人　工　知　能 76－3
（１９９１．５．２２）

節形式に分解可能な認識論理を利用した効率的な信念推論システム

山本幹雄　　中川聖一

豊橋技術科学大学

人間の信念に関する推論を効率よく行える論理と推論システムについて述べる。複数の人間の信念をモデル化する論理としてＫＤ４５(m)と呼ばれる様相論理の１つがよく用いられるが、ＫＤ４５(m)の充足決定問題はＰ領域完全であることが知られている。本報告では、ＫＤ４５(m)の表現能力を制限することによって、推論の効率を高める方法を考察する。充足決定問題がＮＰ完全であるような様相演算子に対する３つの制限を考察した後、論理式をある種のHorn Clauseに制限することによって、さらに計算量を減らした推論システムを提案する。

An efficient inference system for belief based on a sub-system of a doxastic logic

Mikio Yamamoto　　Seiichi Nakagawa

Toyohashi University of Technology

We investigated a doxastic logic and an efficiant inference system for belief. The modal logic KD45(m) is often used for modeling of multiple agent belief. But the provability problem in KD45(m) is log space complete in P-SPACE class. This paper describes the method that improves the efficiency of inference system by some restrictions of formulae. We propose four restrictions. The provability problem of formulae restricted by first three restrictions is log space complete in NP class. We suggest that the inference system restricted by these and the formulae restricted like Horn clause is very efficient.

1．はじめに

近年、他者の心的な状態を表現し、推論する手法の研究が盛んである（[Halpern 85]など）。これは、人間と（あるいは機械同士）コミュニケーションを持つシステムの研究が非常に増えたことと、高度なコミュニケーションには相手の心的状態を考慮に入れる必要があることによると思われる。例えば、高度なインターフェース・システムでは、ユーザの信念・知識・意図などをシステムが把握することによってはじめて、ユーザにとってより円滑的で効率的なコミュニケーションを確立することができる。実際、自然言語対話などのような高度なインターフェースに応用される最近の談話理解および発話生成の理論の多くがユーザの意図、および信念を基にするモデルである（[Grosz 86]など）。

心的なモデルにはいろいろな側面が考えられるが、信念・知識に関しての研究が最も盛んである。信念・知識の形式的なモデル化のアプローチとしては、様相論理に基づくもの（[Hintikka 62]など）、Syntactic Theory（[Haas 86]など）、自己認識論理（[Moor 83]など）が挙げられる。

様相論理に基づくモデル化はこれらのアプローチの中では最も古く形式化も進んでいる。しかし、まだ多くの問題点を持っており、実用的なモデルは得られていない。特に大きな問題は、論理的全知の問題と計算量の問題である。論理的全知というのは（簡単に言うと）、人間の信念の形式化に論理を使用しているため、論理的結論の全てを人間が信じているということになってしまうことである。例えば、数学の公理を知っている人は数学の定理を全て知っているという結論を下してしまう。これは、明らかに人間のモデルとしては強すぎる。しかし、これは論理による形式化をそのまま生の人間のモデルとするために生じる問題で、論理による形式化を理想的な人間のモデルと考えれば、問題は生じないと思われる。本報告ではこれ以上論理的全知については言及しないが、以下の考察で述べる論理系はあくまでも理想的な人間のモデルであり、生の人間の信念のモデルではない。実際の人間のモデルを作るときは別の付加的な手法が必要であることを明記しておく。

計算量の問題とは様相論理式の充足決定問題の計算量が非常に大きいことである。具体的には、１人の信念を扱うのみである場合はNP完全であるが、２人以上の人間（またはシステム）を扱う信念の命題様相論理はP領域完全であることが知られている[Halpern 85]。２人でコミュニケーションしている場合は、相手の信念を表現すれば十分であるように思えるが、ネストした信念（すなわち相手が持っているこちらの信念のモデル）まで扱うとすぐに２人の信念を扱う必要がでてくる。よって、実際のシステムに応用する場合は、この論理の効率的な部分系を使う必要がある。

２章で信念に関する命題様相論理の公理系とその可能世界意味論について述べ、３・４章でいくつかの部分系とその計算量を考察する。５章では様相論理に拡張されたHorn clauseに論理式を限定し、さらに３・４章で考察した部分系の条件を課した推論システムについて述べる。

2．信念に関する命題様相論理とその意味論

信念に関する命題様相論理の部分系を考察する前に、命題様相論理の構文、その意味論と通常の信念様相論理の公理系を簡単に定義しておく。

2.1 構文

以下に命題様相論理式の定義を示す。

定義１：命題様相論理式
基本命題論理式の集合：$\Phi=\{P, Q, R, \cdots\}$
論理結合子：$\neg$（否定），$\wedge$（論理積）
様相演算子：$B1, B2, \ldots, Bm$
命題様相論理式：$Lm(\Phi)$ =「Φを含み、論理結合子・様相演算子の下に閉じている集合」 □

様相演算子の直感的な解釈はBipを「i番目の人がpという命題を信じている」と読むことによって与えられる。また、様相演算子の数mは、この構文によって与えられる論理がm人までの人間の信念を表現することを意味している。よって、$Lm(\Phi)$はm人の人間を考えたときに表現できる論理式すべての集合を表している。たとえば、pとqが$Lm(\Phi)$に含まれるとすれば、$\neg p$、$p\wedge q$、$B1p$、$B1q$、$B1(p\wedge q)$、$B2p$、… も$Lm(\Phi)$に含まれる。慣習にしたがい、$p\vee q$と$p\Rightarrow q$を、それぞれ、$\neg(\neg p\wedge\neg q)$、$\neg(p\wedge\neg q)$の省略とする。

2.2 可能世界意味論

様相論理の意味論としては、多くの場合Kripkeの可能世界意味論が用いられる。これは、可能世界意味論の柔軟性によって、多様な様相論理に少しの改良で適用できるからである。信念の様相論理に関してもHintikkaの研究以来、可能世界意味論を用いる場合が多い。本報告で用いる可能世界意味論は複数の人間の信念を扱うために複数の様相演算子を用いるため、Kripkeの可能世界意味論を若干拡張したマルチモデルMを使用する。

マルチモデルMはタプル$<W, w_0, V, \rho 1, \rho 2, \ldots, \rho m>$で定義される。ここで、Wは世界wiの集合、$w_0$は現実世界を表現しており、$w_0\in W$、Vは$W\times\Phi$から$\{T, F\}$への関数であり、各世界での基本命題論理式の真偽値を決定する付値関数である。ρiはW上での２項関係である。mは様相演算子の種類の数（m人の信念）である。ρiはそれぞれの人の信念に関する構造をとらえるために使用される。マルチモデルを使用して、ある世

界wでの命題様相論理式の真偽値を定義できる。あるマルチモデルM＝<W, ...>のWに含まれる世界wで様相論理式pが真であることを（M,w）⊨pと表せば、次のように定義できる。

定義２：命題様相論理式の充足可能性

以下のように再帰的に定義される。

(M,w)⊨P (for P∈Φ)　iff V（w,P）＝T

(M,w)⊨¬p　iff　(M,w)⊭p

(M,w)⊨p∧q　iff　(M,w)⊨p　かつ (M,w)⊨q

(M,w)⊨Bip　iff すべての(w,t)∈ρiであるようなtに対して、（M,t）⊨p　□

最後の行によって、「i番目の人がpを信じている」という命題は、その人が可能であると考えている全ての世界でpが真であるときのみ真になることが定義されている。命題様相論理式の充足可能性と妥当性を次に定義する。

定義３：命題様相論理式の充足可能性と妥当性

（M, w_0）⊨pであるような（M, w_0）が１つでもある場合、「pは充足可能である」と言う。また、すべての（M, w_0）に関して（M, w_0）⊨pである場合、「pは妥当である」と言い、⊨pで表現する。　□

ρiにいくつかの制限を課すことによって、各種様相論理の健全性と完全性を証明できる。ρiの制限としては以下のようなものがある。

Reflexivity　：すべてのs∈Wに関して(s, s)∈ρi

Transitivity：すべてのs,t,u∈Wに関して、(s, t)∈ρi かつ (t, u)∈ρiならば(s, u)∈ρi

Symmetry　：すべてのs,t∈Wに関して(s,t)∈ρiならば(t,s)∈ρi

Euclidean　：すべてのs,t,u∈Wに関して、(s,t)∈ρi かつ (s,u)∈ρi ならば(t,u)∈ρi

Serial　：すべてのs∈Wに関して(s,t)∈ρiであるようなtが存在する

次節では、あるマルチモデルに関して、完全な信念様相論理の公理系ついて述べる。

２.３ 信念に関する公理系

ＫＤ４５と呼ばれる様相論理の公理系が、１人の信念に関する論理として広く知られている。以下にＫＤ４５を複数の人間の信念を扱うものに拡張したＫＤ４５(m)の公理系を示す。

定義４：ＫＤ４５(m)

公理

(a1)すべての命題論理におけるトートロジー

(a2)[Bip∧Bi（p→q）]→Biq,　i=1, 2, ... , m

(a3)Bip→¬Bi¬p　i=1, 2, ... , m

(a4)Bip→BiBip　i=1, 2, ... , m

(a5)¬Bip→Bi¬Bip　i=1, 2, ... , m

推論規則

(r1)pかつp→qからqを推論する

(r2)pからBipを推論する,　i = 1, 2, ... ,m　□

ＫＤ４５(m)に関する以下の定理がよく知られている。

定理１：ＫＤ４５(m)の完全性[Halpern 85]

ＫＤ４５(m)は各ρiにSerial,Transitive, Euclideanの条件を課したマルチモデルに関して健全でかつ完全である。　□

ＫＤ４５(m)のある論理式pに関する充足決定問題の計算量に関しては次の定理が知られている。

定理２：ＫＤ４５(m)の充足決定問題の計算量 [Halpern 85]

ＫＤ４５(m)の充足決定問題の計算量はmに依存して次のようになる。

m = 1の場合　：ＮＰ完全

m ≧ 2の場合：Ｐ領域完全　□

また、論理式pを充足するマルチモデルMの世界間の関係は非常に複雑そうに見えるが、ある単純な形のものだけを考慮すれば十分であるという定理も知られている。

定理３：[Halpern 85]

ＫＤ４５(m)の論理式pが充足可能であるとき、またそのときに限り世界間の関係が木構造をしたマルチモデルの関係ρをSerial, Transitive, Euclideanの条件に閉じた関係に変換したマルチモデルM'が存在する。そのときの木構造の深さは｜p｜以下である。　□

任意のpを充足するマルチモデルMから木構造をしたマルチモデルM'への変換するマッピングを考えれば容易に証明される。この定理は図１のような構造の世界間の関係を考慮すれば十分であることを意味している。

３．ＫＤ４５(m)に公理を加えて制限した信念様相論理

この章ではＫＤ４５(m)に１つの公理を加えて制限した信念様相論理について考察する。

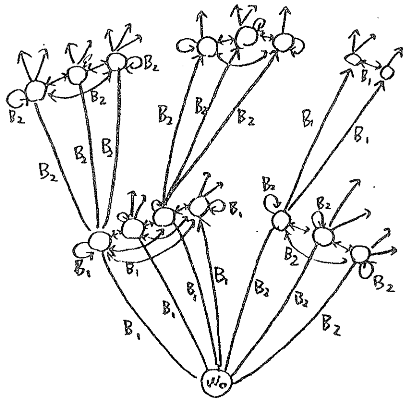

図１　KD45(m)のマルチモデルの例

３．１　ＫＤ４５(m)'

まず様相演算子Ｂｉについて考察する。前節で述べたようにＢｉｐは「i番目の人がｐを信じている」と解釈できる。問題となるのは、この命題の否定¬Ｂｉｐである。これを日本語で述べると「i番目の人はｐを信じていない」という解釈になる。「信じていない」ということから我々はどんな心理的な状態を想像するであろうか？１つの解釈は(a)「i番目の人がｐの否定を信じている」である。もう一方では、(b)「i番目の人がｐを信じていることはない」という解釈もできる。(b)の解釈はあくまでも信じていないだけであって、否定を信じているとは言っていないことに注意を要する。信念に関する注意深い観察によって信念の論理は(b)の解釈をとっており、これを形式化するのがＫＤ４５(m)体系である。

しかし、「Ａ君はそこに車があるとは信じていない。」という文などから受ける印象は「Ａ君はそこに車がないと信じている。」であるように感じる。このように、言語的な「信じている」はその否定によって、命題の否定を信じている場合が多いように思える。例えば、

「Ａ君は神の存在を信じていない。」

「Ａ君はその本が正しいと信じていない。」

「Ａ君は雪が黒いとは信じていない。」

等である。これら、すべては直感的には信じられる命題の否定を信じているような印象を受ける。このように、日常使用される「信じている」については、(a)のような強い解釈を行ってもよい場合が多いと思われる。「信じている」という単語以外にも「思っている」などの動詞も同じ様な傾向が見られる。一方、「知っている」に関しては「信じている」とは様子が異なる。例えば、「Ａ君はそこに車があるとは知らない」という文から得る印象は「Ａ君はそこに車がないと知っている」ではない。このように、「知っている」に関しては(b)の解釈をしなければならない場合が多い。

では、何故信念の論理にＫＤ４５(m)などのような、(b)の解釈をとるものがよいのであろうか？　これは、「知らない」あるいは「わからない」を表現するためである。ＫＤ４５(m)では¬Ｂｉｐ∧¬Ｂｉ¬ｐが矛盾ではなく、ｐも¬ｐも信じていないということから、「わからない」を表現できる。しかし、(a)の解釈を行う論理では¬Ｂｉｐ＝Ｂｉ¬ｐであるため、¬Ｂｉｐ∧¬Ｂｉ¬ｐ＝Ｂｉ¬ｐ∧Ｂｉｐ（ｐも¬ｐも信じている）となり、矛盾となる。このように「わからない」を表現し、推論するシステムではＫＤ４５(m)を使う必要があるのである。だが、まさにこのためにm≧2の論理式の充足決定問題がP領域完全になるのである。次節以下で示すように、(a)の解釈をとる論理ではそのm≧2に関してもNPクラスに留まる。「わからない」を表現する必要のないシステムには(a)の解釈をとる論理で十分である。

３．２　ＫＤ４５(m)'の公理系と完全性

前節の(a)のような解釈による公理系は、ＫＤ４５(m)に

(a6)　¬Ｂｉｐ→Ｂｉ¬ｐ，　ｉ＝１，２，．．．，m

という公理を付け加えることによって得られる。以下では、この体系をＫＤ４５(m)'と呼ぶことにする。

ＫＤ４５(m)'のモデルはＫＤ４５(m)のρｉに対する制限に次の制限を加えることによって得られる。

(c1)　すべてのs∈Wに関して、(s,t)∈ρiであるようなtは多くとも１つしか存在しない

次のような定理が証明される。

定理４：ＫＤ４５(m)'の完全性

ＫＤ４５(m)'は、可能世界間の関係ρｉに、Serial,Transitive, Euclideanおよび(c1)の条件を課したマルチモデル（ste-c1モデルと呼ぶ）に関して、健全でかつ完全である。　□

証明：

健全性：(a1)～(a6)の妥当性と、(r1),(r2)の健全性をste-c1モデルに対して示せばよい。容易であるので省略する。

完全性：最大無矛盾集合を利用しても証明できるが、ここではCatach[Catach 88]のDeterministic theoryを使って間接的に証明する。Deterministic Theoryを我々の論理向けに書くと次のようになる。

(a1),(a2),(r1),(r2)を含む論理で、

$$\neg Ba_1 \ldots Ba_k \neg Bb_1 \ldots Bb_\ell p \rightarrow Bc_1 \ldots Bc_m \neg Bd_1 \ldots Bd_n \neg q$$

のような形の公理を含むものは、可能世界間の関係ρiに次のような制限を加えたマルチモデルに対して健全かつ完全である。

$$\rho_{a_1}^{-1} | \cdots | \rho_{a_k}^{-1} | \rho_{c_1} | \cdots | \rho_{c_m} \subseteq \rho_{b_1} | \cdots | \rho_{b_\ell} | \rho_{d_1}^{-1} | \cdots | \rho_{d_n}^{-1}$$

ここで、"|"は関係の連接、"-1"は逆関係を表している。

この定理を利用すれば、(a6)の公理より、ρiの制限として

$$\rho i^{-1} | \rho i \subseteq \lambda$$

が導かれる。ここでλはs∈Wであるすべてのsに関してreflexitiveな関係(s,s)の集合である。この制限はρiが多くとも1つの世界にしか到達できないことと同じ意味である。これは(c1)の条件に他ならない。よって、ste-c1モデルに対してKD45(m)'は健全でかつ完全である。□

図2にKD45(m)' のマルチモデルの様子を示す。KD45(m)(図1)とは異なり、他人の信念を表す可能な世界はただ1つだけである。

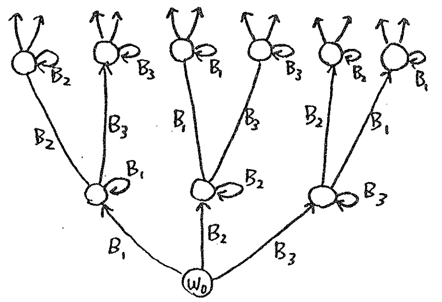

図2 KD45(m)'のマルチモデルの例

3.3 KD45(m)'の論理式の充足決定問題の計算量

次に、KD45(m)' の論理式の充足決定問題の計算量を考察する。まず、始めに次節の証明でも使用する補題を証明する。

補題1：

KD45(m)あるいはKD45(m)'の論理式p(|p|=nとする)が充足可能であるならば、世界の集合Wの大きさがn^c(cは定数)以下であるようなマルチモデルMが1つは存在し、Mはpを充足するとする。このとき、充足決定問題はNPクラスに属する。□

証明：

各世界での付値関数をpに現われる基本論理式だけに値を与えるように限定すれば、pに現われる基本論理式の数がn個以下である。また、各世界間の関係ρiの要素の数はn^{2c}以下である。pに現われる様相演算子の種類もn個以下であるから,ρiはn個以下のである。よって、$O(n^{(2c+2)})$以下の時間でマルチモデルを非決定的に推測することができる。さらに、ρを制限する条件のチェックも多項式時間で行うことができるため、多項式時間で非決定的にpを充足する正しいマルチモデルを推測することができる。

マルチモデルMが与えられたならば、(M, s)⊨pであるかどうかを多項式時間で決定的に調べることができる。これは、再帰的にpの部分式を調べることで計算できる。

よって、非決定的に多項式時間でpが充足可能であるかどうかを決定できるのでNPクラスに属することになる。□

KD45(m)' は命題論理を内に含むので充足決定問題がNP困難であることは明らかである。よって、KD45(m)' の充足可能な論理式pが$|p|^c$以下の世界からなるマルチモデルで充足可能であることを示せば、補題1を使用してKD45(m)' の充足決定問題がNP完全であることを示すことができる。

命題1：

KD45(m)' の命題様相論理式pが充足可能であるならば、|p|以下の世界からなるマルチモデルMで充足可能である。□

命題1の証明：

LadnerはS5の論理式pが充足可能であるならば、pに含まれる様相演算子の数以下の世界からなるモデルで充足可能であることを証明するために、与えられた充足可能なモデルから|p|以下の世界からなるモデルへのマッピングを考えた。ここでも同じ様な手法を使う。

pを充足するマルチモデルM=<W, w0, V, ρ1, ..., ρm>があるとする。このとき、次のようなマッピングσをpの構造に関して再帰的に与える。q、r、sをpの部分式とする。

(i) (M、σ(p))⊨pであるようなσ(p)をWから選ぶ。
(ii) q=¬rならば、σ(r)=σ(q)
(iii) q=r∧sならば、σ(q)=σ(r)=σ(s)
(iv) q=Bir かつ (σ(q),σ(r))∈ρiが選ばれていないならば、(σ(q),σ(r))∈ρiであるようなσ(r)を選ぶ。
(v) q=Bir かつ (σ(q),σ(r))∈ρiが選ばれてい

るならば、σ（q）＝σ（r）

明らかに、｜Range(σ)｜≦n＋1≦｜p｜（ここでnはpに含まれる様相演算子の数）である。Vと各ρiについてRange(σ)に関連した部分だけに限定したV'とρi'を考える。このとき、M'を<Range(σ),σ(p),V',ρ1',...,ρm'>のようなマルチモデルとすれば、M'は明らかにpのモデルとなっていることを帰納的に証明できる。（KD45(m)'の各世界は1つの様相についてただ1つの世界にしかつながらないことに注意）□

定理5：
KD45(m)'の命題様相論理式pの充足決定問題はNP完全である。□

証明：
KD45(m)'は命題論理を内に含むため、NP困難であることは明かである。

命題1より、pが充足可能である場合はn+1以下の世界からなるマルチモデルMで充足可能である。補題1によって、KD45(m)'の充足決定問題はNPクラスに属することが言える。□

3.4 KD45(m)'の考察

KD45(m)ではBi（p∨q）≠Bip∨Biqであるため、任意の論理式を節形式には分解できない。一方、KD45(m)'では任意論理式を節形式に変換可能である。すなわちBi（q∨q）＝Bip∨Biqである。さらに、¬Bip＝Bi¬pであるから、任意の様相演算子列BiBj...Bnの後に命題論理のリテラル（すなわち、Pを基本論理式とするとPまたは¬Pの形）が付いた論理式を様相リテラルとすれば、任意の論理式を様相リテラルの論理積標準形に変換できる。この論理積標準形に導出原理を適用することができる。命題論理での導出原理による導出の際に、頭の様相演算子列が一致しているかどうかのチェックを行うことを付加するだけでよい。これは、他の様相論理よりかなり効率的である。

しかし、「わからない」を表現できないため、適用できない分野も多くあるであろう。以下の節では「わからない」をある程度表現でき、かつ計算量が少ないKD45(m)の部分系について考察する。

4．KD45(m)の部分系

KD45(m)がP領域完全であることは、ある論理式pを真とするマルチモデルの世界がpの長さに対して指数関数的に増加するためである。効率のよい推論システムを作るためには、マルチモデルの世界の数を減らすために、推論システムへ入力される論理式を制限する必要がある。特にマルチモデルの世界を入力の長さに対して多項式関数的な増加に留めるような制限をすることによって、NPクラスに引き下げることができる。また、可能世界の指数関数的増加でもその基数を下げることによって計算量を減らすことができる。以下ではそのため3つの入力論理式の制限について考察するが、まずはじめに以下の議論で有用な様相論理に拡張された節形式について述べる。

4.1 様相論理に拡張された節形式

様相論理式が命題論理のような節形式に変換できないのは、Bp∨q≠Bp∨Bqであることによる。拡張された節形式は、Bp∨qをリテラルと認める。続く節での議論はすべてこの節形式での議論とする。

定義5：様相論理に拡張された節形式
様相論理に拡張された節形式は信念節の論理積である。信念節は信念リテラルまたはその否定の論理和である。信念リテラルは基本命題論理式をP、またはBipの形をしたものである。ここで、pは信念節である。□

任意の様相論理式はド・モルガンの定理、Bp∧q＝Bp∧Bqを使って、拡張された節形式に変換することができる。例えば、次のような変換が可能である。

B1（（P∨B2（Q∧R））∧¬B3（¬P∧Q））
⇓
B1（（P∨B2Q）∧（P∨B2R））∧
B1（¬（B3¬P∧B3Q））
⇓
B1（P∨B2Q）∧B1（P∨B2R）∧
B1（¬B3¬P∨¬B3Q）

また、拡張された節形式のある様相演算子の極性（正または負）は次のように再帰的に定義される。

定義6：様相演算子の極性
(1)最も外側の様相演算子は否定がついている場合には負、付いていない場合には正の極性を持っている。またその演算子のスコープの中は同じ極性の雰囲気を持つと言う。
(2)負の雰囲気の中で、否定が付いている演算子は性の極性を持つ。付いていない演算子は負の極性を持つ。さらに、その演算子のスコープの中では同じ極性の雰囲気を持つ。□

例えば、B1¬B2（B3p∨¬B4q）では、B1,B4が正の極性を、B2,B3が負の極性を持つ。

4.2 様相演算子のネストの深さの制限

可能世界の数の制限で最初に考えられるのが、木構造の深さの制限である。構文的な制限は信念節の様相演算子のネストの深さを制限することによって得られる。例えば、ネストの深さをｃレベルに制限すれば、$|p|^c$の多項式で与えられる式の値に世界の数が制限されることは明かであろう。よって、次の定理が成り立つ。

定理６：様相演算子のネストの深さを制限した論理はＮＰ完全である。 □

人間は一般にそんなに深いレベルの信念のネストを考えない。せいぜい、相手が自分の事をどう思っているか、相手が第三者のことをどう思っているかを考えるくらいであろう。実際の応用ではこの制限を当てはめることができるため、信念の推論ではＮＰ完全であると考えてよいことになる。しかし、分散協調システムなどの人工的なシステムではこの考え方は成り立たないかもしれない。また、この方法ではネストを許す深さに対して｜ｐ｜を基数として指数関数的に計算量が増加していく。基数を制限する方法はあまりよい方法がないので、次の簡単な考察　にとどめる。

４．３ 負の極性を持つ信念リテラルの数の制限

ある世界で￢Ｂｉｐの形をした式が真であるためには、その世界から到達可能な１つ以上の世界があって、そこで￢ｐが真でなければならなかった。このため、タブロー法などの証明法は￢Ｂｉｐの形の部分式を見つけるたびに、到達可能な世界を仮定する。よって、￢Ｂｉｐなる式をある世界で真にするような入力をできるだけ避けることによって、推論の効率を上げることができる。これは、信念論理が大きな計算量を持っている原因がまさに、￢Ｂｉｐを表現するためであることによることからも明らかである。信念節をこのように制限するには、負の極性を持つ信念リテラルの数を減らせばよい。ある充足可能な論理式ｐの負の極性を持つ信念リテラルの数をｎとすると、ｎの$|p|$乗の可能世界を持つマルチモデルで充足可能であることは明らかであろう。また、前節で考察した様相演算子のネストの深さをｃに制限すれば、n^cという定数の可能世界のみを考えればよいことになる。実際問題としても、ある人が「知らない」という事実は、ある人が「知っている」事実よりもはるかに少ないであろうから、信念論理の計算量はそれほど大きくならないことが考えられる。また、コミュニケーションが可能なシステムでは、システムの計算を節約するために、￢Ｂｉｐなどの事実があったら、できるだけ相手に尋ねることによって、Ｂｉ￢ｐという事実に変換するべきであろう。（もっとも、相手が本当に「わからない」場合は尋ねても、￢Ｂｉ￢ｐであるということがわかるだけであるが。）

４．４ 単調な信念節への制限

前節の負の極性を持つ信念リテラルの数を減らすが、現実的でない場合もありえる。この節では、負の極性を持つ信念リテラルの数は制限しないが、その形を制限することによって、可能世界を減らす試みを行う。制限は次のように信念節に対して定義される。

定義７：負から正への極変化がない信念節
負の極性を持つ信念リテラルのスコープの中の信念リテラルはすべて負の極性を持つ節を、負から正への極変化がない信念節とする。 □

以後、このような信念節のことを単調な信念節と呼ぶ。例えば、次のような信念節は単調な信念節である。

$B1(p \vee B2q \vee r) \vee \neg B3(\neg p \vee q)$

$B1(p \vee \neg B3(q \vee B4B5r) \vee \neg B3r)$

それぞれ、負の極性を持つB3という様相演算子のスコープの中の信念リテラルは存在しないか、あっても負の極性を持っている（２つめの例ではB4とB5）。また、次の信念節は単調でない。

$\neg B2(p \vee \neg B3q) \vee B1 \neg B2 \neg B3p$

負の極性を持つＢ2とい様相演算子のスコープの中に正の極性を持つB3という様相演算子がある。

単調な信念節の論理積ｐに対する充足可能性に関して次の命題が成り立つ。

命題２：
単調な信念節の論理積であるｐが充足可能である場合、ｐの中の様相演算子の数をｎとすると、ｎ＋１個以下の可能世界から成るマルチモデルで充足可能である。 □

証明：
ｐを充足するマルチモデル$M = \langle W, w0, V, \rho 1, \ldots, \rho m \rangle$があるとする。このとき、次のような部分式からＷの要素へのマッピングσと、Ｗの部分集合ωをｐの構造に関して再帰的に与える。ｑ、ｒ、ｓをｐの部分式とする。

(i) ψ、ωを空集合とする。
(ii) $(M, \sigma(p)) \models p$であるような$\sigma(p)$をＷから選ぶ。
(iii) $q = \neg r$ならば、$\sigma(r) = \sigma(q)$
(iv) $q = r \wedge s$ならば、$\sigma(q) = \sigma(r) = \sigma(s)$
(v) $q = Bir$ かつ $V(\sigma(q), q) = T$ならば、次のようにして新しい世界を選ぶかどうかを決定する。
(A) $(\sigma(q), w) \in \rho i$かつ$w \in \psi$であるようなwがすでに選ばれている場合は$\sigma(r) = w$
(B) 選ばれていなければ、$(\sigma(q), w) \in \rho i$ である

ようなwを選び、$\sigma(r)=w$とし、ψにwを付け加える。

(vi) $q=Bir$ かつ $V(\sigma(q), q)=F$ならば、$(\sigma(q),w)\in\rho i$かつ$V(M,w)\not\models\Upsilon$ であるようなwを$\sigma(r)$として選ぶ。また、qを含む信念リテラルがあり、それが真の場合には（より前の再帰段階で調べているはずである）ωに$\sigma(r)$を加える。

Vと各ρiについてRange(σ)に関連した部分だけに限定したV'と$\rho i'$を考える。$\rho i'$を次の手続きによって拡張する。最初は$w=\sigma(p)$である。

(i) wから各$\rho i'$によって到達可能な世界の集合をそれぞれ、Siとする。
(ii) $s\in Si$であるようなすべてのsについて、それぞれの$\rho j'$について$(s, s')\in\rho j'$であるようなs'の集合をRjとする。
(iii) 各Rjに対して、$s\in Si$, $s'\in Rj$ $(i\neq j)$かつ$s,s'\in\omega$であるような(s, s')を$\rho j'$に加える。
(iv) すべての$s'\in Rj$に対して$w=s'$として(i)から同じ手続きを繰り返す。

得られた$\rho j'$のTransitive, Euclideanな条件についての閉包を$\rho j''$とする。このとき、M'を<Range(σ), $\sigma(p)$, V', $\rho 1''$, ..., $\rho m''$> のようなマルチモデルとすれば、M'はpを充足するモデルとなっていることをpの構造に対して再帰的に証明できる。M'の構成の様子を図3に示す。

ある世界wでpの部分式Biqが真になるためにはwから到達可能なすべての世界でqが真とならなければならないが、Range(σ)を得る手続きでは、Biqが真であるときも到達可能な1つの世界しか考慮に入れなかった。さらに$\rho i'$から$\rho i''$の拡張の手続きによって、Mでは木構造に似た世界間の関係で異なる親ノード（世界）に属する世界が、M'では同じ親を持つように拡張されてしまっている。証明の各再帰の段階で工夫のいる点は、それにもかかわらずBiqがσ（Biq）で真偽値を保存していることを言うことである。

pの中でのBiqの極性と、σ（Bip）におけるMでの真偽値によって4通りの場合分けができるが、pを充足するマルチモデルMの中で、極性が正の信念リテラルが偽、または極性が負の信念リテラルが真である場合はその信念リテラルの真偽値はpの真偽値に影響を及ぼさない。なぜなら、信念節は信念リテラルの論理和から成っているから、極性が正の場合は真、極性が負の場合は偽であってはじめて論理和の真偽値を真とする。さらに、信念節は単調であるからその役割が交替することはない（$\neg Bi(p\vee Bjr)$は$\neg p\wedge\neg Bjr$であるような世界が少なくとも1つあることを意味することに注意）。ある信念リテラルBiqを含むすべての信念リテラルの極性が正である場合は真、極性が負である場合は偽であるとき、Biqを有効な信念リテラルと呼ぶことにすれば、有効な信念リテラルBiqの真偽値が保存されることだけを証明すればよい。

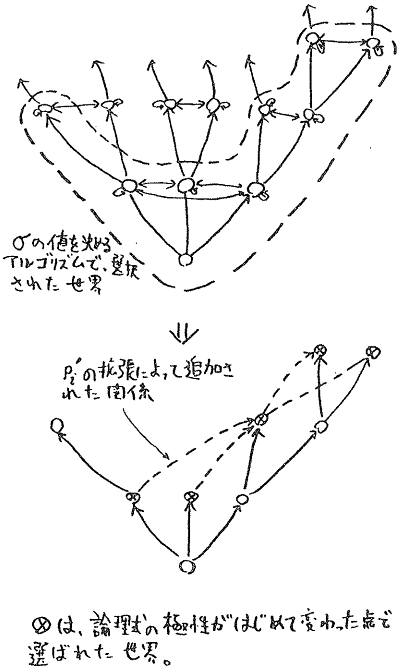

図3　新しいマルチモデルの構成の様子

（1）Biqが正の極性を持つ有効な信念リテラルであるとき、σ（Bip）から$\rho i''$で到達可能な世界は$\rho i'$で到達可能な世界であるか、または$\rho i''$への拡張の際に加わった極性が正から負に変わったばかりの有効な信念リテラルのみである。この極性が負になる直前の正の信念リテラルを真とする世界すべてにも、Biqが含まれていたはずであるから$\rho i''$で到達可能な世界すべてでも、qは真である。よって、Biqの真偽値は保存されている。

（2）Biqが負の極性を持つ有効な信念リテラルである場合は、$\rho i'$で到達可能な世界が$\rho i''$でも到達可能であるため、必ず$\neg q$の世界に到達可能である。よって、Biqの真偽値は保存されている。

再帰段階における他の部分式（Biq以外の形）の真偽値の保存は明らかであるから省略する。

以上のようにM'は、pを充足する。このとき、明らかに、$|\mathrm{Range}(\sigma)| <= n+1 <= |p|$（ここでnはpに含まれる様相演算子の数）である。□

5. 信念論理の推論システム

3・4章でいくつかの制限された信念論理を考察したが、すべて完全な命題論理を含んでいるため、NPクラスより計算量はよくならなかった。これでは、まだ実用的な推論システムとは言いがたい。この節では、強制的な節形式への変換により、命題論理のHorn clauseに非常に近い形に変形できる様相論理の部分系を考える。Prologへの変換も容易にできるため非常に効率のよい推論が期待できる。この部分系で許される論理式（Modal Horn clause(MHC)と呼ぶ）の形は以下で定義される。

定義8：Modal Horn Clause (MHC)

$$\mathrm{MHC} = C1 \vee C2 \vee \ldots \vee Cn \vee G \mid C1 \vee C2 \vee \ldots \vee Cn$$

GとCiはそれぞれ、G＝Bipまたは基本命題論理式、Ci ＝ ¬Biqまたは基本命題論理式の否定である。ここで、pは MHC、qはCjの論理和である。

□

Ciの中の項がすべて¬Biqの形をしているために、Jiangのepistemic Horn clause[Jiang 90]よりも、制限がきつくなっている。このために、以下のような全体的な節化をした際に命題論理のHorn clauseと非常に似た形になる。このため、Prologのような効率的な推論規則が得られる。MHCは次のような規則を用いて大域的な節化を行う。この手法は米崎[米崎88]による。

(1)命題論理の節形式への変換規則

(2) $Bi(p \wedge q)$	⇒	$Bip \wedge Biq$
(3) Bip	⇒	$[i,j]p$
(4) $Bi(p \vee q)$	⇒	$[i,j]p \vee [i,j]q$
(5) $\neg Bi \neg p$	⇒	$\langle i,j \rangle p$
(6) $\neg Bi \neg (p \wedge q)$	⇒	$\langle i,j \rangle p \wedge \langle i,j \rangle q$

ここで、[i,j]は世界変数、<i,j>は世界定数である。iは様相の種類（だれの信念か）、jは1つの変換規則が適用されるたびに、各様相に対して異なる値が割り付けられる。

このような変換によって次のような形式（MHCの展開形式と呼ぶ）の式の集合が得られる。

$$\Psi 1 \neg P1 \vee \ldots \vee \Psi n \neg Pn \vee \Psi n{+}1 Pn{+}1$$

ここで、Ψiは世界変数と世界定数の列、Piは基本命題論理式である。例えば、次のように変換される。

$B1(\neg p \vee \neg B2 \underline{(q \vee r)}) \vee B2r$

(1)によって、

$B1(\neg p \vee \underline{\neg B2 \neg(\neg q \wedge \neg r)}) \vee B2r$

(6)によって、

$B1(\neg p \vee \underline{(\langle 2,1 \rangle \neg q \wedge \langle 2,1 \rangle \neg r)}) \vee B2r$

(1)によって、

$B1(\neg p \vee \langle 2,1 \rangle \neg q) \vee B2r$

$B1(\neg p \vee \langle 2,1 \rangle \neg r) \vee B2r$

(3),(4)によって、

$[1,1]\neg p \vee [1,1]\langle 2,1 \rangle \neg q \vee [2,1]r$

$[1,1]\neg p \vee [1,1]\langle 2,1 \rangle \neg r \vee [2,1]r$

導出は次のような規則で行われる。

定義9：導出規則

2つのMHCの展開形式が次の形をしているとする。

$\Psi 11 \neg P11 \vee \ldots \vee \Psi 1n \neg P1n$

$\Psi 21 \neg P21 \vee \ldots \vee \Psi 2k \neg P1k \vee \Psi 2k{+}1 P2k{+}1$

1つめの展開形式の[S1i]¬P1iと、2つ目の展開形式のΨ2k+1P2k+1が次の条件を満たすとき導出可能である。

(1) $P1i = P2k{+}1$

(2) Ψ1iとΨ2k+1が代入θで統一化可能である。ここで、世界定数は同じ様相を持つ世界変数に代入可能であるとする。

導出可能であるとき導出節は次の形をしている。

$\Psi 11\theta \neg P11 \vee \ldots \vee$

$\Psi 1i{-}1\theta \neg P1i{-}1 \vee \Psi 1i{+}1\theta \neg P1i{+}1 \vee$

$\Psi 1n\theta \neg P1n \vee$

$\Psi 21\theta \neg P21 \vee \ldots \vee \Psi 2k\theta \neg P2k$

□

次のようなMHCの集合からの反駁を例としてあげる。

$B1B2(P \vee \neg Q)$	(1)
$B1 \neg B2 \neg Q$	(2)
$B1(\neg P \rightarrow B2 \neg P)$	(3)

から、B1Pを証明する。それぞれのMHCの展開形式は次のようになる。

(1),(2),(3)より、

$[1,1][2,1]P \vee [1,1][2,1]\neg Q$	(1)'
$[1,2]\langle 2,1 \rangle Q$	(2)'
$[1,3]P \vee [1,3][2,2]\neg P$	(3)'

反駁の仮定より

$\langle 1,1 \rangle \neg P$	(4)

反駁の仮定より、トップダウンに導出を行った結果を図4に示す。

我々のHorn Clauseをただ1つの様相を持つS5の体系に制限すれば、多項式時間の計算量で充足決定問題を解くことができることが証明されている。しかし、KD45(m)が2以上のmに対して、NP完全からP領域完全に移ったように、Horn Clauseに制限されても複数の様相に対する充足決定問題は多項式時間からより複雑なクラスに移行する可能性が強いと我々は考えている。なぜなら、Horn clauseへの制限はマルチモデルの世界の数を制限していないからである。Horn clauseの中で自由に様相演算

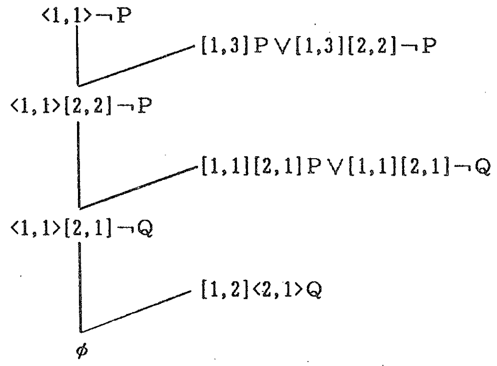

図4　導出例

子を許すと調べなければならない世界の数が入力の長さに対して指数関数的に増加する。３・４章で考察したような制限は、Horn clauseに対しても有効である。以下のような制限が考えられた。

(1)ＫＤ４５(m)'の式であると考える
(2)様相演算子のネストの深さの制限
(3)負の極性を持つ信念リテラルの数の制限
(4)単調な信念リテラルへの制限

ＫＤ４５(m)'の論理式であると考えれば、様相演算子の否定を自由に移動できるので、世界定数がなくなり、命題論理の導出に様相演算子列の一致のチェックを付加するだけになる。これは明らかに、多項式時間での充足決定問題を解くことができることを意味する。

単調な信念リテラルへの制限の結果は、展開されたMHCの各項が持つ世界変数、世界定数の列が次の形に制限されることになる。

Ｖ1・・・ＶnＣ1・・・Ｃk
　ここで、Ｖiは世界変数、Ｃjは世界定数

様相演算子列の最大の長さをｎ、最も多数の世界定数がある様相の世界定数の個数をｍとすれば、制限がない場合、m^n個の世界を調べなければならなっかたが、上記の制限により、調べるべき世界の数が項の数に抑えられる（一般に世界定数同士はマッチングできないことに注意）。図４の導出の例で述べた論理式はすべて単調な信念リテラルからなっている。表現能力が落ちた点は「知らないことを知らない」などの信念リテラルの否定がネストできないことである。しかし、このような複雑な事実は現実問題としてはめったに現れない。人間でもこのような推論が必要な場合は複雑な信念に関するパズルを解くときくらいであろう。

５．おわりに

ＫＤ４５(m)は理想的な人間の信念のモデルとしてよく使われるが、計算量が大きいという問題点があった。より、計算量が少ない信念のモデルを考えるアプローチも考えられるが、ここではＫＤ４５(m)の計算量の少ない部分系を考察した。ＫＤ４５(m)がすぐれている点は「わからない」という命題に対する表現・推論が非常に合理的に形式化されていることである。しかし、この点が計算量を増やしている原因でもあるため、「わからない」の表現能力を落とすことにより、計算量を減らす提案を行った。これからの課題は、多項式時間で計算できる部分系のより形式的な評価と、実際のアプリケーションに応用可能な推論システムを構築することである。

参考文献

[米崎 88] 米崎，「順序的性質の記述を含む時間論理のリゾリューション」,日本ソフトウェア科学会第５回大会論文集，1988，pp.253-256.

[Catach 88] Catach, I., Normal multimodal logic, in Proc. of the 7th AAAI, 1988.

[Farinas 87] Farinas del Cerro,L. and Penttonen,M., A note on the complexity of the satisfiability of modal horn clauses, J. Logic Programming, Vol4, No.4, 1987, pp.1-10

[Grosz 86] Grosz, B. J. and Sidner, C., Attention, intentions and the structure of discourse, Computational Linguistics, Vol.12,No.3,1986, pp.175-204.

[Halpern 85] Halpern, J.Y. and Moses, Y., A guide to the modal logics of knowledge and belief, in 9th Int. Joint Conf. on AI, 1985.

[Haas 86] Haas, A.R., A syntactic theory of belief and action, Artificial Intelligence, Vol.28,1986, pp. 245-292.

[Hintikka 62] Hintikka, J., Knowledge and Belief, Cornell University Press, 1962.

[Jiang 90] Jiang, Y. j., An epistemic model of logic programming, New Generation Computing, 8, 1990, pp.33-59.

[Ladner 77] Ladner, R. E., The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic, SIAM J. on Computing, Vol.6, No.3, 1977, pp.467-480.

[Moor 83] Moor, R., Semantical considerations on nonmonotonic logic, Artificial Intelligence, Vol.25, 1985, pp.75-94.