの機能を実現するために記号論理・代数式上の推論の両者の利点を生かして統合した、幾何学的推論の新しい枠組みを提唱する。さらに軌跡問題の解法により、その枠組みに基づいて構築した推論システムの有効性を示す。

Geometric Reasoning based on Algebraic Method

Hitoshi IBA　　　　Hirochika INOUE

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
University of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ward, Tokyo, 113 Japan

We present a new scheme for geometric reasoning based on the integration of algebraic and symbolic methods. The purpose of this scheme is to avoid the usual difficulties in symbolic reasoning about geometrical concepts.

Our preceding paper described the advantages of Wu's method as our algebraic approach. As noted there, although algebraic approach is very powerful in geometric reasoning, Wu's method has some computational diffidulties in algebraic calculations. To solve these difficulties, the algebraic method must be augumented with symbolic reasoning in order to give semantics of geometric concepts to algebraic expressions.

In this paper, we integrate algebraic and symbolic approachs and thereby realize a new scheme for geometric reasoning. This new scheme incorporates advantages of both methods, algebraic and symbolic. And we show the validity of the scheme by applications.

１．はじめに

幾何学的概念に関する推論は、ロボティックス・ＣＡＤなどの広範な応用分野がある。しかしながら、表現及び推論能力の点で、述語論理に基づく多くの推論システムは幾何学的対象を扱うのに適していない［伊庭88］。例えば、幾何学の本来の特徴である変換不変の性質を的確に表現することができず、その結果補助線を伴う複雑な推論を従来のシステムで行うのは極めて困難であった。

筆者らは、この問題を解決するために代数学的手法を用いて幾何学的推論システムを構築し、実験を通してその有効性を確かめた［伊庭89］。本稿では、このシステムを拡張し、従来の記号論理的推論との統合を試みる。さらに、軌跡問題への応用により、提唱した推論の枠組みの有効性を示す。

２．幾何学的推論とＷｕの定理

一般に幾何学の証明問題の仮定は、三角形式と呼ばれる代数幾何学の式として次のように表現される。

$$
\begin{aligned}
&tri_1(u_1, \cdots u_d, x_1, \cdots x_{r-1}, x_r)=0\\
&tri_2(u_1, \cdots u_d, x_1, \cdots x_{r-1})=0 \qquad\qquad (1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&tri_r(u_1, \cdots u_d, x_1)=0
\end{aligned}
$$

ここで$u_1, \cdots u_d$は独立変数、$x_1, x_2, \cdots x_r$は従属変数である。この時証明すべき命題を記述した式、

$$\mathrm{Conc}(u_1, \cdots u_d, x_1, x_2, \cdots x_r) \qquad (2)$$

が(1)の条件の下で恒等的に０となるかを調べることが証明に他ならない。Wuの定理〔Wu78〕は代数多様体上の解釈として、次のことを主張する。

（２）が（１）の下で恒等的に０となる、即ち定理が成立する
＜＝＞　$\mathrm{Rem}_r=0$

但しRem_r（剰余項）は次のように計算する。これを以下では「Wuの手続き」と呼ぶ。

$\mathrm{Rem}_0 := \mathrm{Conc}$

$\mathrm{Rem}_{i+1} :=$ (Rem_iをtri_{i+1}で変数x_{r-i+1}をもとに割った余り)

我々は、Wuの理論に基づいて効率的な推論システムをMACSYMA上で構築した。一般に三角形式の導出は計算量が多いことから、このシステムにおいては可約多様体の分解や式の簡略化などを用いて、効率的な推論を実現した［伊庭89］。

本手法では「独立変数の選定」が重要な問題である。これは、u_1～u_dが独立でない場合には完全性が保証されず、又独立であってもその選び方で推論の計算量が著しく異なるためである。しかしながらこの問題は、代数学的に記述された表現形式上の考察のみでは解決しにくい。むしろ代数式上で表現された幾何学的概念の意味論に深く関係すると思われる。次節ではこの問題の解決のために拡張した推論システムについて述べる。

３．幾何学的推論の基本的枠組み

的確な幾何学的推論を実行するために、記号論理上の推論とWuの推論機構を統合した枠組みを構築する。この枠組みは、数学的な知識を記号論理の形式で記述し、Wuの手続きに

補助的な推論を実行する。これにより「独立変数の選定問題」の解決をはかり、幾何学の概念の適切な表現と推論を実現するものである(Fig. 1)。以下にこの枠組みの４つの基本フェーズを示す。

３．１　フェーズⅠ：記号論理的記述の数式への変換

幾何推論のために与えられる問題の記述・入力記号表現｛$Desc_i$｝は、記号論理の形式である。フェーズⅠでは、この記述を数式の表現｛hyp_i｝に変換する。実際の出力結果はMACSYMAにおける内部表現のＳ式であるが、記述の簡単化のため本稿では通常の代数式の表現法を用いる。例えばFig. 2 (Two-circle problem) のための表現は、Fig. 3 (a) ($Desc_{1\sim8}$) のように記述する。但しTwo-circle problemとは次のような問題である。

「互いに外にある２円O_1，O_2（半径を各々r_1，r_2とする）の周上の任意の点をそれぞれＱ，Ｔとするとき、線分ＱＴの中点Ｐの軌跡を求めよ［佐々木79, p. 68］」

ここで＄のついた記号は変数を示し、＄（Ｘ　２）はＸが２次元ユークリッド空間上の図形なことを表わす。NILは未定なこと（この場合円の中心や点の座標を記述する必要のないこと）を示し、このスロットは式の導出過程で適切に埋められる。FIND文は、後述するようにＰが軌跡上の点なことを示す。

$Desc_{9\sim17}$及び$hyp_{1\sim8}$は、これらの表現の代数式への変換の結果である。我々は、２０余りの２，３次元ユークリッド空間上での幾何学的概念を代数学的表現に変換する機能を実現した。その中には、領域を表現する不等式の等式への次のような変換も含まれている。

例：Ｘは単位円内にある　$\longrightarrow$　$x_1^2+x_2^2\leqq 1$　$\longrightarrow$　$1-x_1^2-x_2^2-\varepsilon^2=0$

このフェーズでは、上述の機械的な翻訳に加えて、以下の推論で用いる次のような重要な情報を抽出する。これが代数表現におけるセマンティックスに相当する。

（１）DESCRIPTIVE

これは問題の記述として与えられた変数の情報である。Fig. 2の例では、Ｑ，Ｔ，Ｐ，r_1，r_2，Ｏ１，Ｏ２を保持する。フェーズⅣではこの情報を用いて適切な推論を行う。

（２）INDEPENDENT

三角形式導出（フェーズⅡ）で重要な独立変数の情報を保持する。前述の単位円内の例では、導入されたεは独立変数と見なされる。次節で述べる軌跡の例では、FIND文により指定された軌跡上の点を表わす変数は独立変数である。これに対して、新しく導出された変数は一般に従属変数の候補になる。

（３）DEPENDENTS

（２）とは逆に従属変数の集合の組を示す。これは、同一図形上にあるかを判定することにより、問題の記述から比較的容易に求められる。例えばFig. 3 (a)では｛c_1，s_2｝、｛a_1，a_2，q_1，q_2，r_1｝などの組は独立ではない。従って、これらの全てを独立変数として選ぶような三角形式の導出は回避される。

以上から明らかなように、全ての変数に関してINDEPENDENT，DEPENDENTSの情報を決定することはできず、ある程度のヒューリスティックスと曖昧さへの対処が必要である。しかしながら、これらの情報を用いることで、Wuの推論を的確にコントロールでき、推論の結果の明確な解釈も可能になる。さらに、この時点での曖昧さは、変換の過程を充実させることで容易に改善しうることに注意すべきである。

（４）SYMMETRIC

記述間の対称性を判断し、その情報を保持する。例えばFig. 2では、円O_1とO_2の記述

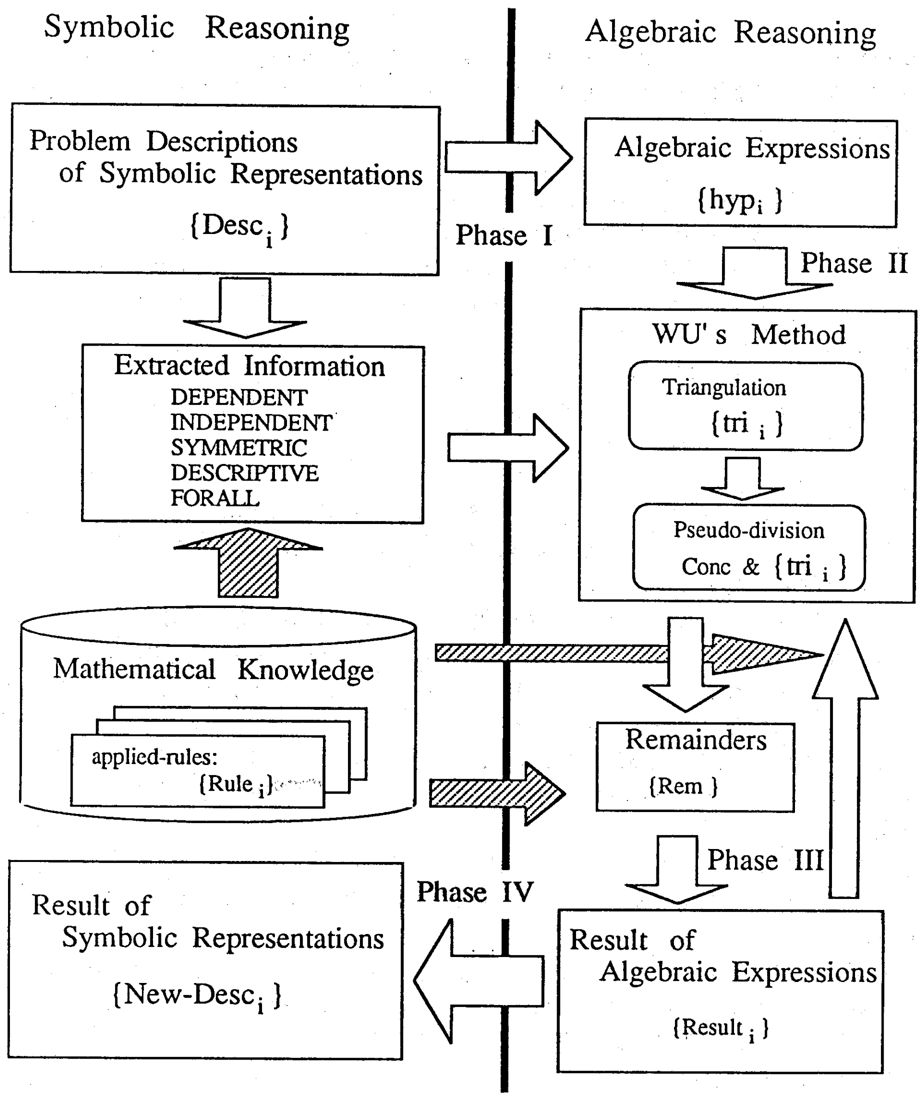

Fig.1 Symbolic and algebraic reasoning

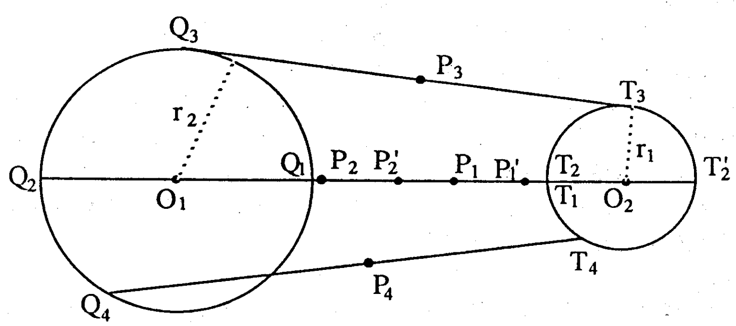

Fig.2 Two-circle problem

の関係は対称である。従ってO_1について成立する命題は適当な変数変換によって、O_2においても成立する。こうした対称性は、幾何学の問題には多く含まれ、このことを用いて推論を効果的に行うことができる。

（5）FORALL

変数の定義域の情報等を保持する。Fig. 3 (a)のFORALLは、$\{c_1, s_1\}$ や $\{c_2, s_2\}$ は三角比として任意の値をとりうることを示す。

3．2　フェーズII：Wuの手法に基づく推論

与えられた結論の式（以下CONCと記す）をもとに、前節で述べたWuの手法に基づいて推論を行う。ここでは、次の基本戦略を用いて三角形式導出の際の従属変数を選ぶ。

（1）DEPENDENTS中の同一の集合に属する変数を優先する

（2）INDEPENDENT,FORALL中の変数はできるだけ避ける

これらは、独立変数の的確な選定をはかるとともに、フェーズIVでの処理を容易にするためのヒューリスティックスとしても作用する。さらに必要なら、既約代数多様体への分解［伊庭89］を行う。この結果、剰余項が0なら証明されたとして終了する。通常の証明ではここで推論をおわる。Fig. 3(b)はTwo-circle problemにおける推論過程を示す。

3．3　フェーズIII：数学的知識を用いた推論

Wuの手続きにより返された剰余項をもとにした推論を行う。このために必要な数学的知識が表現されている。その例を以下に示す。

（1）式の変形操作

剰余項を因数分解・変形などにより簡単化する。軌跡の問題のように、注目する変数（軌跡の例ではFIND文で指定する）が予め分かっている場合、特に有効である。

（2）恒等式に関する推論

剰余項が0になる条件を導出するために、FORALLを用いて恒等式に関する推論を行う。

例：$At+Bs\equiv 0 \ (\forall t, s) \longleftrightarrow A=B\equiv 0$

$Axy+Bx^2+Cy^2+D\equiv 0 \ (\forall x, y) \longleftrightarrow A=B=C=D\equiv 0$

（3）三角関数による推論

円などの記述において不可欠の、三角関数を用いた推論を行う。

例：$A\cos\theta+B\sin\theta+C\equiv 0 \ (0\leqq\forall\theta\leqq 2\pi) \rightarrow A^2+B^2\geqq C^2$

（4）不等式の解法

簡単な不等式の解法を行う

（5）ベクトル・行列演算

ベクトルや行列の成分演算を幾何学的表現に結びつける。

例：ベクトル$a=(a_1, a_2)$，$b=(b_1, b_2)$

$a\perp b \longleftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

$2|a_1b_2-a_2b_1|=$ベクトルaとbのつくる平行四辺形の面積

（6）式間のパターンマッチングによる推論

与えられた式の間の対称性や類似性を検出して推論を行う。これを用いた幾何学的概念の学習の例を［伊庭88］で示した。

以上のようにして、記号論理に基づく数学的知識を用いた推論により適切な情報を抽出し、必要ならIIIに戻る。このフェーズは、代数学的考察のみでは困難な幾何学的な意味

論の的確な扱いを可能にし、Wuの推論を効果的に補うものである。

但し現時点では、推論則の適用は完全に前向きであり、バックトラックや非単調な推論は実現されていない。これは、上述のルールが同値変形を主とするため決して誤りを導かないことから正当化される。４節では軌跡問題への適用の成功例を示す。的確な推論の制御は、今後の重要で興味ある課題である。

Fig.3(c)は、Two-circle problemに対するフェーズIIIの結果を示す。ここでは上述の(1)(3)(4)のタイプの推論を実行した。

３．４　フェーズIV：記号的記述への逆変換

与えられた式を記号論理を用いた記述に逆変換する。基本的にはＩで述べたプリミティブとのマッチングを用いて、さらにDESCRIPTIVEの情報参照して、できる限り一般的（新出の変数の少ない）記述を得る。注目する変数がFINDコマンドで指定されている場合、マッチングは比較的容易である。例えば（ＦＩＮＤ　Ｐ）に対して、

$$(2p_1-a_1-b_1)^2+(2p_2-a_2-b_2)^2-4(r_1-r_2)^2=0$$

が得られたとき、

```
(ON  $P  $03)
(IS-CIRCLE   $(03  2)  $PP
             (abs  (minus  r1  r2))
             (IS-POINT $PP (MID-POINT $A $B)))
```

を導く。さらに一般化を行い、＄Ｏ３や＄Ａ，＄ＢなどのDESCRIPTIVEにない変数を取り除き、最終的に、

```
(ON  $P  (CIRCLE  (MID-POINT  (CENTER-OF  $01)  (CENTER-OF  $02))
                  (abs  (minus  r1  r2)))
```

という記述を得る。これは、「円O_1とO_2の中心の中点を中心とする、半径$|r_1-r_2|$の円周上にＰはある」ことを表現する。

４．軌跡問題における推論

本節では、実現したシステムの軌跡問題への応用を示す。軌跡の問題は一般につぎのように記述される。

> ある条件Cが与えられて、
> (i)条件Cを満たす全ての図形はF上にあり(必要性)
> (ii)図形F上の点は全てCを満たす(十分性)
> 　　ようなＦを見出せ。

本システムの軌跡問題における推論の流れを以下に示す。これは３節で述べた基本的なフェーズに基づく。

STEP1:条件Ｃから問題の記述を得る。この時の仮説集合を$H_1=\{h_1,...h_k\}$とする。さらに求めるべき軌跡上の点（集合）をＸとして(FIND　X)を記述に加える。

STEP2:H_1の中から適当な仮定h_jを選んでCONCとし、残りの$H_2=\{h_1,...h_k\}-\{h_j\}$を新たな仮説集合とし、３節の推論（フェーズＩ～III）を行う。

STEP3:STEP2の結果得られた記述を$H_3=\{h'_1,...h'_n\}$とする（フェーズIIIの出

力）。このとき、$H_2 \cup H_3$を仮定とし、h_jをCONCとしたWuの手続きを行う。この結果剰余項が0となるなら、つまり結論が導かれるならば、STEP5へ。

STEP4: $H_3 \cup H_1$を新たなH_1としてSTEP1へ戻る。

STEP5: $H_3 \cup H_1$の中のXの記述を出力して終了する（フェーズIV）。

本手法の正当性は、STEP3で見出される仮説集合が常に制約を正しく強めていくことから保証される。

STEP1のFIND文により、Xは求めるべき軌跡上の点として宣言され、以後独立変数として扱われる（INDEPENDENT）。さらにSTEP5中のフェーズIVでは、Xを中心とする導出が行われる。

軌跡問題では、恒等式を用いた推論（フェーズIII(2)）を最初に適用する（Fig.3(c)）。そのため一般に、恒等式の媒介変数（FORALL内に記述）は三角形式導出の際の独立変数として扱われる。

STEP2において、h_jの選び方によってH_3の結果は異なり、フェーズIVの解釈が不能なことも起り得る。しかしWuの手続きの完全性によって、誤った結論と導かないことは保証されている。いくつかの実験により、一般に従属変数の多い式を選ぶ方がSTEP2の効率が良く、得られるH_3も単純な記述になり易いことを見出した。これは、三角形式導出の際の従属変数の候補が増えることに起因する。

STEP3は(ii)の十分性のチェックに相当する。これはWuの手続きそのものであるため、以下では必要性の導出（フェーズI〜IV）を中心に説明する。

例：２円上に端点を有する線分の中点の軌跡(Fig.2)

本例に対する推論過程をFig.3に示す。フェーズI〜IIIについての詳細は前節で説明した。フェーズIIIでは、三角関数上の不等式関係、及び２次不等式の関係を用いた推論を行い、最終的に$New\text{-}Dec_5$のように正しく推論された。

これは、求める点Pが円O_1と円O_2の中心の中点を中心とする半径$|r_1 - r_2|$の円の外側の領域で、かつ半径$r_1 + r_2$の円の内側にあることを意味する。

５．おわりに

本論文では、代数学的手法に基づく幾何学的推論の新しい枠組みを提唱し、軌跡問題への応用を通して、その枠組みに基づいて実現した推論システムの有効性を示した。さらに本稿では、的確な推論のために、記号的問題記述からの代数学的表現における幾何学的意味論（セマンティックス）の扱いを試みた。本手法を拡張した、代数式における適切な推論の制御・その形式的なアルゴリズム構成は、今後の興味ある課題である。

参考文献

[伊庭88] 伊庭斉志、井上博允：”画像理解におけるヒューリスティックの代数幾何学的表現とその学習”，日本ロボット学会第六回学術講演会予稿集　1988

[伊庭89] 伊庭斉志、井上博允：”代数学的手法に基づく幾何学的推論システム（1）（2）”，情報処理学会第三十八回全国大会予稿集　1989

[佐々木79] 佐々木元太郎：”ユークリッド幾何学”，
現代数学レクチャーズA-5，培風館　1979

1 PHASE I : Translation into algebraic expressions

Desc_1	:	(ON \$Q \$$O_1$)
Desc_2	:	(ON \$T \$$O_2$)
Desc_3	:	(IS – CIRCLE \$(O_1 2) NIL \$$r_1$)
Desc_4	:	(IS – CIRCLE \$(O_2 2) NIL \$$r_2$)
Desc_5	:	(IS – POINT \$(Q 2) NIL)
Desc_6	:	(IS – POINT \$(T 2) NIL)
Desc_7	:	(IS – POINT \$(P 2) (MID – POINT \$Q \$T)
Desc_8	:	(FIND \$P)

$\Downarrow$

Desc_9	:	(ON \$Q \$$O_1$)
Desc_{10}	:	(ON \$T \$$O_2$)
Desc_{11}	:	(IS – CIRCLE \$(O_1 2) \$A r_1)
Desc_{12}	:	(IS – CIRCLE \$(O_2 2) \$B r_2)
Desc_{13}	:	(IS – POINT \$(Q 2) (\$$q_1$ \$$q_2$))
Desc_{14}	:	(IS – POINT \$(T 2) (\$$t_1$ \$$t_2$))
Desc_{15}	:	(IS – POINT \$(A 2) (\$$a_1$ \$$a_2$))
Desc_{16}	:	(IS – POINT \$(B 2) (\$$b_1$ \$$b_2$))
Desc_{17}	:	(IS – POINT \$(P 2) (\$$p_1$ \$$p_2$))
hyp_1	=	$-r_1 s_1 + q_1 - a_1$
hyp_2	=	$-c_1 r_1 + q_2 - a_2$
hyp_3	=	$s_1^2 + c_1^2 - 1$
hyp_4	=	$t_1 - r_2 s_2 - b_1$
hyp_5	=	$t_2 - c_2 r_2 - b_2$
hyp_6	=	$-t_1 - q_1 + 2p_1$
hyp_7	=	$-t_2 - q_2 + 2p_2$
hyp_8	=	$s_2^2 + c_2^2 - 1$
DESCRIPTIVE	=	$\{O_1, O_2, r_1, r_2, Q, T, P\}$
INDEPENDENT	=	$\{p_1, p_2\}$
DEPENDENTS	=	$\{a_1, a_2, r_1, q_1, q_2\} \cup \{b_1, b_2, r_2, t_1, t_2\} \cup \{p_1, p_2, t_1, t_2, q_1, q_2\} \cup \{c_1, s_1\} \cup \{c_2, s_2\}$
SYMMETRIC	=	$\{(O_1, O_2), ((a_1, a_2, r_1, q_1, q_2)\ (b_1, b_2, r_2, t_1, t_2))\}$
FORALL	=	$(trigonometric\ c1\ \ s1) \wedge (trigonometric\ c2\ \ s2)$

2 PHASE II : Wu's method

$\mathrm{tri}_1(c_1, q_1, q_2, t_1, t_2, s_2, c_2)$	=	$t_2 - c_2 r_2 - b_2$
$\mathrm{tri}_2(c_1, q_1, q_2, t_1, t_2, s_2)$	=	$t_1 - r_2 s_2 - b_1$
$\mathrm{tri}_3(c_1, q_1, q_2, t_1, t_2)$	=	$-t_2 - q_2 + 2p_2$
$\mathrm{tri}_4(c_1, q_1, q_2, t_1)$	=	$-t_1 - q_1 + 2p_1$
$\mathrm{tri}_5(c_1, q_1, q_2)$	=	$-c_1 r_1 + q_2 - a_2$
$\mathrm{tri}_6(c_1, q_1)$	=	$-r_1 s_1 + q_1 - a_1$
$\mathrm{tri}_7(c_1)$	=	$s_1^2 + c_1^2 - 1$
Conc	=	$s_2^2 + c_2^2 - 1$

$\Downarrow$

Fig.3(a) Result of reasoning

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{Rem}_1 \ \ (/\ \mathbf{tri}_1 \text{ with } c_2) & = & t_2^2 - 2b_2t_2 + r_2^2s_2^2 - r_2^2 + b_2^2 \\
\mathbf{Rem}_2 \ \ (/\ \mathbf{tri}_2 \text{ with } s_2) & = & t_2^2 - 2b_2t_2 + t_1^2 - 2b_1t_1 - r_2^2 + b_2^2 + b_1^2 \\
\mathbf{Rem}_3 \ \ (/\ \mathbf{tri}_3 \text{ with } t_2) & = & t_1^2 - 2b_1t_1 - r_2^2 + q_2^2 - 4p_2q_2 + 2b_2q_2 + 4p_2^2 - 4b_2p_2 + b_2^2 + b_1^2 \\
\mathbf{Rem}_4 \ \ (/\ \mathbf{tri}_4 \text{ with } \mathrm{t}_1) & = & -(r_2^2 - q_2^2 + 4p_2q_2 - 2b_2q_2 - q_1^2 + 4p_1q_1 - 2b_1q_1 - 4p_2^2 + 4b_2p_2 \\
 & & -4p_1^2 + 4b_1p_1 - b_2^2 - b_1^2) \\
\mathbf{Rem}_5 \ \ (/\ \mathbf{tri}_5 \text{ with } r_2) & = & -(r_2^2 - c_1^2r_1^2 + 4c_1p_2r_1 - 2b_2c_1r_1 - 2a_2c_1r_1 - q_1^2 + 4p_1q_1 - 2b_1q_1 \\
 & & -4p_2^2 + 4b_2p_2 + 4a_2p_2 - 4p_1^2 + 4b_1p_1 - b_2^2 - 2a_2b_2 - b_1^2 - a_2^2) \\
\mathbf{Rem}_6 \ \ (/\ \mathbf{tri}_6 \text{ with } q_1) & = & r_1^2s_1^2 - 4p_1r_1s_1 + 2b_1r_1s_1 + 2a_1r_1s_1 - r_2^2 + c_1^2r_1^2 - 4c_1p_2r_1 \\
 & & +2b_2c_1r_1 + 2a_2c_1r_1 + 4p_2^2 - 4b_2p_2 - 4a_2p_2 + 4p_1^2 - 4b_1p_1 \\
 & & -4a_1p_1 + b_2^2 + 2a_2b_2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + a_2^2 + a_1^2 \\
\mathbf{Rem}_7 \ \ (/\ \mathbf{tri}_7 \text{ with } c_1) & = & -(4p_1r_1s_1 - 2b_1r_1s_1 - 2a_1r_1s_1 + r_2^2 - r_1^2 + 4c_1p_2r_1 - 2b_2c_1r_1 \\
 & & -2a_2c_1r_1 - 4p_2^2 + 4b_2p_2 + 4a_2p_2 - 4p_1^2 + 4b_1p_1 + 4a_1p_1 - b_2^2 \\
 & & -2a_2b_2 - b_1^2 - 2a_1b_1 - a_2^2 - a_1^2) \\
\textbf{subsidiary condition} & = & r_2
\end{array}
$$

3 PHASE III : Algebraic reasoning

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Applied} - \text{rule}_1 & : & \mathbf{A}cos\theta + \mathbf{B}sin\theta + \mathbf{C} \equiv 0 \ \ (0 \le \forall\theta \le 2\pi) \ \ \Longrightarrow \ \ \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 \ge \mathbf{C}^2 \\
 & & \quad where \ \ cos\theta = c_1 \ \ sin\theta = s_1 \ \ (FORALL - condition) \ \ in \ \ Rem_7 \\
 & \Downarrow & \\
Result_1 & : & -r_2^4 + (2r_1^2 + 8p_2^2 + (-8b_2 - 8a_2)p_2 + 8p_1^2 + (-8b_1 - 8a_1)p_1 \\
 & & +2b_2^2 + 4a_2b_2 + 2b_1^2 + 4a_1b_1 + 2a_2^2 + 2a_1^2)r_2^2 - r_1^4 \\
 & & +(8p_2^2 + (-8b_2 - 8a_2)p_2 + 8p_1^2 + (-8b_1 - 8a_1)p_1 + 2b_2^2 + 4a_2b_2 \\
 & & +2b_1^2 + 4a_1b_1 + 2a_2^2 + 2a_1^2)r_1^2 - 16p_2^4 + (32b_2 + 32a_2)p_2^3 \\
 & & +(-32p_1^2 + (32b_1 + 32a_1)p_1 - 24b_2^2 - 48a_2b_2 - 8b_1^2 - 16a_1b_1 \\
 & & -24a_2^2 - 8a_1^2)p_2^2 + ((32b_2 + 32a_2)p_1^2 \\
 & & +((-32b_1 - 32a_1)b_2 - 32a_2b_1 - 32a_1a_2)p_1 + 8b_2^3 + 24a_2b_2^2 \\
 & & +(8b_1^2 + 16a_1b_1 + 24a_2^2 + 8a_1^2)b_2 + 8a_2b_1^2 + 16a_1a_2b_1 + 8a_2^3 \\
 & & +8a_1^2a_2)p_2 - 16p_1^4 + (32b_1 + 32a_1)p_1^3 \\
 & & +(-8b_2^2 - 16a_2b_2 - 24b_1^2 - 48a_1b_1 - 8a_2^2 - 24a_1^2)p_1^2 \\
 & & +((8b_1 + 8a_1)b_2^2 + (16a_2b_1 + 16a_1a_2)b_2 + 8b_1^3 + 24a_1b_1^2 \\
 & & +(8a_2^2 + 24a_1^2)b_1 + 8a_1a_2^2 + 8a_1^3)p_1 - b_2^4 - 4a_2b_2^3 \\
 & & +(-2b_1^2 - 4a_1b_1 - 6a_2^2 - 2a_1^2)b_2^2 \\
 & & +(-4a_2b_1^2 - 8a_1a_2b_1 - 4a_2^3 - 4a_1^2a_2)b_2 - b_1^4 - 4a_1b_1^3 \\
 & & +(-2a_2^2 - 6a_1^2)b_1^2 + (-4a_1a_2^2 - 4a_1^3)b_1 - a_2^4 - 2a_1^2a_2^2 - a_1^4 \ge 0
\end{array}
$$

Fig.3(b) Result of reasoning

Applied − rule_2 : *factorize and factorsum*

$\Downarrow$

$Result_2$: **LHS** $\Longrightarrow$

$$-(r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2 - 4p_2^2 + 4b_2p_2 + 4a_2p_2 - 4p_1^2 + 4b_1p_1 + 4a_1p_1 - b_2^2 - 2a_2b_2 - b_1^2 - 2a_1b_1 - a_2^2 - a_1^2)$$
$$(r_2^2 + 2r_1r_2 + r_1^2 - 4p_2^2 + 4b_2p_2 + 4a_2p_2 - 4p_1^2 + 4b_1p_1 + 4a_1p_1 - b_2^2 - 2a_2b_2 - b_1^2 - 2a_1b_1 - a_2^2 - a_1^2)$$
$$\Longrightarrow$$
$$-\{(r_2 - r_1)^2 - 4(p_2 - \tfrac{a_2+b_2}{2})^2 - 4(p_1 - \tfrac{a_1+b_1}{2})^2\}$$
$$\{(r_2 + r_1)^2 - 4(p_2 - \tfrac{a_2+b_2}{2})^2 - 4(p_1 - \tfrac{a_1+b_1}{2})^2\}$$

Applied − rule_3 : $(x-a)(x-b) \leq 0 \ \ (a \leq b) \iff a \leq x \leq b$

where $x = (p_1 - \frac{a_1+b_1}{2})^2 + (p_2 - \frac{a_2+b_2}{2})^2$

$\Downarrow$

$Result_3$: $(p_1 - \frac{a_1+b_1}{2})^2 + (p_2 - \frac{a_2+b_2}{2})^2 - (\frac{r_1+r_2}{2})^2 \leq 0$

$Result_4$: $(p_1 - \frac{a_1+b_1}{2})^2 + (p_2 - \frac{a_2+b_2}{2})^2 - (\frac{r_1-r_2}{2})^2 \geq 0$

4 PHASE IV : Translation into symbolic representations

```
New-Desc1 : (ON $P        (DOMAIN
                            (IN-SIDE      $O3)
                            (OUT-SIDE     $O4)))
New-Desc2 : (IS-CIRCLE    $(O3 2)         $PP              (plus r1 r2))
New-Desc3 : (IS-CIRCLE    $(O4 2)         $PP              (abs (minus r1 r2))
New-Desc4 : (IS-POINT     $(PP 2)         (MID-POINT       $A $B)

          ⇓

New-Desc5 : (ON $P        (DOMAIN
                           (IN-SIDE       ((CIRCLE
                                            (MID-POINT     (CENTER-OF $O1)
                                                           (CENTER-OF $O2))
                                                           (plus r1 r2)))
                           (OUT-SIDE      ((CIRCLE
                                            (MID-POINT     (CENTER-OF $O1)
                                                           (CENTER-OF $O2))
                                                           (abs (plus r1 r2))))
```

Fig.3(c) Result of reasoning