人　工　知　能 103－9
（1996．1．17）

構造の観察に基づく発見手法

村田 剛志　　　志村 正道

東京工業大学 大学院情報理工学研究科 計算工学専攻
{murata, shimura}@cs.titech.ac.jp

概要

対象における規則性を発見するにあたり、観察されたデータを対象の構造に応じて組み合わせることで得られる量から、有用で適用範囲の広い規則性が発見されることがしばしばある。平面幾何の領域においては、三角形が図形における最も基本的な構造であると考えられる。本研究では図形中の三角形の面積を基に有用な定理を発見する手法を提案する。この手法に基づき、幾何構造に基づく発見システム DIGEST を構築し実験を行なったところ、多くの線分からなる複雑な図形からも、有用で一般性のある定理を数多く発見することに成功している。

A Method of Discovery Based on Observed Structure

Tsuyoshi MURATA and Masamichi SHIMURA

Department of Computer Science,
Graduate School of Information Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 O-okayama, Meguro, Tokyo 152, Japan

Abstract

Useful and widely applicable regularities can be often discovered from the quantities which are generated by combining data according to the structure of observed object. In the domain of plane geometry, triangles are regarded as the most fundamental structure in a figure. This paper proposes a method of discovering useful theorems based on the area of triangles in a figure. We have implemented DIGEST, a discovery system based on geometric structure, and made experiments with it. DIGEST succeeds in discovering many useful and generalized theorems even from complicated figures which contain many lines.

1 はじめに

人類の歴史において、科学者は対象を観察して得られるデータについての規則性だけでなく、そのデータを組み合わせて得られる量についての規則性をも発見してきた。そのような量についての規則性は、しばしば元のデータの規則性よりも有用である場合が多い。物理学を例に考えると、衝突する物体における速度の関係式は、物体の個数や運動方向などによって異なってくるのに対し、物体の質量と速度の積である運動量という物理量を導入することで得られる運動量保存則は、様々な状況に対して適用できる法則である。データを組み合わせて得られる高次の量に注目して対象を観察することで、要素数の多い複雑な対象からも有用な規則性の発見が容易となると考えられる。また発見によって得られた知識が、類似の状況に対しても適用できるものとなることが期待できる。

発見システムの研究においても、対象における高次の量に注目したものや、対象の構造に注目したものがいくつかある。Zytkow が構築した発見システム GALILEO[5] においては、BACON などのシステムによって発見された物理法則の式を、物質の変化の過程を記述したプロセスモデルを基に変形することで、運動量や熱量など、状況を記述する単位となる物理量を見い出している。このような物理量は、類似した状況におけるデータの関係を表す式を構築するための基礎となっている。Holder, Cook, Djoko が構築したシステム SUBDUE[2] は、化学式や電子回路において繰り返し出現する興味深い副構造を最小記述長原理を用いて発見している。構成要素となる副構造を明確にして対象を記述することによって、一般性のある法則の発見が容易になると考えられる。

我々が対象としている平面幾何の領域においても、対象となる図形を線分の集まりと捉えるだけでなく、三角形や四角形などの構造を持つ多角形の集まりと捉えて観察することで、有用な定理が得られることがしばしばある。多角形における面積や、多角形間の隣接や包含などの関係についてのデータが、有用な定理を発見するために役立つと考えられる。

本研究では多角形の中で最も基本的な三角形に注目し、図形に含まれている三角形についてのデータを基に有用な定理を発見する手法を提案する。その手法に基づき、幾何構造に基づく発見システム DIGEST (*A <u>Di</u>scovery System based on <u>Ge</u>ometric <u>St</u>ructure*) を構築し実験を行なったところ、多くの辺や角を含む複雑な図形からも数多くの有用な定理を見い出すことに成功している。

2 面積に注目した図形の観察

平面幾何において、図形の面積を利用して定理を導出するやり方はしばしば見受けられる。Chou, Gao, Zhang [1] は、三角形の面積の関係から得られる式を基に幾何の定理を証明する手法を提案し、計算機上に定理証明システムを構築している。この手法は任意の点や線分を基に、既にある線分上の点や線分の交点を端点とする新たな線分の付加を繰り返すことで生成された図形において、線分の関係を表す定理を証明するためのものである。図形において点が導入された順序と逆の順序で、証明すべき定理の式から点に関する項を消去していくことで、最終的に式に含まれる項が図形の生成の基になった任意の点や線分に関するものとなるまで繰り返すという単純な手法により、このシステムは多くの定理を証明している。一般に図形における定理を証明する際、図形中に最初から相似や合同の三角形がある場合は少なく、証明に役立つような相似や合同の三角形を作るための補助線を引くことは困難な問題である。このことから、面積に基づいて定理を導出する手法は、三角形の相似や合同などの幾何的関係を基にした手法よりも容易である場合が多いと考えられる。

幾何における定理証明の手法は、証明すべき式の形があらかじめわかっていることを前提としており、式の形がわからない状態から有用な定理を発見するための手法とは大きく異なっている。しかしながら、三角形を数多く含んでいる図形はしばしば見受けられ、そのような図形において面積に注目した証明手法が有効であることから、発見システムにおいても、三角形の面積に注目して図形を観察することは定理の発見のために有効であろうと考えられる。

3　幾何構造に基づく発見システム DIGEST

3.1　図形の観察

平面幾何の図形において、複数の三角形をその一部として含むものは数多く存在する。そのような三角形において、一辺を共有していたり、一方が他方を包含しているような二つの三角形の面積比は、図形中の線分の長さの比によって表せる場合が多い。図 1に示す図形において、三角形 ABCの面積 S_{ABC}は、一辺を共有する三角形である三角形 ABD、三角形 BCEなどとの面積比から、以下の式で表すことができる。

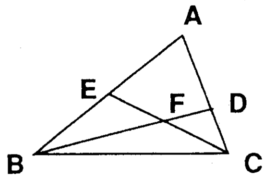

図 1: 三角形を含んでいる図形

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} &= (AC/AD) * S_{ABD} \\
S_{ABC} &= (AB/EB) * S_{BCE}
\end{aligned}
$$

また、S_{ABC}は、三角形 ABC の中に含まれる三角形 ABDと三角形 BCDの面積の和によって、以下の式で表すこともできる。

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

一般に平面図形において、一辺を共有する二つの三角形の組としては、図 2に示すような場合が考えられる。いずれの場合においても二線分の長さの比によって、二つの三角形の面積比を表すことができる。例えば、図 2の左上の図形における二つの三角形の面積 $S1$ と $S2$ の比は、底辺の長さの比によって表される。このように図形中の三角形の面積に注目することで、相似な三角形や合同な三角形を含まないような図形からも辺に関する多くの式が得られる。

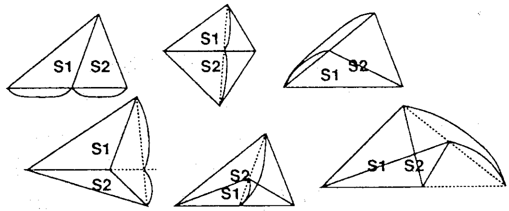

図 2: 一辺を共有する二つの三角形

3.2　定理の導出

図形中の三角形の面積を他の三角形の面積によって表す式を組み合わせることで、三角形の面積についての多くの式が得られる。例えば、先の図 1における三角形 ABCの面積についての式に、三角形 BCEの面積についての式を代入することで、以下の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} &= (AB/EB) \cdot S_{BCE} \\
&= (AB/EB) \cdot (EC/FC) \cdot S_{BFE}
\end{aligned}
$$

このような式変形を繰り返し、両辺に現れる面積が全て同一の三角形のものであるような式となったならば、その三角形の面積で式の両辺を割ることによって辺に関する式が得られる。このようにして得られた式は、図形において近接する線分についての有用な定理であると考えられる。

図形中に含まれる三角形の個数を n 個とし、各々の三角形の面積を $S_1, S_2, ..., S_n$で表すとき、三角形の面積 S_i、S_jについての二式

$$
\begin{aligned}
S_i &= k_1S_1 + k_2S_2 + ... + k_nS_n \quad (k_j \neq 0) \\
S_j &= l_1S_1 + l_2S_2 + ... + l_nS_n
\end{aligned}
$$

から S_jを消去して S_iについての式を導出する式変形は、それぞれの式の右辺の係数の組である $(k_1, k_2, ..., k_n)$ と $(l_1, l_2, ..., l_n)$ から、以下のような係数の組を生成することに対応する。

$$
\begin{gathered}
((k_1 + k_jl_1), ..., (k_{j-1} + k_jl_{j-1}), k_jl_j, \\
(k_{j+1} + k_jl_{j+1}), ..., (k_n + k_jl_n))
\end{gathered}
$$

このようにして得られた係数の組を基に、更に新しい係数の組を生成することを繰り返し、$\alpha_i \neq 0$ かつ $\forall j \neq i,\ \alpha_j = 0$ であるような係数の組 $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ が得られたときに、S_iについての係数の式$\alpha_i = 1$ を定理とみなしている。

3.3 図形の生成

発見によって得られる式の形はあらかじめ分かっていないため、定理の発見に役立つ図形を得るには、多くの図形を生成して試行錯誤の末に有用な性質をもつものを見つけ出す必要がある。発見の基になる図形を生成する手法として、任意の三角形に対し以下に示すような線分を付加する手法を採用する。

- 図形中の線分の上に一点を取り、既にある線分の端点と結ぶ
- 図形中の線分の端点の中で、線分によって結ばれていない二点を選んで結ぶ
- 図形中の線分の一方を延長し、他の線分と共有点を持つようにする

このようにして生成される図形においては、辺の長さや角の大きさに関する制約がないため、これらの図形を観察して発見を行なうことで、適用範囲の広い一般性のある定理が得られると考えられる。線分の付加によって生成される図形の一部を図 3に示す。

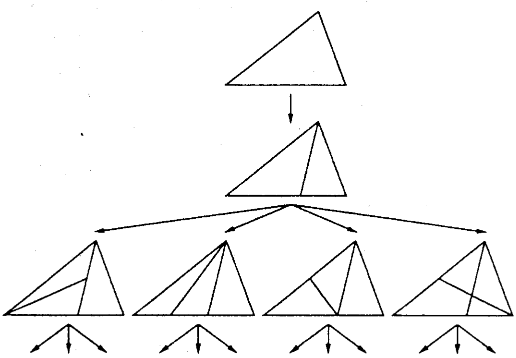

図 3: 線分の付加による図形の生成

4 実験結果

前節で述べた手法に基づき、幾何構造に基づく発見システム DIGEST を構築して実験を行なった。DIGEST に対する入力は図形の生成の基になる任意の三角形だけである。DIGEST は三角形に線分を付加することで発見の基になる図形を自ら生成し、その図形を観察することで得られる面積についての式から多くの有用な定理の発見を行なっている。DIGEST は前節の図 1に示す図形を観察することで、以下の式を発見している。

$$\frac{BA \cdot CE \cdot BF \cdot CD}{AC \cdot EB \cdot FC \cdot DB} = 1$$

また、図 4に示す図形からは、

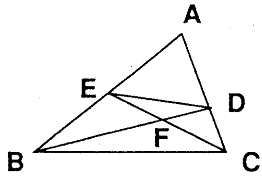

図 4: 発見の基になる図形 (1)

$$\frac{BE \cdot AC \cdot DF}{EA \cdot CD \cdot FB} = 1$$

のようなメネラウスの定理だけでなく、以下のような式を発見している。

$$\begin{aligned}\frac{CE \cdot FB \cdot DA}{EF \cdot BD \cdot AC} &= 1\\ \frac{AE \cdot BD \cdot FE \cdot CD}{EB \cdot DF \cdot EC \cdot DA} &= 1\\ \frac{AE \cdot FC \cdot AD \cdot FB}{EF \cdot CA \cdot DF \cdot BA} &= 1\end{aligned}$$

これらの式に現れる辺は閉じた図形を構成しており、図形においてまとまりをもつ辺についての式となっている。

DIGEST は、数多くの三角形を含む複雑な図形からも有用な定理の発見に成功している。図 5に示す図形からは、線分 ADに関して対称的な以下のような美しい式を発見している。

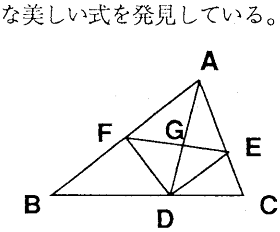

図 5: 発見の基になる図形 (2)

$$\frac{AF \cdot GE \cdot AC \cdot DB}{FG \cdot EA \cdot CD \cdot BA} = 1$$

また、図 6に示す図形からは、

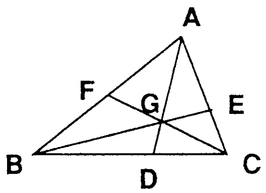

図 6: 発見の基になる図形 (3)

$$\frac{AF\cdot BD\cdot CE}{FB\cdot DC\cdot EA}=1$$

のようなチェバの定理はもちろん、以下のような興味深い式を発見している。

$$\begin{aligned}\frac{GD}{AD}+\frac{GE}{BE}+\frac{GF}{CF} &= 1\\ 1+\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC} &= \frac{AD}{GD}\\ \frac{GF\cdot CD\cdot BE}{FC\cdot DB\cdot EG} &= 1\end{aligned}$$

一番目の式は三角形の各頂点から内部にある点 G を通る三線分についての性質を示した定理である。二番目の式は、頂点 A を端点とする三角形の二辺と、A から対辺への線分 ADについての関係を示しており、$AF=FB$、$AE=EC$とすることで三角形の重心に関する式 $AD=3GD$が得られるなど、適用範囲が広い定理であると考えられる。三番目の式も簡潔で対称性をもつ美しい定理である。

DIGEST は三角形に注目して図形を観察することで得られた式を基に、単純な手法であるにも関わらず複雑な図形からも多くの有用な定理を発見している。このことは、三角形の面積に注目した発見手法の有効性を示していると言える。

5 考察

筆者らは平面幾何の領域における発見システムとして、DST[3]、PLANET[7]、EXPEDITION[6] を構築し実験を行なってきた。これらの各システムと本研究で構築した DIGEST において、図形から観察するデータ、有用とみなす式、組合せ爆発を回避する方法、発見した定理の例の各項目について比較したものを表 1に示す。

一般に図形について記述する際、線分の集まりとみなしたり三角形の組合せとみなしたりというように、一つの図形についての記述は数多く存在する。しかし、Wang, Lee, Zeevat [4] が述べているように、図形についての記述で、それ以上詳しい情報を付け加えることができないという意味での完全な記述は存在しないと考えられる。

人間は図形に含まれる様々な種類のデータの一部に注目して観察し、得られたデータを基に有用な式を導出している。表 1に示した発見システムの違いは、各システムが図形から観察するデータの種類の違いに起因すると考えられる。DST は図形における線分を補助線とそれ以外のものとに区別することで、補助線を付加する前の図形についての定理の発見を行なっている。PLANET は近接している辺や閉じた図形を構成する辺を図形から観察し、そのような辺についての式を有用とみなしている。EXPEDITION は線分の長さや角の大きさの具体的な数値を図形から観察することで定理の発見を行なっている。

本研究で構築した発見システム DIGEST は、最も基本的な多角形である三角形に注目し、図形から得られる三角形の面積の関係を基に有用な定理を発見している。DIGEST は三角形の相似や合同などの幾何的関係や、辺の長さなどの数値データを用いずに発見を行なっているため、発見される定理は辺の長さや角の大きさが元の図形と一部異なるような類似の図形に対しても適用できるものになっている。また、図形を線分や角の集まりとして捉えるのでなく、三角形という構造をもつ要素の集まりとして捉えることで、多くの線分から構成される複雑な図形からでも、組合せの爆発を抑えて有用な定理の発見を行なっている。

6 終わりに

本研究では三角形の面積についての式を図形から観察し、それを基に有用な定理を発見する手法を提案した。更にその手法の有効性を示すために、発見システム DIGEST を構築し実験を行なった。DIGEST は図形を自ら生成し、メネラウスの定理、チェバの定理などの良く知られた定理だけでなく、図形中の辺の関係を表す多くの有用な定理の発見に成功している。図形における基本的

	DST	PLANET	EXPEDITION	DIGEST
図形から観察するデータ	相似・合同などの幾何的関係	相似・合同などの幾何的関係、図形中の辺のまとまり	辺の長さや角の大きさなどの数値データ	三角形の面積と辺の長さの関係
有用とみなす式	補助線で生じた辺や角である副生成物を含まない式	近接する辺や閉じた図形を構成する辺についての式	長さや大きさが等しい辺や角についての式	同一の三角形の面積についての式
組合せ爆発を回避する方法	副生成物を消去する式変形	同じ幾何的関係を複数回用いない	最後に付加した線分で生じた辺や角に注目	同じ三角形間の関係を複数回用いない
発見した定理の例	三平方の定理、余弦定理、$sin^2 + cos^2 = 1$	三角関数の加法定理、メネラウスの定理、チェバの定理	方ベキの定理、ターレスの定理	メネラウスの定理、チェバの定理、辺の比についての式

表 1: 平面幾何における発見システムの比較

な構造である三角形に注目することで、多くの線分を含む複雑な図形からも一般性のある定理を数多く発見することができた。

参考文献

[1] S-C. Chou, X-S. Gao, and J-Z Zhang. *Machine Proofs in Geometry*. World Scientific, 1994.

[2] L. B. Holder, D. J. Cook, and S. Djoko. Substructure Discovery in the SUBDUE System. In *Proceedings of the AAAI Workshop on Knowledge Discovery in Databases*, pp. 169 – 180. AAAI, 1994.

[3] T. Murata, M. Mizutani, and M. Shimura. A Discovery System for Trigonometric Functions. In *Proceedings, Twelfth National Conference on Artificial Intelligence*, pp. 645 – 650. The AAAI Press, 1994.

[4] D. Wang, J. Lee, and H. Zeevat. Reasoning with diagrammatic representation. In J. Glasgow, N. H. Narayanan, and B. Chandrasekaran, editors, *Diagrammatic Reasoning*, chapter 11, pp. 339 – 401. AAAI Press, 1995.

[5] J. M. Zytkow. Deriving laws through analysis of processes and equations. In J. Shrager and P. Langley, editors, *Computational Models of Scientific Discovery and Theory Formation*, chapter 5, pp. 129 – 156. Morgan Kaufmann, 1990.

[6] 村田剛志, 志村正道. 発見システムにおける実験の計画. 情報処理学会研究報告 95-AI-101, pp. 13 – 18, 1995.

[7] 村田剛志, 志村正道. 平面幾何定理の発見システム. 情報処理学会研究報告 95-AI-100, pp. 37 – 44, 1995.