人　工　知　能　82－2
（1992．5．26）

論理的推論と代数的推論の融合による幾何推論

新田 知明　　松山 隆司

岡山大学 工学部 情報工学科

Gröbner 基底法や Wu の方法などの代数的手法による幾何推論は、論理的推論では証明できなかった複雑な幾何問題の証明が可能である反面、直線上の点の配置関係や角の合同など順序関係に基づく幾何学概念を扱えないという問題がある。本論文ではこの問題を解決するために、幾何学公理・定理を用いた論理的推論と Gröbner 基底法による代数的推論を融合した融合幾何推論方式を提案する。融合推論では、前向き推論による新たな事実の導出と後向き推論によるサブゴールの生成が論理的推論によって行われ、順序概念を含まない部分問題が Gröbner 基底法で証明される。本稿では融合幾何推論の健全性を証明し、具体例によってその有効性を実証する。

GEOMETRIC THEOREM PROVING BY INTEGRATED LOGICAL AND ALGEBRAIC REASONING

Tomoaki Nitta　　Takashi Matsuyama

Department of Information Technology, Faculty of Engineering, Okayama University
1-1, Tsushima-Naka, 3-Chome, Okayama 700, JAPAN

Algebraic reasoning by Gröbner bases method and Wu's method has been shown to be enough powerful to prove those complex geometric problems which could not been proven by logical reasoning. These algebraic methods, however, share a crucial limitation that they cannot handle any geometric concepts involving ordering relations like *between* and congruent angles. To solve this problem, we propose an integrated reasoning method which combines both logical reasoning based on geometric axioms and theorems and algebraic reasoning by Gröbner bases method. In this paper, we prove the soundness of the proposed method and demonstrate its effectiveness with several illustrative examples.

1 序論

幾何学的概念に関する推論 (幾何推論) には論理的推論と代数的推論がある。研究の初期には主に述語論理に基づく論理的推論が試みられ、推論機能の向上を図る種々の研究 [11] が行われてきたが、論理的推論で解ける問題は簡単なものに限られていた。

一方、1978 年に Wu は代数的推論による幾何推論方式を提案した [12]。Wu の方法では、解析幾何学に基づいて幾何学概念を代数式で表現し、代数演算を施すことで推論を実現する。1980 年代になり代数的推論による幾何推論に関する研究が活発になり、Chou [3], Kapur [6, 7, 8], Kutzler and Stifter [9, 10] などが様々な推論方式を提案した。これらの代数的推論は多くの複雑な問題を解くことができ、論理的推論よりも強力な推論能力を持っていることが示された。しかし、これまでに提案された推論方式では、「角度」概念を正確に表現することができないこと (後述) を始めいくつかの本質的問題点が残されており、幾何推論を完全に実現するには至っていない。

従来の幾何推論の研究では論理的推論と代数的推論が別々に論じられており、両者を比較検討し融合する問題についてはほとんど議論されてこなかった。一般に代数的推論は、代数式 (等式) の操作・演算によって推論が実現されることから、線分の長さといった計量概念を含む問題や、複数の点の共直線性、直線群の共交差性の判定には適している。しかし、点の座標値を基本要素とした問題記述を行うため、多角形などの高次図形の記述やその性質に基づく推論を実現しにくいという問題がある。一方、論理的推論は述語計算に基づいて構造的な推論を行うため、計量概念の表現や点の座標値に直接依存した共直線性や共交差性の判定には適さないが、高次図形を定義しその性質を用いた推論を行うことは可能である。

このように論理的推論と代数的推論は相補的特徴を持っている。そこで我々は、一般性を持った高度な幾何推論を実現するには両者を融合した複合型の推論方式を考案する必要があると考え、異なる 2 つの推論手法の有機的結合を目指して研究を進めている。

述語論理による問題記述・推論と代数的推論を結び付けた幾何推論システムとしては文献 [1][13, 14] がすでに提案されている。しかし文献 [1] のシステムでは、幾何学概念に関する推論は、代数的推論の 1 つである Cylindrical Algebraic Decomposition(CAD) によって実現されており、述語論理の位置付けは幾何問題を形式的に表現するための手段であり、幾何学知識に基づく実質的な論理的推論が行われているわけではない。また、文献 [13, 14] では代数的推論として Wu の方法を採用し、論理的記述と代数的記述の相互変換によって 2 つの推論手法を結合した幾何推論システムを提案している。しかし、このシステムでも幾何学概念に関する実質的推論は Wu の方法で実現されており、論理的推論は代数的記述に含まれる変数に関する情報の抽出など、Wu の方法を効率化するための補助的なものに留まっている。

本論文では、代数的推論の 1 つである Gröbner 基底法と幾何学公理・定理に基づく論理的推論を結合した融合推論方式を提案し、いくつかの具体例によってその有効性を示す。まず 2 では Gröbner 基底法の原理と特徴についてまとめ、その推論能力の限界として順序概念に基づく推論が行えないことを明らかにする。3 では順序概念を含む重要な幾何学概念として角度を取り上げ、角度概念に関する幾何学公理・定理を用いた論理的推論によって Gröbner 基底法の限界を打ち破ることを目指した融合推論方式を提案し、推論方式の完全性・健全性について議論する。4 では融合推論方式に基づいて実現した幾何推論システムについて述べ、5 で具体例によってその有効性を実証する。最後に 6 では、さらに高機能な幾何推論システムの実現に向けての課題をまとめる。

2 Gröbner 基底法による代数的推論とその問題点

2.1 代数的推論の原理

Hilbert [16] によると、ユークリッド平面幾何学は点と直線を基本要素とし、4 つの基本的な関係と 15 の公理によって定義される。第一階述語論理では、4 つの関係を表 1 のように点と直線を引数とする述語で表現する。

第一階述語論理の完全性より、幾何学の世界において「仮定から結論が推論 (証明) される」ことは、仮定を表す論理式の集合を $\{\mathrm{hyp}_1, \mathrm{hyp}_2, \ldots, \mathrm{hyp}_n\}$、結論を表す論理式を conc、15 の幾何学公理を表す論理式の集合を Axioms とすると、次のように表される。

$$\mathrm{Axioms} \cup \{\mathrm{hyp}_1, \mathrm{hyp}_2, \ldots, \mathrm{hyp}_n\} \models \mathrm{conc} \qquad (1)$$

これは $\mathrm{Axioms} \models (\mathrm{hyp}_1 \wedge \mathrm{hyp}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{hyp}_n) \rightarrow \mathrm{conc}$ と同値であるから、幾何推論は Axioms のすべてのモデルが次の論理式を充足することを示すことによって実現される。

$$(\mathrm{hyp}_1 \wedge \mathrm{hyp}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{hyp}_n) \rightarrow \mathrm{conc} \qquad (2)$$

このことは、式 (2) を否定した次の論理式が Axioms のすべてのモデルに対して充足されないことと同値である。

$$\mathrm{hyp}_1 \wedge \mathrm{hyp}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{hyp}_n \wedge (\neg \mathrm{conc}) \qquad (3)$$

また Axioms は範疇的であることが知られており、Axioms のすべてのモデルは同形である。したがって、式 (2) が Axioms のすべてのモデルで充足されることを示すためには、ある 1 つのモデルを考え、その下で式 (3) が充足されないことを示せば十分である。

代数的推論は Axioms の代数的なモデルを考え、式 (2) が充足される (あるいは式 (3) が充足されない) ことを代数演算によって示すというものである。Axioms の代数モデルとして直交座標系を用いた解析幾何学を採用すると、表 1 の基本述語の解釈は、実数変数の多項式からなる等式、不等式および等式の否定によって表 2 のような代数表現として与えられる。

幾何問題は表 1 の 4 つの関係を用いて記述されるので、代数表現には一般に不等式および等式の否定が含まれるが、これらは補助変数 $z \in \mathbf{R}$(実数) を導入することによって次

表 1: 幾何学的関係を表す述語

点 P が直線 L 上にある	on(P,L)
点 P が 2 点 A,B の間にある	between(P,A,B)
線分 AB の長さと線分 CD の長さが等しい	eqseg(A,B,C,D)
角 ABC の大きさと角 DEF の大きさが等しい	eqang(A,B,C,D,E,F)

表 2: 幾何学的関係の代数表現

on(P,L)	$ax_P + by_P + c = 0$
between(P,A,B)	$(\exists t \in \mathbf{R})(0 < t < 1 \wedge x_P = (1-t)x_A + tx_B \wedge y_P = (1-t)y_A + ty_B)$
eqseg(A,B,C,D)	$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - (x_D - x_C)^2 - (y_D - y_C)^2 = 0$
eqang(A,B,C,D,E,F)	$(x_B \neq x_A \vee y_B \neq y_A) \wedge (x_A \neq x_C \vee y_B \neq y_C) \wedge$ $\neg(\exists t \in \mathbf{R})(0 < t < 1 \wedge x_B = (1-t)x_A + tx_C \wedge y_B = (1-t)y_A + ty_C) \wedge$ $((x_A - x_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(y_C - y_B))^2((x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2)((x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2) =$ $((x_D - x_E)(x_F - x_E) + (y_D - y_E)(y_F - y_E))^2((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2)((x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2) \wedge$ $((x_A - x_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(y_C - y_B))((x_D - x_E)(x_F - x_E) + (y_D - y_E)(y_F - y_E)) \geq 0$

のように等式に変換できる。p を実数の変数、係数からなる代数式としたとき、

$$p \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)pz - 1 = 0 \tag{4}$$

$$p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)pz^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

$$p \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)p - z^2 = 0 \tag{6}$$

さらに論理和 $\vee$ と否定 $\neg$ も取り除くことができる。f, g を実数の変数、係数からなる代数式としたとき、

$$f = 0 \vee g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad fg = 0 \tag{7}$$

$$\neg(f = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)fz - 1 = 0 \tag{8}$$

このようにすることで、式 (3) の代数表現は等式と論理積 $\wedge$ のみからなる次のような標準形となる。ただし説明の簡単化のため、1 つの論理式が 1 つの多項式等式として表されるとし、$h_1, h_2, \ldots, h_n$ を仮定、c を結論を表す実数変数の多項式とする。

$$h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge \cdots \wedge h_n = 0 \wedge cz - 1 = 0 \tag{9}$$

代数モデルにおける論理式の真理値は等号の成否であり、代数的には代数方程式の実数上の解の有無である。したがって、仮定を表す連立方程式 $h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0$ に結論の否定を表す方程式 $cz - 1 = 0$ を加えた連立方程式 (9) が実数上で解を持たないということが、式 (3) の論理式が充足されないことに相当する。このことから、$x_1, \ldots, x_v$ を変数とする多項式 $f_1, \ldots, f_k$ に対して、代数方程式 $f_1R_10, \ldots, f_kR_k0$ $(R_i \in \{=, \neq, >, \geq\}$ $(1 \leq i \leq k))$ の実数上の解集合を $Z_{\mathrm{R}}^{[x_1,\ldots,x_v]}(\{f_1R_10, \ldots, f_kR_k0\})$ で表し、ϕ を空集合とすると、代数的推論における証明の成否の判定条件は、$h_1, h_2, \ldots, h_n, cz-1$ を $y_1, \ldots, y_m$ (z を含む) を変数とする多項式として、次のように表せる。

$$Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(\{h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0, cz - 1 = 0\}) = \phi \tag{10}$$

多項式方程式の解の有無を判定する代数演算には CAD、Wu の方法、Gröbner 基底法などがある [5]。しかし CAD は計算量が非常に大きく、実際には数個の変数しか含まないような簡単な問題にしか用いることができない。また Wu の方法は、厳密には仮定を表す多項式の最高次数項の係数が 0 ではないという補助条件を伴った証明を与える手続きである。与えられた仮定の下での補助条件の成立は必ずしも保証されないので、Wu の方法では仮定から結論が導かれることを厳密に証明したことにはならない [10]。

一方、本研究で用いる Gröbner 基底法は次のような性質に基づいている [2]。$x_1, \ldots, x_v$を変数とする多項式の集合 $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ の Gröbner 基底を $\mathrm{GB}(F)$ で表し、$Z_{\mathrm{C}}^{[x_1,\ldots,x_v]}(\{f_1 = 0, \ldots, f_k = 0\})$ を代数方程式 $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$ の複素数上の解集合とすると、

$$\begin{aligned} &Z_{\mathrm{R}}^{[x_1,\ldots,x_v]}(\{f_1 = 0, \ldots, f_k = 0\}) = \phi \\ &\Leftarrow Z_{\mathrm{C}}^{[x_1,\ldots,x_v]}(\{f_1 = 0, \ldots, f_k = 0\}) = \phi \Leftrightarrow 1 \in \mathrm{GB}(F) \end{aligned} \tag{11}$$

したがって式 (10)(11) より次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(\{h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0, cz - 1 = 0\}) = \phi \\ &\quad \Leftarrow 1 \in \mathrm{GB}(\{h_1, h_2, \ldots, h_n, cz - 1\}) \end{aligned} \tag{12}$$

以上のことから、$\{h_1, h_2, \ldots, h_n, cz-1\}$ の Gröbner 基底を計算し 1 が含まれているならば式 (2) は Axioms の論理的帰結となるので、Gröbner 基底法は健全性が保証される。しかし式 (12) はその逆が成り立たない、すなわち Gröbner 基底法による幾何推論は完全性が保証されないことを表している。このことは、Gröbner 基底法 (および Wu の方法) による幾何推論の大きな限界となっている。

2.2 Gröbner 基底法の問題点

Gröbner 基底法は、完全性が保証されないことに加えて次のような 2 つの問題点がある。

2.2.1 幾何問題の妥当な代数表現

一般に幾何学定理は作図可能性より図中にあるすべての点が実数座標を持つことが保証され、その代数表現である連立方程式 (9) は実数上で解を持つことはありえない。しかし代数式への変換を不用意に行うと、幾何学定理であっても式 (9) が実数上で解を持つ場合がある。

これは暗黙の仮定条件の欠落に伴う現象である。暗黙の仮定は非縮退条件とも呼ばれ、「名前の異なる点は異なる座標値を持つ」というようなものであり、人間にとって当たり前の条件であるためにしばしば見落とされる。また「垂直」のような高次概念を用いると問題の記述が行いやすくなるが、高次概念はそれが成り立つための非縮退条件を伴う。例えば「線分 AB と線分 CD が垂直である (AB ⊥ CD)」に対しては、$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (x_C \neq x_D \vee y_C \neq y_D)$ という非縮退条件が考えられる。

これまでは非縮退条件を伴った幾何問題の妥当な代数表現についてあまり注意が払われていなかったために、欠落している非縮退条件を自動的に求めることができることが Wu の方法の利点であると言われてきた。しかし Kutzler [10] は、問題記述のための形式言語の拡張を幾何学公理に基づいて厳密に行うことで、非縮退条件の欠如に起因する代数的推論の不完全性を排除できることを示した。

2.2.2 順序概念の表現

Gröbner 基底の計算は右辺が 0 である等式の左辺の多項式の集合に対して定義されるため、表 2 に挙げた 4 つの幾何学的な関係を表す代数表現のうち、等式の否定や不等式を含むものは式 (4)(5)(6) で等式に変換しなければならない。しかし変数を複素数として扱う場合にも成立するのは式 (4)

表 3: 不等式を除いた代数表現

`between(P,A,B)`	$(\exists t \in \mathbf{R})(x_P = (1-t)x_A + tx_B \wedge y_P = (1-t)y_A + ty_B)$
`eqang(A,B,C,D,E,F)`	$(x_B \neq x_A \vee y_B \neq y_A) \wedge (x_A \neq x_C \vee y_B \neq y_C) \wedge$ $\neg(\exists t \in \mathbf{R})(x_B = (1-t)x_A + tx_C \wedge y_B = (1-t)y_A + ty_C) \wedge$ $((x_A - x_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(y_C - y_B))^2((x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2)((x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2) =$ $((x_D - x_E)(x_F - x_E) + (y_D - y_E)(y_F - y_E))^2((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2)((x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2)$

だけであり、不等式を複素数上で同値な等式によって表現することは不可能である。本研究では不等式制約を含む代数表現で表される概念を「順序概念」と呼ぶ。明らかに between と eqang は順序概念であり、Gröbner 基底法 (あるいは Wu の方法) では妥当な代数表現ができない概念である。事実これまでに Gröbner 基底法で証明された幾何学定理はすべて順序概念を含まないものである [2][3][4][6][7][8][9][10]。

ここでは表 2 で定義した代数表現から不等式を取り除き、順序概念を表 3 のような等式のみで表現した時の Gröbner 基底法の健全性と幾何学定理の証明能力を検証する。

between の代数表現における不等式は点の並びに関する順序を規定する条件であり、表 3 の代数表現を用いると on と同値な概念を表すことになる。また不等式を除いた eqang の代数表現は、2 つの角 θ_1 と θ_2 の間の関係を $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$ で制約するものであり、幾何学的には 2 つの角の合同とそれぞれの補角との合同を同時に含む概念を表す。

不等式を除くことは制約条件を緩めることに相当するので、それによって順序概念を表す代数方程式の解集合が拡張される。すなわち、g_i を $x_1,\ldots,x_u$ を変数とする多項式として、順序概念を含む命題を表す代数方程式を $g_1R_10,\ldots,g_qR_q0$ ($R_i \in \{=,\neq,>,\geq\}$ $(1 \leq i \leq q)$) とし、これから不等式を除いた代数方程式を $g'_1R'_10,\ldots,g'_{q'}R'_{q'}0$ ($R'_j \in \{=,\neq\}$, $g'_jR'_j0 \in \{g_1R_10,\ldots,g_qR_q0\}$ $(1 \leq j \leq q')$) とすると、一般に次の関係が成り立つ。

$$Z_{\mathrm{R}}^{[x_1,\ldots,x_u]}(\{g_1R_10,\ldots,g_qR_q0\}) \subseteq Z_{\mathrm{R}}^{[x_1,\ldots,x_u]}(\{g'_1R'_10,\ldots,g_{q'}R'_{q'}0\}) \qquad (13)$$

不等式を除いた代数表現を用いることで生じるこのような解集合の拡張によって、Gröbner 基底法は以下に述べるような性質を持つものになる。以下の議論では、仮定および結論を表す代数方程式を H, C (ただし等式の否定は式 (4) で等式に変換されている) とし、$H \cup C$ に現れる変数を $y_1,\ldots,y_m$ とする。また H, C から不等式を除いた代数方程式をそれぞれ H', C' で表す。

明らかに式 (13) より、$Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(H')$、$Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(C) \subseteq Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(C')$ が成り立つ。また式 (10) が、$h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0$ は解を持つが $cz - 1 = 0$ ($c \neq 0$) とは共通の解を持たないことを意味することから、代数的推論の判定基準は次のように表せる。

$$\phi \neq Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(\{h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0\}) \subseteq Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(\{c = 0\}) \qquad (14)$$

以下では代数方程式 X に対して、$Z_{\mathrm{R}}^{[y_1,\cdots,y_m]}(X)$ を $Z_{\mathrm{R}}(X)$、$Z_{\mathrm{C}}^{[y_1,\ldots,y_m]}(X)$ を $Z_{\mathrm{C}}(X)$ と略記する。

1. 順序概念が仮定に含まれる場合

順序概念を含まない C の否定と H' の等式標準形から得られる多項式集合に対して Gröbner 基底を計算した結果に 1 が含まれていれば、式 (12) より $Z_{\mathrm{R}}(H') \subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ である。したがって $Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(H')$ より $Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ であり、もとの仮定から結論が推論され、Gröbner 基底法は健全性を保証される。

逆に幾何学定理の場合は $Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ となっているが、$Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(H')$ であることから $Z_{\mathrm{R}}(H') \not\subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ となり、その結果 $Z_{\mathrm{C}}(H') \not\subseteq Z_{\mathrm{C}}(C)$ となり Gröbner 基底法では証明できなくなる場合が生じる。したがって、仮定が順序概念を含む場合に不等式を除いた代数表現を用いると、Gröbner 基底法で証明できる幾何問題の範囲が、式 (12) の不完全性による範囲からさらに狭められることになる。

図 1 の例題 1 (line,para は 4 で定義される述語) では、仮定の代数表現に含まれる不等式を除くことによって between (例題中では line) が on になることから図 2 の状況が、また eqang(e,a,d,e,b,c) が $\cos^2\angle\mathrm{ead} = \cos^2\angle\mathrm{ebc}$ となることから図 3 の状況が仮定の表す点の配置に含まれることになり、結論を満たさない場合を含む。つまり本来 $Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ であるにもかかわらず $Z_{\mathrm{R}}(H') \not\subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ となっている。

仮定:	`line([a,b]).`	`line([b,c]).`
	`line([a,e,c]).`	`line([c,d]).`
	`line([a,d]).`	`eqang(e,a,d,e,b,c).`
	`line([b,e,d]).`	`eqseg(a,e,b,e).`
結論:	`para(a,b,d,c).`	

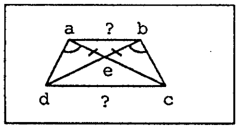

図 1: 例題 1

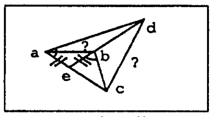

図 2: 点の並び

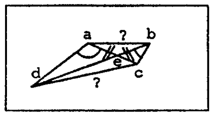

図 3: 補角との合同

2. 順序概念が結論に含まれる場合

C' の否定と順序概念を含まない H の等式標準形から得られる多項式集合に対して Gröbner 基底を計算した結果 1 が含まれており、式 (12) より $Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(C')$ であることが示されても、$Z_{\mathrm{R}}(C) \subseteq Z_{\mathrm{R}}(C')$ より $Z_{\mathrm{R}}(H) \not\subseteq Z_{\mathrm{R}}(C)$ となる場合がある。したがって、結論が順序概念を含む場合に不等式を除いた代数表現を用いると、Gröbner 基底法の健全性が失われてしまい証明としての意味をなさなくなってしまう。

図 4 の例題 2 (rangle,midpoint,perpen は 4で定義される述語) では、結論の代数表現に含まれる不等式を除いて Gröbner 基底法による証明を行うと $Z_{\mathrm{R}}(H) \subseteq$

仮定:　line([a,d,c]).　line([c,e]).
line([a,f,b]).　rangle(a,b,c).
line([a,e]).　midpoint(d,a,c).
line([c,b]).　perpen(a,b,d,e).
line([d,f,e]).　eqseg(a,d,d,e).
結論:　eqang(a,c,e,e,c,b).

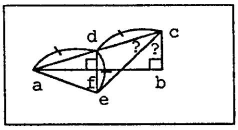

図 4: 例題 2

$Z_R(C')$ が示されるが、これは $Z_R(H) \subseteq Z_R(C)$ かどうかについては何も証明したことにはならない。

不等式を式 (5)(6) によって等式に変換した場合でも、変換して得られる等式は複素数上では代数式 p に関する制約の意味をなさないので、不等式を除いた代数表現で順序概念を表す場合と同様の議論が成り立つ。

以上より、順序概念を含む幾何問題を Gröbner 基底法で扱おうとすると、証明できる幾何問題の範囲が式 (12) の不完全性によるものよりさらに減少するという問題点とともに、Gröbner 基底法の健全性が失われてしまうという決定的な問題点が生じる。そこで本研究では、順序概念を含む幾何問題に対しても健全性が保証される推論方式の実現をめざし、Gröbner 基底法と論理的推論の融合を検討した。

3　論理的推論と代数的推論の融合

2 で述べたように、Gröbner 基底法は順序概念を含む幾何問題に対して健全性が失われるという問題点がある。しかし、順序概念のうち eqang は三角形の合同定理などによって非順序概念による表現に変換できる場合が多く、between も特殊な場合に限り非順序概念に変換できる。こうした問題変換は論理的推論によって実現可能であり、順序概念を含んだ幾何問題が on と eqseg のみによる表現になれば、Gröbner 基底法で証明することができる。

このような考えに基づき、本研究では eqang に注目した問題変換によって Gröbner 基底法と論理的推論を融合した推論システムを開発した (図 5)。

3.1　融合推論方式

本研究で提案する融合推論の基本的な考え方を以下に述べる。推論システムへの問題の入力は 4 で定義する述語を用いた論理的記述で行われる。システムはまず問題記述に eqang が含まれるかどうかで場合わけをする。eqang を含まないものは直ちに Gröbner 基底法で証明し、含むものは論理的推論による問題変換を伴う融合推論を行う。

論理的推論では、まず論理式として表現された幾何学公理・定理を仮定に対して適用し前向き推論を行う。これによって新しく導出された事実は仮定の集合に加えられる。拡張された仮定に結論が含まれていれば、仮定から結論までの導出パスが存在し、式 (1) が証明される。そうでない場合には、結論が eqang ならば後向き推論を行い、結論を成り立たせるためのいくつかのサブゴールを導出する。結論が eqang でない場合は拡張された仮定を基に Gröbner 基底法によって結論の証明が試みられる。

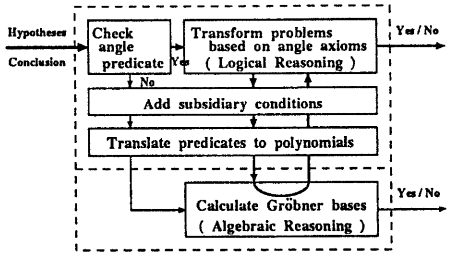

図 5: 融合幾何推論システムの構成

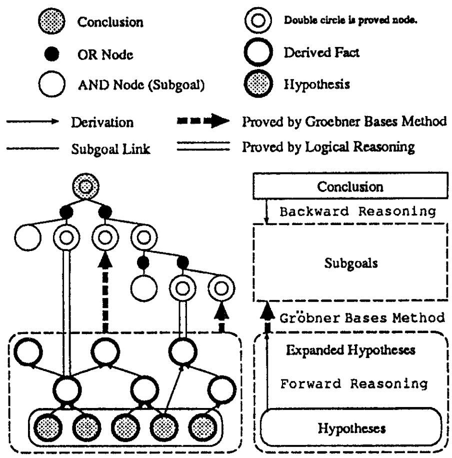

図 6: AND-OR 木

後向き推論で適用可能な幾何学公理・定理は複数存在するので、その結果は一般に図 6 のように結論を根とする AND-OR 木となる。ある 1 つの OR ノードにつながるすべての AND ノードが、ある幾何学公理・定理の適用の結果生成されたサブゴールに相当する。それらがすべて妥当ならば結論も妥当であり、サブゴールから結論までの導出パスが存在する。また、拡張された仮定にサブゴールが含まれていればそのサブゴールは妥当であり、仮定からサブゴールまでの導出パスが存在する。したがって、最上位のいずれかの OR ノードの下のすべての AND ノードが拡張された仮定に含まれていれば、仮定から結論までの導出パスが存在し、式 (1) が証明される。

しかし複雑な問題では、このような論理的推論だけでは仮定から結論までの完全な導出パスが得られない場合が多い。そこで本研究では Gröbner 基底法を融合することで論理的推論の限界の克服を図った。Gröbner 基底法は、論理的推論のみでは構成できない拡張された仮定とサブゴールの間の導出パスを補うために試みられる。つまり、論理的推論で妥当性が証明できなかった各サブゴールに対して、それが eqang ならば再帰的に後向き推論を行う一方、eqang でなければ拡張された仮定から順序概念 (不等式) を除いたものを仮定として Gröbner 基底法によって証明を試みる。Gröbner 基底法によってサブゴールが証明されれば、仮定からそのサブゴールまでの導出パスが存在することが示さ

れる。このようにして、結論を成り立たせるために要求される複数のサブゴールを Gröbner 基底法と論理的推論によって証明することによって、仮定から結論までの完全な導出パスが構成され、問題全体の証明が完成する。

上述の融合推論法では順序概念として eqang のみを取り扱ったが、原理的には between も eqang と同様の扱いをすることが可能である。しかし、eqang に比べて between の非順序概念への変換は非常に特殊な場合に限られる上、幾何問題において結論(あるいはサブゴール)に between が現れることが少ないことから、本システムでは結論が between である幾何問題は扱わないこととし、後向き推論で用いられる幾何学公理・定理にはサブゴールとして between を生成しないものを採用した。また、システムは前向き推論を行う場合は between を順序概念と見なすが、Gröbner 基底法による代数的推論を行う場合には between(P,A,B) を on(P,L) $\wedge$ on(A,L) $\wedge$ on(B,L) $\wedge$ (A $\neq$ B) $\wedge$ (A $\neq$ P) $\wedge$ (P $\neq$ B) と見なして代数式に変換する。これは順序概念に対して不等式を除いた代数表現を用いることに相当するので、2.2.2 の議論より証明の健全性は失われない。したがって、between を含む問題に対する融合推論のメリットは、前向き推論による新しい事実の導出に限られる。

3.2 融合推論の健全性と完全性

3.2.1 論理的推論の性質

論理的推論では、幾何学公理の集合 Axioms に加えて、幾何学定理の集合 $\mathrm{Th} = \{\mathrm{th}_1, \mathrm{th}_2, \ldots, \mathrm{th}_l\}$ を用いて証明を行う。$\mathrm{Axioms} \models \mathrm{th}_i$ $(1 \leq i \leq l)$ であるから次式の成否は式 (1) の成否と一致する。ただし $\mathrm{Hyp} = \{\mathrm{hyp}_1, \mathrm{hyp}_2, \ldots, \mathrm{hyp}_n\}$ とする。

$$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp} \models \mathrm{conc} \quad (15)$$

$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th}$ の要素うち、前向き推論で用いられる論理式は一般に次のような形をしている。ただし A_i $(1 \leq i \leq r)$, B_j $(1 \leq j \leq s)$ は原始論理式であり、$(\forall X)\mathrm{P}$ は論理式 P のすべての変数が全称限定されていることを表す。

$$(\forall X)((\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_r) \rightarrow (\mathrm{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{B}_s)) \quad (16)$$

ある置換 θ が存在し、証明すべき問題の仮定に $\mathrm{A}_1\theta, \ldots, \mathrm{A}_r\theta$ が含まれているならば $(\mathrm{A}_1\theta \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_r\theta) \rightarrow (\mathrm{B}_1\theta \wedge \cdots \wedge \mathrm{B}_s\theta)$ は式 (16) の論理的帰結であるから、$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp} \models (\mathrm{B}_1\theta \wedge \cdots \wedge \mathrm{B}_s\theta)$ である。$\mathrm{New} = \{\mathrm{B}_1\theta, \ldots, \mathrm{B}_s\theta\}$ を新しい事実として仮定に加えても、$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp} \cup \mathrm{New}$ は $\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp}$ と同じモデルを持ち、拡張された仮定に結論が含まれていれば式 (1) が成り立つ。

後向き推論では $\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th}$ のうち、原始論理式 C_i $(1 \leq i \leq t)$, D からなる次の形式の論理式を用いる。

$$(\forall X)((\mathrm{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{C}_t) \rightarrow \mathrm{D}) \quad (17)$$

ある置換 θ' が存在して証明すべき問題の結論が $\mathrm{D}\theta'$ である場合、$(\mathrm{C}_1\theta' \wedge \cdots \wedge \mathrm{C}_t\theta') \rightarrow \mathrm{D}\theta'$ は式 (17) の論理的帰結であるから、すべての i $(1 \leq i \leq t)$ に対して $\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp} \models \mathrm{C}_i\theta'$ ならば、$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp} \cup \{\mathrm{C}_1\theta', \ldots, \mathrm{C}_t\theta'\} \models \mathrm{D}\theta'$ である。したがって、$\mathrm{D}\theta'$ を証明したい場合にサブゴールとして $\mathrm{C}_1\theta', \ldots, \mathrm{C}_t\theta'$ を生成し、それぞれについて証明を行えば、$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup \mathrm{Hyp} \models \mathrm{D}\theta'$、すなわち式 (1) が成り立つことが言える。

本研究で実現した推論システムで実行される論理的推論では、Axioms(および Th) に含まれる論理式を式 (16)(17) の形のみに限定しているので、実際には Axioms の部分集合 (Axioms*) を用いて証明を行うことになる。しかし任意の論理式 α に対して次の関係が成り立つ。

$$(\mathrm{Axioms}^{\star} \models \alpha) \Rightarrow (\mathrm{Axioms} \models \alpha) \quad (18)$$

したがって、論理的推論も完全性は保証されないが健全性は保証される。

3.2.2 融合推論の完全性

2.1 および 3.2.1 より、Gröbner 基底法も論理的推論も完全性を保証されないので融合推論も完全性が保証されない。しかし融合推論には次のような特長がある。

仮定に順序概念を含む幾何学定理を直接 Gröbner 基底法で証明する場合は、2.2.2 で述べたように、順序概念の非順序概念への変換 (不等式制約の削除) に伴って、$\mathrm{Z_R}(H') \not\subseteq \mathrm{Z_R}(C)$ となり $\mathrm{Z_C}(H') \not\subseteq \mathrm{Z_C}(C)$ となることから証明できないことがある。しかし融合推論では、前向き推論によって仮定中の順序概念が非順序概念による表現にうまく変換されるならば、拡張された仮定 (Hyp∪New) から順序概念 (不等式)(Ord) を取り除いたもの ((Hyp∪New)−Ord) を仮定として Gröbner 基底法を行う場合に、$\mathrm{Z_R}((\mathrm{Hyp} \cup \mathrm{New}) - \mathrm{Ord}) \subseteq \mathrm{Z_R}(C)$ が成り立ち、証明が成功する場合がある。すなわち、2.2.2 の 1 で述べた不等式の削除によって生じる証明不可能な幾何問題の範囲を、融合推論で減少させることができる。

3.2.3 融合推論の健全性

融合推論によって証明される幾何問題を、eqang の有無と証明法によって分類すると次の 3 つに分けられる。

1. eqang を含まず Gröbner 基底法で証明される
2. eqang を含み論理的推論のみで証明される
3. eqang を含み論理的推論と Gröbner 基底法で証明される

1 のタイプで、順序概念を含まない問題に対しては、Gröbner 基底法が健全性を持つことから融合推論も健全性を保証される。eqang は含まないが between を含む場合、3.1で述べたように、システムは between を on と見なして代数式に変換し Gröbner 基底法を行う。しかし、システムで扱う幾何問題は仮定のみに between を含むので健全性は損なわれない。したがって 1 のタイプの問題に対して融合推論は健全性を保証される。

2 のタイプの問題については、論理的推論が健全性を保証されるので融合推論も健全性を保証される。3 のタイプの問題については仮定に eqang が含まれている場合と結論が eqang の場合を考えなければならない。

仮定に eqang が含まれている場合、前向き推論が行われ新しい事実 (New) が仮定に加えられる。そして拡張された仮定から順序概念 (不等式) を除いたもの ((Hyp∪New)−Ord) を仮定として Gröbner 基底法が試みられる。順序概念を含まない問題に対しては Gröbner 基底法は健全性が保証されるから、もし成功すれば次の関係が成り立つ。

$$\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Th} \cup ((\mathrm{Hyp} \cup \mathrm{New}) - \mathrm{Ord}) \models \mathrm{conc} \quad (19)$$

したがって $\mathrm{Axioms} \cup \mathrm{Hyp} \cup \mathrm{New} \models \mathrm{conc}$ となり、3.2.1 の前向き推論の性質より式 (1) が成り立つ。

表 4: 高次概念の定義

collinear(A,B,C)	⇔	(∃L)(on(A,L)∧on(B,L)∧on(C,L))
online(P,A,B)	⇔	noteq(A,B)∧collinear(P,A,B)
midpoint(P,A,B)	⇔	noteq(A,B)∧online(P,A,B)∧eqseg(A,P,P,B)
para(A,B,C,D)	⇔	¬(∃P)(online(P,A,B)∧online(P,C,D))
rangle(A,B,C)	⇔	noteq(A,B)∧noteq(B,C)∧ (∃P)(midpoint(B,A,P)∧eqseg(A,C,C,P))
perpen(A,B,C,D)	⇔	noteq(A,B)∧noteq(C,D)∧ ((¬noteq(A,C)∧rangle(B,A,D))∨ (noteq(A,C)∧online(A,C,D)∧rangle(B,A,C))∨ (noteq(A,C)∧¬online(A,C,D)∧online(C,A,B)∧ rangle(A,C,D))∨ (noteq(A,C)∧¬online(A,C,D)∧¬online(C,A,B)∧ (∃P)(online(P,A,B)∧online(P,C,D)∧rangle(A,P,C))))

結論が eqang の場合、後向き推論が行われサブゴールが生成される。サブゴールが eqang の場合、もし拡張された仮定に直接含まれていれば証明され、含まれていなければ再帰的に後向き推論が行われる。一方 eqang でないサブゴールは、健全性を保証された Gröbner 基底法によって証明が試みられる。すべてのサブゴールが論理的推論あるいは Gröbner 基底法によって証明されれば、3.2.1 の後向き推論の性質から式 (1) が成り立つ。

以上より、1,2,3 のすべての場合に対して融合推論は健全性を保証されている。すなわち、順序概念を含む問題では健全性が失われるという Gröbner 基底法の問題点は融合推論によって解決された。この点において本研究で提案した融合推論方式の有効性は明らかである。

4 融合幾何推論システム

ここでは 3 で提案した融合推論方式に基づいて開発した融合幾何推論システムについて述べる。このシステムは 3 で述べた融合推論方式を基本としているが、さらにいくつかの点で推論機能の強化を図っている。

4.1 幾何問題の記述言語

幾何問題は仮定と結論を論理式で表現しシステムに入力する。本システムでは仮定の記述が変数を含まない原始論理式の集合となり、結論の記述がただ 1 つの変数を含まない原始論理式となるような幾何問題のみを扱う。

ユーザが問題記述に用いる述語は次の 9 個である。

eqseg , eqang , collinear , online , midpoint ,
para ,rangle , perpen および line

表 2 の 4 つの基本述語のうち between は line で代用される (後述)。また、on は on(A,L) 単独あるいは on(A,L)∧on(B,L) という記述だけでは幾何問題を解くための点の配置に関する有効な制約とはならず、3 点以上の間に on(A,L)∧on(B,L)∧on(C,L)∧⋯ という関係がある場合は collinear を用いて表現することができる。このためシステムに対する問題記述用述語として on は省略した。

上記の 9 個の述語のうち、line は仮定の記述、collinear と online は結論の記述に対してのみ用いることができる述語である。また para は仮定と結論で用いる場合では幾何学的な解釈が異なる (後述)。

4.1.1 高次概念の定義

本システムでは表 2 の基本述語 eqseg,eqang に加え、文献 [10] で用いられた方法によって表 4 の 6 つの高次概念を定義し、問題記述用述語とした。ここで noteq(A,B) は点 A と B が異なる点であることを表し、その代数表現は、

noteq(A,B)　$x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B$

となる。すなわち noteq は非順序概念であり、非縮退条件を明示するために用いられる。したがってこれら 6 つの高次概念は非順序概念である on,eqseg,noteq のみで定義される非順序概念であり、表 4 の定義を代数式に変換して得られる代数表現 (表 5) は不等式を含まない。

para は幾何問題の結論 (サブゴール) に用いられる場合は、表 4,5 の定義通りの非順序概念として取り扱われるが、仮定の記述に用いられた para を用いて前向き推論を行う場合には、次のように定義される順序概念としての ord-para として解釈される。

ord-para(A,B,C,D) ⇔ para(A,B,C,D)∧
(∃P)(between(P,A,D) ∧ between(P,B,C))

すなわち平行関係を表す論理式 para(A,B,C,D) が仮定に含まれている場合、論理的推論ではそれを線分 AB と線分 CD の向きが同じであるという条件のもとでの平行関係 ord-para(A,B,C,D) と見なして推論を行う。これによって同位角や錯角が認識され、「平行ならば同位角 (あるいは錯角) が合同である」という幾何学定理を前向き推論で用いることが可能となる。換言すると、論理的推論では順序概念を用いた推論が容易に行えるので、para を ord-para と見なして推論することによって、より多くの新しい事実が導出できるようになる。

順序概念である ord-para は、代数的推論では向きを考慮しない非順序概念 para と見なされて表 5 の代数表現に変換されるが、これは順序概念を不等式を除いた代数表現で表すことに相当する。したがって仮定に eqang が含まれている場合について述べた 2.2.2 の 1 および 3.2.3 の議論が ord-para の場合にも成り立ち、仮定のみに ord-para が含まれている場合の融合推論の健全性は保たれる。

一方 eqang でない結論に対する後向き推論は行われないので、結論 (サブゴール) として記述された para(A,B,C,D) は直接 Gröbner 基底法で証明が行われる。この時 para(A,B,C,D) を ord-para(A,B,C,D) と見なすと、結論が順序概念となり融合推論全体の健全性が保証されなくなる。したがって結論における平行関係の記述は、表 4,5 で定義した非順序概念の para でなければならない。このように、平行関係を表す述語 para の幾何学的な解釈は、仮定に含まれている場合と結論に含まれている場合とで異なるものとなっている。ユーザはこのことを踏まえて問題記述を行う必要がある。

表 5: 高次概念の代数表現

collinear(A,B,C)	$(y_B - y_A)x_C + (x_A - x_B)y_C + (x_B y_A - x_A y_B) = 0$
online(P,A,B)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (y_A - y_P)x_B + (x_P - x_A)y_B + (x_A y_P - x_P y_A) = 0$
midpoint(P,A,B)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge 2x_P - x_A - x_B = 0 \wedge 2y_P - y_A - y_B = 0$
para(A,B,C,D)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (x_C \neq x_D \vee y_C \neq y_D) \wedge (y_B - y_A)x_C + (x_A - x_B)y_C + (x_B y_A - x_A y_B) \neq 0 \wedge$ $(x_B - x_A)(y_D - y_C) - (x_D - x_C)(y_B - y_A) = 0$
rangle(A,B,C)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (x_B \neq x_C \vee y_B \neq y_C) \wedge (x_A - x_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(y_C - y_B) = 0$
perpen(A,B,C,D)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (x_C \neq x_D \vee y_C \neq y_D) \wedge (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) = 0$

4.1.2 論理的推論を効率化するための図形記述

人間は幾何問題の証明を行う場合、与えられた仮定を満たす例を図形として描き、それを利用して証明の戦略を立てていると考えられる。証明に用いる幾何学公理・定理はある図形上で成立するので、その図形と証明しようとしている幾何問題を表す図形とのパターンマッチングによって、幾何学公理・定理の適用可能性を判定できる。

本システムでは図形を利用して論理的推論を効率化することを考え、図形を記述するための特殊な述語 line を定義した。line(L) の引数 L は、想定している図形において一直線上に並んでいる複数の点をリストにまとめたものである。例えば3点 a,b,c がこの順番に並んだ直線が図形中に存在している場合、line([a,b,c]) または line([c,b,a]) を問題記述の仮定に含める。すなわち line は順序概念であり、between の持つ制約条件は line によって表現される。

論理的推論では、線分あるいは角をなす 2 辺が実際に line で記述された直線上にある場合に限り、それらの線分や角に関する幾何学的関係を表す論理式の妥当性を証明する。すなわち本システムでは、すべての可能な点の組合せを考えそれらの間の幾何学的関係を推論するのではなく、想定されている図形中に描かれていない線分や角に関する幾何学的関係の成否は問題の証明には関与しないものと見なすことによって、妥当性の判定を行わねばならない論理式の数を減らし、推論の効率化を図っている。

代数的推論を行う場合、順序概念である line はまず between に展開され、それが 3.1 で述べたように非順序概念である collinear あるいは online に基づく代数表現に変換される。したがってユーザは非順序概念である collinear や online を仮定として与える必要はない。また line は仮定にしか現れないので、それを非順序概念である collinear や online に変換しても、3.2.3 の議論より融合推論の健全性は保証される。

4.2 論理的推論で用いる幾何学公理・定理

システム全体の推論能力は、論理的推論で用いられる幾何学公理・定理としてどのようなものを用意するかに大きく左右される。本システムでは幾何学公理・定理として次のようなものを用いた。() 内は前者が前向き推論、後者が後向き推論で用いられる幾何学公理・定理の数である。

1. 幾何学公理を表すもの (5,2)
   Hilbert の 15 の公理のうち、平面に関する公理やアルキメデスの公理などはシステムに与えていない。
2. 高次概念の定義に基づくもの (16,4)
   1 つの高次概念を定義する場合、高次概念からそれを定義する要素概念を導出する規則と、いくつかの要素概念から高次概念を構成する規則が得られる。
3. 幾何学の基本定理を表すもの (30,20)
   三角形の合同定理、平行線における同位角・錯角の合同定理、二等辺三角形の底角合同定理、対頂角合同定理、隣接する角の和・差の合同に関する定理などの角の合同に関する定理、線分の合同の反射性の定理など。
4. 同値関係に基づく推論規則
   線分、角の合同および平行関係はそれぞれ同値関係となる。システムはこれらの関係による同値類を求め、同値関係に基づいた推論を行う。特に、角の合同を証明するための後向き推論では、角の合同関係による同値類を用いた 2 段階の推論でサブゴールを生成する。すなわち、角の合同 $\theta_1 = \theta_2$ を結論 (サブゴール) として証明する場合、まず拡張された仮定から構成された同値類$\Theta_1 = \{\theta_{11}, \ldots, \theta_{1m}\} \ni \theta_1$、$\Theta_2 = \{\theta_{21}, \ldots, \theta_{2n}\} \ni \theta_2$ に基づき、$\theta_1 = \theta_2$ のサブゴール (1 段目) として $\theta_{1i} = \theta_{2j}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ (すでに他のサブゴールとして存在するものは除く) を生成し、それらに対して幾何学公理・定理を適用して $\theta_{1i} = \theta_{2j}$ に対するサブゴール (2 段目) を生成する。2 段目のサブゴールの証明によってある $\theta_{1i} = \theta_{2j}$ が証明されれば、Θ_1 と Θ_2 が 1 つの同値類となり $\theta_1 = \theta_2$ が証明される。

前向き推論では、与えられた仮定に適用できるすべての幾何学公理・定理を用いて推論を行い、仮定の拡張を可能な限り行う。一方、後向き推論では、横形探索によって AND-OR 木の生成、探索、推論を行う。

4.3 代数表現への変換

Gröbner 基底法を行うための代数表現への変換では、8個の非順序概念 (noteq,eqseg,collinear,online,midpoint, para,rangle,perpen) に関しては、表 2 および表 5 に基づいて非縮退条件を適切に付加した妥当な代数表現を生成する。順序概念である eqang および between(line) は表 3 に基づき不等式を除いた代数表現に変換する。

また座標軸をうまく設定し、代数表現中の変数を減らすことが Gröbner 基底の計算の効率化のために重要である。本システムでは問題に存在する点の中で最も多くの直線が交わる点を原点とし、原点を通る直線の中で最も多くの点を含むものを x 軸とすることで変数の数を減らしている。

5 実行例

ここでは 4 で述べた融合幾何推論システムの有効性を具体例を用いて示す。実験システムは SICStus Prolog 2.1 と REDUCE 3.3 を用いてインプリメントした。

5.1 凡例

システムによる推論過程を説明するために、以下のような表記法 (4 までの論理的記述とは異なる) を用いる。

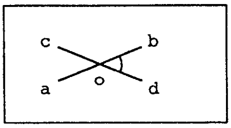

図 7: 直線と角の内部表現

- 直線・線分と角の内部表現
  図 7 の場合、システム内部では 3 点 a,o,b を通る直線をリスト [a,o,b] で表し、線分 ab を seg(a,b)、角 bod を ang(o,[a,o,b],[c,o,d]) で表す。
- 同値類
  同じ大きさの線分、角、平行関係にある直線は同値類としてリストでまとめ、同値類リストからなるリストで保持する (ただし、ただ 1 つの要素からなる同値類は省略している)。eqang の同値類のうち直角の同値類は、特に RANGLE という別のリストにも保持する。それ以外の仮定 (述語 midpoint,perpen を用いた関係記述) は OTHERS というリストに保持する。

5.2 例題3

例題 3 三角形 abc の辺 bc 上に点 d をとり ab=bd=dc とし、辺 ab 上に点 m をとり、線分 dm が辺 ca と平行になるようにする。また、線分 bd 上に be=ed となる点 e をとり、線分 ae と線分 dm の交点を n とする。この時 ∠cad= ∠dae を証明せよ [11] (図 8)。

システムへ入力する問題記述は図 8 のようになる。この問題は結論が eqang であるため、まず論理的推論が試みられる。初めに前向き推論が行われ、9 個の幾何学公理・定理の適用の結果新しく角の合同や中点に関する 9 個の事実が導出され、図 9 のような同値類記述 (拡張された仮定) が生成された。

しかしこの中に結論は含まれておらず、結論が eqang なので後向き推論が行われる。まず 4.2 で述べた角の同値類記述による推論によって 1 段目のサブゴールが 2 個生成され、それらに対して 66 個の幾何学公理・定理が適用された結果 (OR ノード)、2 段目の (サブ) サブゴール (AND ノード) が合計 171 個生成された。

次に 1 段目の最初のサブゴール eqang(ang(a,[a,d],[a,n,e]),ang(d,[d,a],[d,n,m])) の証明が試みられる。このサブゴールの下の最初の OR ノードにつながる (サブ) サブゴールは para([a,n,e],[m,n,d]) のみとなっているが、拡張された仮定には含まれていない。そこで Gröbner 基底法による証明が試みられたが、計算が終了しないため強制的に推論が中断され、この (サブ) サブゴールの証明は保留とされた。

次に、サブゴール eqang(ang(a,[a,d],[a,n,e]),ang(d,[d,a],[d,n,m])) の次の OR ノードの下の (サブ) サブゴールである eqseg(seg(a,n),seg(d,n)) の証明が試みられる。これも拡張された仮定に含まれていないため、Gröbner 基底法による証明が行われた。37 個の多項式に対して Gröbner 基底を計算した結果、1 を含むことが示され、この (サブ) サブゴールの証明は成功した。この結果 1 段目の eqang によるサブゴールが証明され、結論

```
仮定:  line([b,e,d,c]).   line([a,d]).
       line([b,m,a]).     eqseg(a,b,b,d).
       line([a,n,e]).     eqseg(b,d,d,c).
       line([a,c]).       eqseg(b,e,e,d).
       line([m,n,d]).     para(a,c,m,d).
結論:  eqang(c,a,d,d,a,e).
```

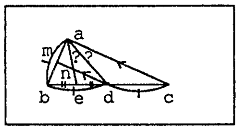

図 8: 例題 3 (Nevins [11] の問題 4)

```
EQSEG =[[seg(a,b),seg(b,d),seg(c,d)]
        [seg(b,e),seg(d,e)]]
EQANG =[[ang(a,[a,c],[a,d]),    ang(d,[d,a],[d,n,m])    ]
        [ang(a,[a,c],[a,m,b]),  ang(m,[a,m,b],[m,n,d])  ]
        [ang(a,[a,c],[a,n,e]),  ang(n,[a,n,e],[m,n,d]),
         ang(n,[d,n,m],[e,n,a])                         ]
        [ang(a,[a,d],[a,m,b]),  ang(d,[c,d,e,b],[d,a])  ]
        [ang(c,[c,a],[c,d,e,b]),ang(d,[c,d,e,b],[d,n,m])]
        [ang(n,[a,n,e],[d,n,m]),ang(n,[e,n,a],[m,n,d]) ]]
PARA  =[[[a,c],[m,n,d]]
        [[c,a],[d,n,m]]]
RANGLE=[]
OTHERS=[midpoint(d,b,c),midpoint(e,b,d)]
```

図 9: 例題 3 (同値類)

eqang(c,a,d,d,a,e) が仮定の論理的帰結であることが証明された。

5.3 例題1、2

以下では 2 において Gröbner 基底法では直接証明することができない幾何問題の例として挙げた例題 1 と 2 を、融合推論システムで証明した結果を示す。

例題 1 四角形 abcd の 2 つの対角線 ac と bd の交点を e とし、ae=be、∠ead= ∠ebc とする。この時 ab||dc を証明せよ (図 1)。

仮定に eqang を含むのでまず論理的推論が試みられる。前向き推論では 8 個の幾何学定理・公理が適用され、10 個の新しい事実が導出された (図 10) が結論は証明されなかった。そこで結論が eqang ではないので、拡張された仮定と結論の para に対して Gröbner 基底法による証明が試みられた。25 個の多項式対して Gröbner 基底を計算した結果、1 を含むことが示され、結論 para(a,b,d,c) が仮定の論理的帰結であることが証明された。

```
EQSEG =[[seg(a,c),seg(b,d)]  [seg(a,d),seg(b,c)]
        [seg(a,e),seg(b,e)]  [seg(c,e),seg(d,e)]]
EQANG =[[ang(a,[a,b],[a,d]),    ang(b,[b,a],[b,c])    ]
        [ang(a,[a,b],[a,e,c]),  ang(b,[b,a],[b,e,d])  ]
        [ang(a,[a,d],[a,e,c]),  ang(b,[b,c],[b,e,d])  ]
        [ang(c,[c,b],[c,d]),    ang(d,[d,a],[d,c])    ]
        [ang(c,[c,b],[c,e,a]),  ang(d,[d,a],[d,e,b])  ]
        [ang(c,[c,d],[c,e,a]),  ang(d,[d,c],[d,e,b])  ]
        [ang(e,[a,e,c],[b,e,d]),ang(e,[c,e,a],[d,e,b])]
        [ang(e,[a,e,c],[d,e,b]),ang(e,[b,e,d],[c,e,a])]]
PARA  =[]
RANGLE=[]
OTHERS=[]
```

図 10: 例題 1 (同値類)

```
EQSEG =[[seg(a,d),seg(c,d),seg(d,e)]]
EQANG =[[ang(a,[a,d,c],[a,e]),  ang(e,[e,a],[e,f,d])  ]
        [ang(b,[b,c],[b,f,a]),  ang(f,[a,f,b],[d,f,e]),
         ang(f,[a,f,b],[e,f,d]),ang(f,[b,f,a],[d,f,e]),
         ang(f,[b,f,a],[e,f,d])                       ]
        [ang(c,[c,b],[c,d,a]),  ang(d,[c,d,a],[d,f,e])]
        [ang(c,[c,d,a],[c,e]),  ang(e,[e,c],[e,f,d])  ]]
PARA  =[]
RANGLE=[ang(b,[b,c],[b,f,a]),  ang(f,[a,f,b],[d,f,e]),
        ang(f,[a,f,b],[e,f,d]),ang(f,[b,f,a],[d,f,e]),
        ang(f,[b,f,a],[e,f,d])                       ]
OTHERS=[perpen([a,b,f],[b,c]),perpen([a,b,f],[d,e,f]),
        midpoint(d,a,c)                              ]
```

図 11: 例題 2 (同値類)

例題 2 角 b が直角である直角三角形 abc の斜辺 ac の中点を d とし、d から辺 ab に垂線 df を下ろす。線分 df の f 方向の延長線上に ad=de となる点 e をとり、e と点 a,c をそれぞれ線分で結ぶ。この時 ∠ace= ∠ecb を証明せよ [15] (図 4)。

結論が eqang であるのでまず論理的推論が試みられる。前向き推論では 12 個の幾何学公理・定理が適用され、12 個の新しい事実が導出された (図 11) が、結論は証明されなかった。そこで後向き推論が行われ、まず同値類記述による推論によって 1 段目のサブゴールが 2 個生成され、それらに 4 個の幾何学公理・定理を適用した結果、2 段目の (サブ) サブゴールが合計 6 個生成された。

1 段目の最初のサブゴール eqang(ang(c,[c,b],[c,e]),ang(e,[e,c],[e,f,d])) の下の最初の OR ノードにつながる (サブ) サブゴールは para([b,c],[e,f,d]) のみであるが、拡張された仮定には含まれていない。そこで Gröbner 基底法によって証明が行われ、37 個の多項式に対して Gröbner 基底を計算した結果、1 を含むことが示された。この証明結果と AND-OR 木の構造より結論 eqang(a,c,e,e,c,b) が仮定の論理的帰結であることが証明された。

6 結論

本研究では Gröbner 基底法による幾何推論が幾何学に本質的な順序概念を扱えないという問題点を明らかにし、論理的推論を用いて順序概念を非順序概念に変換し、順序概念を含まない部分問題の証明に Gröbner 基底法を利用するといった融合推論による解決を図った。本論文では、角の合同に注目し論理的推論と Gröbner 基底法を融合した推論方式を提案し、その健全性を証明するとともに、具体例によって有効性を確認した。

最後に今後の検討課題についてまとめる。

1. 提案した融合推論方式では、問題記述に eqang が含まれているかどうかに注目して推論方式を切替えている。今後はもう 1 つの順序概念である between への対応と、非順序概念の para と順序概念の ord-para の統一的な扱いが可能な問題記述、推論方式を明らかにしなければならない。

2. 現在の eqang に関する問題変換だけでは角度に関する十分な推論機能が実現されていない。例えば、現在のシステムでは「三角形の外角は他の 2 つの内角の和に等しい」といった、角の和や差の演算に基づく幾何学定理を用いなければならない幾何問題は証明できない。

3. 幾何問題には高次図形の性質を利用するものや面積を扱うものがあるが、それらを扱うには高次図形に関する推論が必要となる。現在の問題記述法では line を用いて直線の存在を表すだけであり、高次図形の持つ幾何学的構造を正しく表現できる表現力の高い記述法を開発しなければならない。

本研究は文部省科学研究費 (一般研究 (B)03452171) の補助を受けて行った。

参考文献

[1] Arnon,D.S.:Geometric Reasoning with Logic and Algebra, *Artificial intelligence*, Vol.37, pp.37–60 (1988).

[2] Buchberger,B. : Applications of Groebner Bases in Non-Linear Computational Geometry, In:*Trends in computer algebra* (Janßen,R.ed.), pp. 52–80 (1987).

[3] Chou,S.C. and Schelter,W.F. : Proving Geometry Theorems with Rewrite Rules, *Journal of Automated Reasoning*, Vol.2, No.4, pp.253–273 (1986).

[4] Hoffmann,C.M. : *Geometric and Solid Modeling : An Introduction*, San Mateo : Morgan Kaufmann (1989).

[5] Kapur,D. and Mundy,J.L.(ed.) : *Geometric Reasoning*, MIT press (1989).

[6] Kapur,D. : Using Gröbner Bases to Reason about Geometry Problems, *Journal of symbolic computation*, Vol.2, No.4, pp.399–408 (1986).

[7] Kapur,D. : A Refutational Approach to Geometry Theorem Proving, *Artificial intelligence*, Vol.37, pp.61–93 (1988).

[8] Kapur,D. and Mundy,J.L. : Wu's Method and Its Application to Perspective Viewing, *Artificial intelligence*, Vol.37, pp.15–36 (1988).

[9] Kutzler,B. and Stifter,S.: On the Application of Buchberger's Algorithm to Automated Geometry Theorem Proving, *Journal of Symbolic Computation*, Vol.2, No.4, pp.389–397 (1986).

[10] Kutzler,B. : Algebraic Approaches to Automated Geometry Theorem Proving, PhD thesis. Univ. Linz, Austria (1988).

[11] Nevins,A.J. : Plane Geometry Theorem Proving Using Forward Chaining, *Artificial intelligence*, Vol.6, pp.1–23 (1975).

[12] Wu,W.T. : On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem-Proving in Elementary Geometry, *Scientia Sinica*, Vol.21, No.2, pp.159–172 (1978).

[13] 伊庭斉志, 井上博允 : 代数学的手法に基づく幾何学的概念の推論—第 1 報 : Wu の手法を用いた幾何学的推論—, 人工知能学会誌, Vol.5, No.3, pp.300–310 (1990).

[14] 伊庭斉志, 井上博允 : 代数学的手法に基づく幾何学的概念の推論—第 2 報 : 軌跡問題の解法—, 人工知能学会誌, Vol.5, No.3, pp.311–323 (1990).

[15] 笹部貞市郎 : 問題解法 幾何学辞典, 聖文社 (1976).

[16] Hilbert,D. : Grundlagen der Geometrie, 邦訳:寺坂英孝, 大西正男 (訳) : 現代数学の系譜 7 , 共立出版 (1970).