知 能 と 複 雑 系　110－17
（1998.　1.　23）

WTPゲーム

不完全市場の理解へ向けて

七條達弘　　蔵琢也
（京都大学人間・環境学研究科）　（京都大学理学部）
shichijo@borg.jinkan.kyoto-u.ac.jp　kura@ci.zool.kyoto-u.ac.jp

あらまし

二人のプレイヤーが分割不可能な資源をめぐって争っているとする。そして、各プレイヤーが資源を得るためにかけるコストの上限を決め、その上限が大きい方が資源を得るゲームを考える。このゲームは、勝敗が決したときに実際にかかるコストのあり方に従って、(1)サンクコストゲーム、(2)入札ゲーム、(3)持久戦ゲーム、(4)オークションゲームの４種類に分類される。各ゲームについて、コンピュータシミュレーションを用いて均衡状態や最終状態を調べ、闘争回避の制度として、どのゲームを用いるべきかを論じた。

キーワード　進化ゲーム理論　連続ゲーム　ESS　シミュレーション　オークション

WTP game

Toward understanding imperfect markets.

Tatsuhiro Shichijo　Takuya Kura

Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University
Department of Zoology, Faculty of Science Kyoto University

shichijo@borg.jinkan.kyoto-u.ac.jp
kura@ci.zool.kyoto-u.ac.jp

Abstract

We considered the games in which two players contest for an indivisible resource, and assumed that, in the games, the player whose willingness to pay for the resource is higher than the other's win the game. These games are classified by the costs that the players actually pay into the following four games: (1) Sunk Cost game, (2) Tender game, (3) War of attrition game (4) Auction game. We studied equilibria and discussed that what game we should employ as an institution in order to avoid struggles.

key words　evolutionary game theory, continuous game, ESS, simulation, auction

1．はじめに

二人のプレイヤーが分割不可能な資源を争うゲーム状況を考える。このようなゲームは、経済学、社会学、生物学など様々な分野で研究されてきた。本研究の特徴は以下の４つである。

①各個人間には能力差がなく、資源をえるためにかけるコストの上限が勝敗を決するとする。

②従来別個独立に研究されてきた４つのゲームをひとまとまりに考え、比較する。

③一つの資源でも、その価値は人によって違うとする。

④その資源価値の分布が、独立同分布でない場合も扱う。

次節で説明する WTP ゲームは、相手に被害を与えるような闘争を回避して、決まったフォーマットに従って問題解決するための制度とみなすことができるが、WTP ゲームが含む 4 つのゲームのうち、どれが、プレイヤーにとって、利得が高いかを議論する。

なお、やや、ゲーム設定が複雑であるため、2.3 節において数値例をあげて説明している。

2．モデル

2．1　WTP ゲーム

二人のプレイヤーが分割不可能な資源を争っているゲームを考える。つまり、二人のプレイヤーが争い、勝利した方だけが資源を得るとする。今、プレイヤー間に能力差がないとすると、各プレイヤーが資源を得るためにかけるコストの大小が勝敗を決すると考えられる。そこで、各プレイヤーがコストの許容限度額（Willingness to pay 以下、略してWTPと呼ぶ）を決め、そのWTPが高い方が勝利し資源をえるとする。そして、これを「WTP ゲーム」とよぶことにする。

さて、WTP によって勝敗は決するが、勝敗が決した時に、実際に支払うコストはどのようになるのであろうか。この実際に支払うコストによって、「WTP ゲーム」は、以下の４つに下位分類できる。

(1)【サンクコストゲーム】このゲームでは、両者とも自分が決めた WTP いっぱいまで、コストを支払わなければならない。これは、現実的には、回収不可能な投資をして、争う場合に対応する。

(2)【入札ゲーム（first-price sealed-bit auctionとも呼ばれる)】このゲームでは、勝者は自分が決めた WTP だけコストを支払わなければならないが、敗者は、全くコストを支払わない。これは、現実的には受注をめぐって両者が入札を行う場合に対応する。なぜなら、このコストのかかり方は、入札において、勝者は受注金額引く生産コストの利得を得、敗者の利得が 0 となる場合と利得的には同じゲームとなり、理論的には同じと取り扱って構わないからである。

(3)【持久戦ゲーム】このゲームでは、勝者も敗者も、敗者の WTP だけコストを支払う。これは、両者が我慢比べをしていて、片方が、自分の予定していたコストの上限に達してあきらめた瞬間に勝敗が決まるとする場合に対応する。

(4)【オークションゲーム(second-price sealed-bit auctionとも呼ばれる】このゲームでは、勝者は敗者の WTP だけ支払わなければならないが、敗者の方は、全くコストを支払わない。これは、二人でオークションを行い、徐々に競り値を上げていき、競り値が片方の予定金額をわずかにうわまわった時、勝敗がきまるとする場合に対応している。

WTP ゲームの４類型

(勝者の WTP を C_1、敗者の WTP を C_2 とし、実際にかかるコストで分類)

勝者のコスト ＼ 敗者のコスト	C_1	C_2
C_2	サンクコストゲーム	持久戦ゲーム
なし	入札ゲーム	オークションゲーム

以上述べてきたように、「WTPゲーム」は、社会の中でしばしば行われている競争状態をモデル化したものとなっており、これを研究することは、社会の仕組みを知ることにつながるであろう。また、(Vickrey 1961) や (Bishop et al. 1978)などのように，各ゲームをそれぞれ別個に取り扱う先行研究は存在するが、それぞれのゲームについて別々に論じたり、そのうち２つだけを比較したりしており、全てを統一的に扱う観点が無かった。しかし、これらをひとまとまりのものとして、取り扱うことによって、議論の見通しがよくなり、各ゲーム間の比較を行うことができるようになる。例えば、「WTP ゲーム」は、なんらかの利害対立がおきている状況で相手に被害をあたえるような闘争を回避し、決まったフォーマットに従って問題を処理するための制度とみることもできるが、４種類のゲームの比較を行うことによって、どの制度で闘争回避をするのが最善であるかを判断することができる。すなわち、４つのゲームを比較して、最終的に実現される状態におけるプレイヤーの平均利得が最大であるゲームを探すことができる。もっとも、現実の社会では、２人のプレイヤーが争うのではなく、もっと多くの人が争う状況が一般的である。しかし、研究を進める第一歩として、本研究では、単純な２人ゲームに絞って考察をする。

２．２　資源価値の相違

資源価値を争うゲームは、様々な分野で研究されてきたが、その多くは、どのプレイヤーにとっても資源価値は等しいとしていた。しかし、たとえ同じ資源であっても、その価値は、各プレイヤーのおかれている状況や、個人差によって異なっている。そこで、本研究では、資源価値に個人差があると仮定する。

実際、いくつかの研究においては、各個人の資源価値の相違を考慮してモデル作りが行われていた。３節では、この先行研究に従い、資源価値に相違がありその分布が独立であるとした場合について、これまでの研究結果を簡単にまとめる。しかし、この独立性の仮定は、簡単化のために導入されたものであって、現実的ではない。あるプレイヤーにとって高い価値がある資源は別のプレイヤーにとっても高い価値があるだろう。また、あるプレイヤーにとって低い価値しかない資源は、別のプレイヤーにとってもやはり、価値が低いであろう。このように、資源価値の間には、正の相関関係があるとするのが自然である。そこで、本研究では、資源価値が独立でない場合も考察する。そして、独立でない場合は解析的に扱うのが極めて困難であるためコンピュータシミュレーションを行う。

なお、ここでは、資源は各プレイヤーが消費する。すなわち、転売をするという状況は考えず、資源価値とは、純粋に各プレイヤーにとっての価値をさすことにする。

２．３　進化ゲーム理論の適用

上記のようなゲーム状況でどのような均衡に達するか、あるいは、どのような動態をなすかを考える際に、進化ゲーム理論の考え方を使用する。シミュレーションを容易にするだけでなく、(Maiath 1992)や(Damme 1994) が指摘するように以下の利点があるからである。(1)進化ゲーム理論における均衡概念である ESS は、Nash 均衡の精緻化として使用するのに有効

である。(2)進化ゲーム理論では、静的な従来のゲーム理論と違い、動的な過程を表現することができる。(3)限定合理性を表現できる。

2．4　数値例

以上のモデルを具体的な数値例を使って説明しよう。今、A、B 二人のプレイヤーがいるとしよう。まず、各プレイヤーは、数値が書かれたカードを引く、自分が引いたカードに書かれた数字が勝利したときにえられる利得（資源価値）である。この二人の資源価値の分布が独立な場合については３節、相関がある場合は４節で解説する。今、A のカードには 100、B のカードには 50、と書かれてあったとしよう。次に、各人は自分のカードの数値を参考にして、WTP（コスト許容限度額）を決定する。このとき、相手の数値をみることはできない。この資源価値をみて、WTP を決定する規則が各人の戦略となる。今、仮に A の WTP が 90、B の WTP が 40 であったとしよう。このとき、A の WTP が B の WTP よりも大きいので、A が勝利し、100 の利得をえる。A、B が支払うコストは、各ゲームによって、①サンクコスト A 90　B 40　②入札ゲーム A90 B 0 ③持久戦ゲーム A 40 B 40 ④オークションゲーム A40 B 0 となる。

数値例

プレイヤー	A	B
資源価値	100	50
WTP	90	40

3．資源価値が独立の場合

資源価値が独立の場合には、ESS となる関数を求めることができる。議論を進める前に記号を定めておく。WTP ゲームにおいて、各プレイヤーが価値 v の資源に出会う確率の確率密度関数を $p_0(v)$ とおく。すなわち、v 以下の資源価値しかない資源にであう確率は、$\int_0^v p_0(\xi)d\xi$ とする。そして、片方にとっての資源価値が v_1 であってもう片方にとっての資源価値が v_2 である同時確率密度関数を $p(v_1,v_2)$ とおく。さらに、自分にとっての資源価値が v_1 であるときに相手の資源価値が v_2 である条件付き確率密度関数を $p(v_2 \mid v_1)$ とおく。すなわち、$p_0(v_1) \neq 0$ のとき、$p(v_2 \mid v_1) = p(v_1,v_2)/p_0(v_1)$ である。なお、ここでは、簡単化のために、$p, p_0, p(\mid)$ は連続で微分可能な関数とする。

さて、「WTP ゲーム」においては、自分にとって価値 v の資源に対する WTP を決定する関数 $c(v)$ が純粋戦略となる。ここでは、プレイヤーがとる純粋戦略は、$[0,\infty)$ 上の連続微分可能な関数であると仮定し、このような関数全体を Ω で表す。この仮定をはずしても(Kura et al. (a))からいろいろなことがわかるが、ここでは、数学的煩雑さを避けることにする。

戦略 $c_1 \in \Omega$ が戦略 $c_2 \in \Omega$ と対戦したときに得られる期待利得を $E(c_1,c_2)$ とおく。本論文では、戦略 $c^* \in \Omega$ が任意の $c \in \Omega (c \neq c^*)$ に対して $E(c^*,c^*) > E(c,c^*)$ であるとき、c^* を純粋ESS と呼ぶことにする。本来のESSの定義であれば、まず、$E(c^*,c^*) \geqq E(c,c^*)$ と等号がついた不等式を均衡条件として考え、等号成立時のみ安定条件を考えるが、以下の解析的な解が得られる場合は、この等号つきの不等号を満たす c^* はすべて、等号なしの不等号を満たすからである。

さて、以上の定式化より各個人にとっての資源価値の分布が独立同分布であるとき、純粋ESS は、以下のように求められる（Kura et al. (a)）

(1) サンクコストゲーム　$c^*(v) = \int_0^v xp(x \mid x)dx$

(2) 入札ゲーム　$c^*(v) = v - \dfrac{\int_0^v Q_1(x)dx}{Q_1(v)}$　（ここで、$Q_1(v) = \int_0^v p(x|v)dx$）

(3) 持久戦ゲーム　$c^*(v) = \int_0^v \dfrac{xp(x|x)}{1-Q_1(x)}dx$

(4) オークションゲーム　$c^*(v) = v$　（注1）

これは、純粋戦略としては、唯一のESSであり、相関がある場合も解の候補である。さらに、純粋戦略の有限個の重ねあわせであらわされる混合戦略を含めても唯一のESSである。

また、（Kura el al. (b)）によると、資源価値が独立の場合、実際にかかるコストが各ゲームによって異なっているにもかかわらず、皆がESSをとっている状態での平均利得は、どのゲームでも等しくなる。直感的に考えた場合、WTP, が同じであれば「オークションゲーム」がもっともコストがかからないゲームなので、均衡状態におけるプレイヤーの利得も他のゲームに比べ高いであろうと予想されるが、これは誤りである。なぜなら、自分が設定した WTP に比べ、低いコストを支払えばよいので、各人が WTP を釣り上げていき、結局、他のゲームと同じだけのコストを実際に支払うことになるからである。

結局、資源価値が独立であれば、４つの制度のうちどれを選んでも、変わりがないということがいえる。しかし、実際は、資源の価値は独立ではない。この場合、どのようになるであろうか？

４．資源価値が独立でない場合

４．１　シミュレーション方法

独立でない場合については、解析的な解を得ることは極めて難しい。そこで、この場合についてコンピュータシミュレーションを用いる。この節では、シミュレーションを行うためにもうけた幾つかの仮定を説明する。

(1)時刻 t に価値 vの資源に対して、WTPを c に設定するプレイヤーの割合を $S_t(v,c)$とおく。

(2) $p(v_2|v_1)$が v_1 についてログ正規分布であるとする。すなわち、$p(v_2|v_1) = 1/(v_1\sqrt{2\pi\sigma^2})\exp(-(\log v_1 - \log v_2)^2/(2\sigma^2))$ とする。 ログ正規分布は、ログプロットすると正規分布になる分布であり、非負の値をとる変数としては、自然な分布である。また、σは、ログプロットしたときの正規分布の標準偏差であり、σが無限大のとき２者間の資源価値は独立となり、$\sigma = 0$のとき資源価値は相関１になる。そこで、シミュレーションを行う際は、この変数σを変化させることによって相関を変化させる。

(3)WTPや資源価値、時間を離散近似する。

(4)シミュレーションは、有限の値しか取り扱えないので、資源価値に最大値があると仮定する。実際、資源価値には限界があるであろうし、たとえ非常に高い価値をもつ資源があったとしても、それは、単純にコストをかけた方が勝利するという「WTP ゲーム」の適用範囲外になるのでこれは、自然な仮定である。同様に、「WTP ゲーム」で扱う資源価値には最小値があるとする。資源価値が極めてゼロに近いものに対しては「WTP ゲーム」に参加するためのコストの方が高くつき「WTP ゲーム」が成立しないので、これは自然な仮定である。

(5)戦略は関数となるので、本来は，その関数である各戦略の増減をシミュレーションする必要がある。しかし、関数の濃度は実数の濃度よりも大きくなり，膨大な数の関数を考えなけれ

ばならないことになる。たとえ、離散近似したとしても、NCをWTPのメッシュ数，NVを資源価値のメッシュ数とすると戦略の数は、NC のNV乗となる。このような、膨大な数の戦略をシミュレーションで扱うことは困難である。そこで、時刻 0 のときに各資源価値に対するWTPは、互いに独立であるとする。つまり、ある資源価値v_1に対して高いWTPを設定していたため，別の資源価値$v_2(\neq v_1)$ に対しても高いWTPを設定するといった相関関係がないとする。この仮定によって，あたかも各資源価値ごとに別個戦略が存在しているかのように取り扱い、$s_t(v,c)$に着目し、その変動を追っていくことができるようになる。また、この仮定によって得られた均衡状態は、戦略を関数と考えた均衡状態と一致するので、これは不自然な仮定ではない。

(6)利得から$s_t(v,x)$の変化をえるモデルは、レプリケータダイナミックスを使用する。これは、利得の高い戦略ほど模倣、伝達され易いと考え、戦略の利得かけるその戦略採用者数が次の時刻の戦略採用者数であると考える方法である。これは、アクセルロッドのシミュレーションなどでも使われている、最も、ポピュラーな方法である。例えば、サンクコストゲームの場合には、価値 V に対するWTPをCとしたときの利得を $B_t(V,C)$おき、$B_t(V,C) = W + Vp_0(V)\Sigma\Sigma p(x|V)\, s_t(x,y) - C$ とする。ここで、Wは、基本利得であり、Bが負にならないように値を決めるが、均衡状態は W によらず同じになることが知られている。そして、ダイナミックスの計算は、$s_{t+1}(V,C) = s_t(V,C)B_t(V,C)/\Sigma s_t(V,x)B_t(V,x)$ としておこなう。ここで、仮定(4)によって、この計算方法が保証されていることに注意されたい。

4．2　シミュレーション結果と考察

まず、サンクコストゲームについて考える。このゲームにおいては、２者の資源価値が独立である場合は、３節の純粋 ESS が解となるが、資源価値の相関が１のときは、いかなる安定均衡も存在しないことがしられている (Rose 1978)。それでは、その中間的な相関がある場合はどのようになるのであろうか？

資源価値を x 軸、WTP を y 軸にとり、価値 v の資源に対し c と WTP を設定するプレイヤーの割合 s(v,c)を濃さで表した図が図１～図４である。$\sigma=1$ と相関が比較的小さいときは、直線に近い形に分布した (図 1)。$\sigma=0.5$ と相関をやや大きくすると、２本の筋があらわれた。$\sigma=0.3$ とさらに、相関を小さくした場合は、筋の数が増えていった。さらに、$\sigma=0.1$ とした場合は、非常に多くの筋がみられた。また、$\sigma=0.1$ のときは、完全な均衡状態ではなく、長時間たっても小さなゆらぎが持続するようであった。

入札ゲーム、持久戦ゲーム、オークションゲームの３つのゲームの場合は、理論的に独立な場合、相関が1の場合ともに安定解が求められており、中間的な相関がある場合も、なんらかの安定な状態に落ち着くことが予想されるが、実際、中間的相関がある場合についてシミュレーションを行うと、一定の状態に収束した。

次に、プレイヤーの平均利得に着目してみることにする。シミュレーション結果は下表のようになった。なお、この平均利得は、Wを引いて、このゲームからのみ得られる利得としている。

プレイヤーの平均利得

	サンクコストゲーム	入札ゲーム	持久戦ゲーム	オークションゲーム
$\sigma=0.1$	0.436	0.740	0.410	0.234
$\sigma=0.5$	0.722	1.862	0.412	1.313
$\sigma=1$	2.071	2.752	0.847	2.324
$\sigma=10$	3.983	3.875	3.966	3.852

この表から、$\sigma=0.1$ のときのように，二者間の資源価値の相関が非常に高い場合には、オークションゲームの平均利得が最も低いことがわかる。これは、WTP が同じであれば、オークションゲームが最もコストを支払わなくていいゲームであることを考えると意外な結果である。オークションゲームにおいては、お互いの WTP が一致する場合を除くと常に自分が設定したコストより低いコストを支払えばいいので、WTP をどんどんと引き上げていくという現象が起こっているものと思われる。よって、両者で資源に対する評価がほぼ一致しているような状況下で平均利得を高めようとするときは、オークションゲームは避けるべきであることがわかる。また、$\sigma=0.1$ から $\sigma=0.5$ という広い範囲で入札ゲームの利得が最も高いことがわかる。よって、平均利得を最大化しようとするならば、入札ゲームを採用すべきであることが分かる。

それから、資源価値の相関がほとんどなく、独立に近い状態では、理論どおり、４つのゲームの平均利得がほぼ等しくなることが分かった。さらに、注目すべき事に、入札ゲームとオークションゲームを比較した場合、オークションゲームが常に平均利得が低いことがわかる。実際、ログ正規分布のように$p(v_2|v_1)$が$\partial p(v_2|v_1)/\partial v_1<0$ for $v_2<v_1$という条件を満たすときは、オークションゲームの方がプレイヤーの平均利得が低いことが数学的に証明できる。今、資源が商品であり、その商品を「WTP ゲーム」で売ろうとしている状況を考える。このとき、サンクコストゲームや持久戦ゲームなどのように、商品を手に入れることができなかった人に対しても、金銭を要求するゲームは現実的ではない、そこで、入札ゲームかオークションゲームかのどちらかを使用することになる。また、プレイヤーの平均利得が低いということは、販売額が高いことを示している。よって、このシミュレーション結果から、オークションゲームを使用するのが、現実的かつ商品が高く売れる方法であることが分かる。実際、商品の販売は、入札によるより、オークションによるケースが多いが、これは、その方が、高く売れるからであろう。

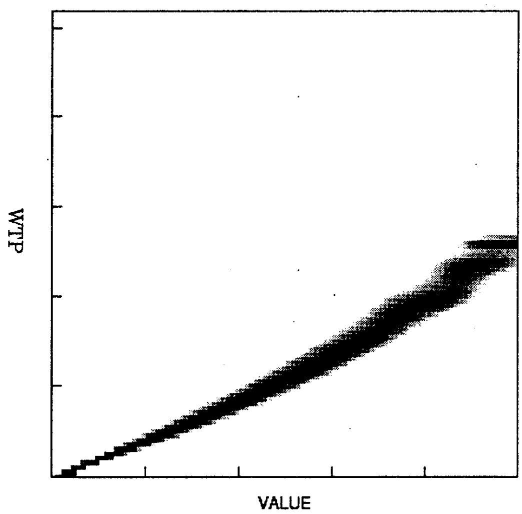

図１　サンクコストゲーム
（$\sigma=1$ 、t=60000）

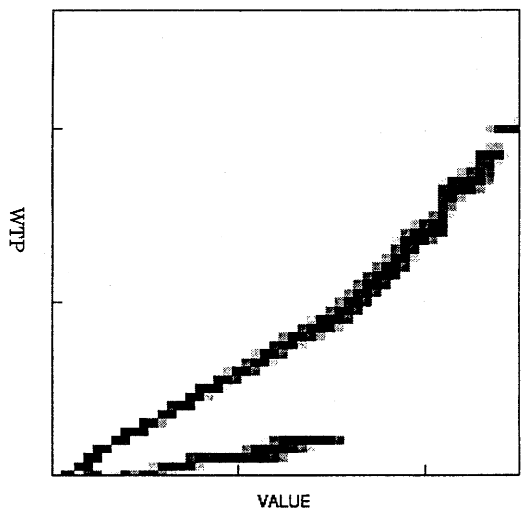

図２　サンクコストゲーム
（$\sigma=0.5$、 t=70000）

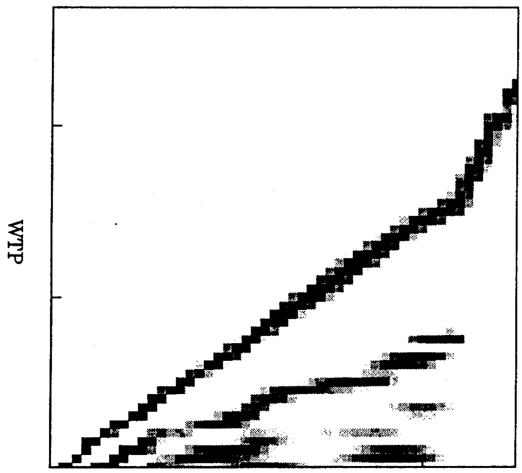

図3 サンクコストゲーム
(σ=0.3 、t=75000)

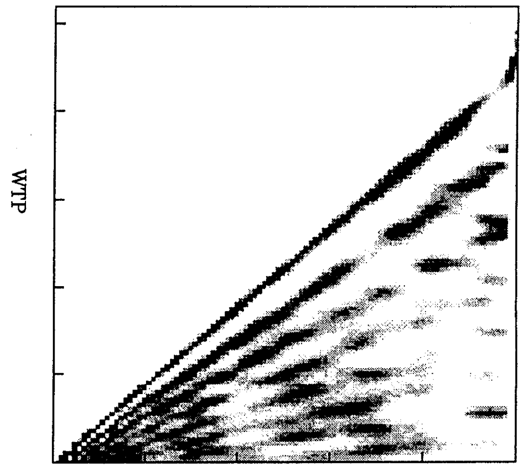

図4. サンクコストゲーム
(σ =0.1 、t=165000)

引用文献

Damme,E.V. (1994) "Evolutionary Game theory" European Economic Review 38:847-858

Mailath,G.J.(1992) "Introduction: Symposium on Evolutionary Game Theory" Journal of Economic Theory 57:256-277

Rose, M. R. (1978)"Cheating in evolutionary games." Journal of theoretical Biology 75:21-34

Takuya Kura, Kenya Kura and Tatsuhiro Shichijo (a) "Pure ESS function with individual differences on resource values" (submitting)

Takuya Kura, Kenya Kura and Tatsuhiro Shichijo (b) "The law of payoff consistency: Pure ESS function in continuous game" (submitting)

Vickrey, R.J. (1961)"Conterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders" Journal of Finaces, 16(1):8-37

(注1)
オークションゲームについては、相関がある場合もESSである。