解　説

様　相　論　理†

米　崎　直　樹††

1. 様相論理の概念

論理における様相の概念はアリストテレース（Aristotle）の昔にさかのぼる．しかしながら，それは多くの他の議論と同様に十分に形式化されたものではなかった．Hughes, Cresswell (1968)[1]によれば，最初の様相論理の記号的取扱は，1880年ごろ MacColl によって始められたことになっている．だがより形式的な取扱いは，1912年 Lewis によって始められ，Langford によって1932年にまとめられた．それ以降 Lewis の S1〜S5 以外に，Feys (1937) によるTや，von Wright (1951) によるMなど，数多くのシステムが提案されてきた．その後の研究は Barcan (1946)[2]の仕事を除いては，命題論理におけるものが主であり，位相的，代数的研究が中心であった．Kripke による可能世界モデル (1959)[3] が登場してからは，標準的述語論理と同様な意味論が展開可能となった．Hintikka (1961)[4] や Montague (1960)[5] らの同様な考え方に基づく研究が始められたのもこのころである．この後この意味論に基づく証明システムの完全性の証明が与えられ，さらに Bowen (1975) によって，様相論理に対するモデル論的研究がなされた．計算機科学，人工知能の分野でも，Pratt (1976)[6] や Harel (1979)[7] などのプログラムを様相記号として考える体系などが考えられた．また時相論理 (temporal logic)[8] や内包論理 (intensional logic)[9] のように，様相の概念がさまざまな概念の形式化に有効であることが分かってきた．たとえば分散システムのプロトコルについても，様相論理が本質的部分の解析に役立っている[10]．

また非標準論理の中で，様相論理は一つの大きな幹をなしている．時相論理，動的論理など，様相論理の範疇に数えられるものが多いことや，信念や知識の論理，適切さの論理，非単調論理など，様相論理で解釈し直せるものも多いことがその理由である．本稿では，様相論理の基本的概念を説明すると同時に，それが計算機科学や人工知能研究のなかで用いられる非標準論理とどのように関係しているか，またそれにかかわる理論と計算機上での実働化技術と理論について解説を行う．

なお，すでに入手可能な日本語による様相論理に関する解説が存在する[11),12]．これらのすでに紹介された内容は，本解説を読むに必要な最低限の基本的内容を除いて意図的に省いてあるので合わせて参照されたい．また非常に多くの様相論理の教科書的書物が出版されているが，ここでは[13]を薦めておく．

2. 命題様相論理の形式的体系

まず，命題論理に様相概念を導入したもっとも形式的体系の形式的定義を与えよう．

2.1 構　文

加算無限の命題変数の集合 $P=\{p, q, r, \cdots\}$ を仮定する．

1) 命題変数は様相論理式である．

2) p を様相論理式とするとき，$\Box p$ は様相論理式である．

3) p, q を様相論理式とするとき，$p\wedge q$, $\neg p$ は様相論理式である．

4) 以上から定義されるものだけが様相論理式である．

$\Diamond p$ で $\neg\Box\neg p$ を，$p\vee q$ で $\neg(\neg p\wedge\neg q)$ を，$p\rightarrow q$ で $\neg p\vee q$ を表す．

2.2 意　味

代数的な意味も考えられてきたが，ここでは概念として応用も広く，完全性の議論も可能とするクリプケ[3]による可能世界モデル (possible world model) による解釈を与える．

W を可能世界の可算集合，R を到達可能関係と呼ばれる W の要素に対する2項関係（$R\subseteq W\times W$. R

† Modal Logic by Naoki YONEZAKI (Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology).
†† 東京工業大学情報工学科

は空であることも許す．$\langle u, v\rangle \in R$ のことを uRv と書く．)，$m: P \to (W \to \{t, f\})$ を付値関数とするとき，$S=\langle W, R\rangle$ を構造 $M=\langle W, R, m\rangle$ をモデルと呼ぶ．モデル M と任意の世界 $w \in W$ が与えられると，式Aの値 $V_{M,w}(\mathrm{A})$ は以下のように定まる．

1) 式が命題変数 p であるとき，

$V_{M,w}(p)=m(p)(w)$,

2) 式が $\Box p$ の形の式であるとき，

$$V_{M,w}(\Box p)=\begin{cases} t & wRw' \text{ なるすべての } w' \text{ について } V_{M,w'}(p)=t, \\ f & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

3) $\wedge, \neg$ については通常のように定める．

したがって，

$$V_{M,w}(\Diamond p)=\begin{cases} t & wRw' \text{ かつ } V_{M,w'}(p)=t \text{ なる } w' \text{ が存在する．} \\ f & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

となる．

$V_{M,w}(p)=t$ のとき，式 p はモデル M，世界 w について真という．すべてのモデル M，世界 w について式 p が真であるとき，式 p は恒真であるという．

以下の表のように R についての条件により，いくつかの体系に分類される．丸印のついた所が条件の成立を表す．

Rの条件	$S5$	$S4$	B	T	DT	$DS4$	$KS4$	$KT(K)$	$KD45$
反射律	○	○	○	○					
推移律	○	○				○	○		○
対称律	○		○						
ユークリッド律	○								○
連鎖律	○	○	○	○	○	○			○

ここで，ユークリッド律は，$\forall u, v, w \in W(uRv, uRw \to vRw)$ 連鎖律は，$\forall u \in W, \exists v \in W, uRv$ を意味する．

これらの条件は，互いに独立ではなく以下の関係にあることは容易に証明される．

定理 2.1

1) 反射律→連鎖律

2) 対称律∧推移律→ユークリッド律

3) 対称律∧推移律∧反射律
↔ユークリッド律∧反射律

4) 対称律∧推移律∧連鎖律
↔ユークリッド律∧反射律

2.3 公 理 系

まず，到達可能関係 R に何の制約もない K と呼ばれる体系に対する公理系について述べよう．

[公理]

A0 古典命題論理の公理

A1 $(\Box(p \to q) \wedge \Box p) \to \Box q$

[推論規則]

$$\mathrm{I1} \quad \frac{\vdash p,\ \vdash p \to q}{\vdash q}$$

$$\mathrm{I2} \quad \frac{\vdash p}{\vdash \Box p}$$

ここで，$\vdash p$ は p が定理であることを示す．

I2を恒真でない式，$p \to \Box p$ と同一視してはならない．公理系が完全であれば $\vdash p$ ということは，p が恒真ということであるから，恒真性の定義より明かなように p はいかなる世界でも真である．したがって $\vdash \Box p$ がいえるのである．

2.4 完 全 性

古典命題論理の公理とI1を含む公理系については，以下が成立する．

1) すべての無矛盾集合 F は最大無矛盾集合に拡張することができる．ここで，式の集合 S が最大無矛盾であるとは，S にないすべての無矛盾な式 p について，$S \cup p$ が矛盾することをいう．

2) F が最大無矛盾集合であるならば，すべての式 p, q について

(i) $p \in F$ または $\neg p \in F$

(ii) $p \wedge q \in F$ iff $p \in F$ かつ $q \in F$

(iii) $p \in F$ かつ $p \to q \in F$ ならば，$q \in F$

(iv) p が恒真式ならば，$p \in F$

が成立する．

定理 2：K の公理系は健全 (sound) で完全 (complete) である．

(証明) 健全性は明らか．完全性を示すには，すべての無矛盾な式は充足可能であることを示せばよい．したがって 1)よりすべての最大無矛盾集合に対して可能世界モデルを構成する方法を示せばよい．それは以下のように構成される．式の集合 F について，$F'=\{p \mid \Box p \in F\}$ とするとき，モデル $M=\langle W, R, m\rangle$ を以下のように設定する．

$W=\{w_G \mid G \text{ は最大無矛盾集合}\}$

$$m(p)(w_G)=\begin{cases} t & p \in G \\ f & \neg p \in G \end{cases}$$

$R=\{(w_F, w_G) \mid F' \subseteq G\}$

式 p の構造帰納法によって，式の任意の集合 F について，$V_{M, w_F}(p)=t$ iff $p \in F$ が成立することを以下のように示すことができる．

1) p が命題変数のとき，M の構成より明らかに成立．

2) ¬, ∧ の構成については，最大無矛盾集合の性質より明らかに成立．

3) $\Box p \in F$ について考える．$p \in F'$ であるから，R の定義より $(w_F, w_G) \in R$ ならば $p \in G$ であり，帰納法の仮定より，$V_{M,w_G}(p)=t$ となる．したがって V の定義より $V_{M,w_F}(\Box p)=t$ となる．

逆に，$V_{M,w_F}(\Box p)=t$ と仮定すると $F' \cup \neg p$ は矛盾する．なぜならばそうでないとすると，最大無矛盾集合 G が作れて，$(w_F, w_G) \in R$ となる．帰納法の仮定より，$V_{M,w_G}(\neg p)=t$ となり，$V_{M,w_F}(\Box p)=f$ となって仮定に反する．矛盾を導く式は有限個であるから n 個の式が F' 中にあって $\vdash (p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to p) \cdots))$ となる．I2 より $\vdash \Box(p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to p) \cdots))$ であり，最大無矛盾集合はすべてのトートロジを含むから，$\Box(p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to p) \cdots)) \in F$．また $p_1, p_2, \cdots p_n \in F'$ であるから，$\Box p_1, \Box p_2, \cdots \Box p_n \in F$ である．A1 と 2)の(iii) より $\Box p \in F$. *q. e. d.*

さて，その他の体系では，R に制約条件が付随しているから，証明されるべき定理は多くなる．おのおの体系の制約条件に応じて以下の公理を追加することにより，各公理系が得られる．

A3)	反射律	$p \to \Diamond p$
A4)	推移律	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
A5)	対称律	$p \to \Box\Diamond p$
A6)	ユークリッド律	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$
A7)	連鎖律	$\Box p \to \Diamond p$

なぜこのような公理でよいかを直観的に確かめることは容易である．たとえば対称律については，ある世界 w で p が成立するならば，そこから到達可能などんな世界 w' についても(□)，w' からは対称律により w に到達可能であるから，w' からは必ず p が成立する到達可能な世界 (w) が存在する (◇)．これがどんな世界 w，どんな式 p についても成立するから，対称律が成り立つことにより新たに証明できるようになった式は，公理 A5 を用いることにより証明できる．

各体系に付随した条件に応じてこれらの公理を K の公理系につけ加えることにより完全な公理系が得られる．

このようなクリプケモデルによる形式化以前には，位相ブール代数としての形式化が主であった．すなわち位相束の位相演算を可能性 (◇) と解釈すると $S2$ や $S4$ の形式化が可能となる．

2.5 多重様相論理

$\Box p$ の様相記号□にさまざまな概念の対応付けを行うことにより，いくつかの論理が考えられている．たとえば，p は必然的に真 ($S5$) (標準的様相論理)．p はいかなるときでも真 ($S4$) (時間論理)．Y は p を知っている ($S4$) (知識の論理)[13]．Y は p を信じている ($S5$) (自己認識論理)[14]．S なるステートメントを実行した後では p は真 (動的論理[6]，プロセス論理[7]) などがある[15]．これらの各様相論理では相互に定義不能な複数の様相記号が用いられることがある．

たとえば，時相論理では，next time と until オペレータを独立に定義することができる．また自己認識論理では，複数のプレーヤを想定して，$K_1, K_2, \cdots$ なる複数の様相記号を用いることが可能である．さらに動的論理では，$[S]$ のように，ステートメント S の数だけ様相記号が存在する．

このような様相論理をこれまで述べてきた単純な様相論理に対して，多重様相論理と呼ぶことがある．そこでは，$\langle W, m, \{R_1, R_2, \cdots, R_n\} \rangle$ のような一つの世界集合とその上での複数の到達可能関係をモデルとする．このような拡張の方向は，その解釈に用いる世界の到達可能性がもつ性質に従って以下のように二つの観点から分類整理することができる[16]．

1) ホモジニアス/ノンホモジニアス

すべての様相記号の意味が以上述べてきた通常の (すなわち T, $S5$, $S4 \cdots$) 体系のどれか一つで解釈されるときホモジニアスという．

2) インタラクティブ/ノンインタラクティブ

各様相記号は互いに定義不能だが，意味的に独立ではない．すなわち複数の到達可能関係が独立ではないときインタラクティブという．

ホモジニアスでノンインタラクティブな例としては，複数プレーヤで，各プレーヤ i のもつ様相オペレータに関する公理はたとえば，すべての i について $Kip \to KiKip$ が成立するだけといったシステムがある．

ホモジニアスでインタラクティブな場合には，$K_1p \to K_2p$ のような公理が導入されるような場合である．また時相論理もそのような特殊な例となっており，到達可能関係は一種類であり，next time(○) と until(U) オペレータが互いに定義できない独立のものとして導入されるが $p\mathrm{U}q \leftrightarrow q \vee (p \wedge \bigcirc(p\mathrm{U}q))$ なる関係がある．ノンホモジニアスでインタラクティブな例として時間と空間の論理[17]，知識と時間の論理[42]などがある．

複数種類の様相記号をとり扱う他の方法として，いわゆる多ソートモデル，$\langle W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n, m, \{R_1,$

$R_2, \cdots, R_n\}\rangle$ を基にするシステムがある．[19]などがそのような例である．そこでは，あるソートの命題を他のソートの命題と読み換えるための様相記号が導入される．

このような様相論理を，統一的に扱う方法については，応用も多く興味ある問題が数多く残っている．

3. 様相論理の証明

様相論理によって，情報処理におけるさまざまな現象を形式的に表現することが可能となるが，形式化の目的としては，現象の整理された理解の方法を与えること以上に，計算機によるその形式化に従った（自動的）処理が重要である．

2. で述べた公理系に基づく，自然演繹的方法をそのまま自動証明などの処理に用いることも可能であるが，手続き的証明手法として以下のタブロによる方法[20]は，他の自動証明についても良い見通しを与える．

3.1 様相タブロシステム

L を一つの体系とし，$\langle W_0, R_0, m\rangle$ を以下に定義されるような一般モデルとする．$w \in W_0$ とし X を式とするとき，wX を前置式と呼び，w をその前置式の前置記号と呼ぶ．これは直観的には世界 w において X が真であることを表す．ϕ を $W_0 \times 2^{W_0} \to 2^{W_0}$ なる以下のような選択関数とする．すなわち，W_0 の有限部分集合 Z と $p \in Z$ が与えられると，$\phi(p, Z)$ は W_0 の部分集合 $\{q \mid pR_0q, q \in W_0 - Z\}$ を返す．前置式をその形式に従って以下のように $\alpha, \beta, \gamma, \pi$ の4種類に分類する．

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$p(X \wedge Y)$	pX	pY	$p(X \vee Y)$	pX	pY
$p\neg(X \vee Y)$	$p\neg X$	$p\neg Y$	$p\neg(X \wedge Y)$	$p\neg X$	$p\neg Y$
$p\neg(X \to Y)$	pX	$p\neg Y$	$p(X \to Y)$	$p\neg X$	pY
$p\neg\neg X$	pX	pX			

γ	$\gamma(q)$	π	$\pi(q)$
$p\Box X$	qX	$p\Diamond X$	qX
$p\neg\Diamond X$	$q\neg X$	$p\neg\Box X$	$q\neg X$

以下のように構成される木を wX の L-タブロと呼ぶ．各節点に付随する式の集合を F とする．

1) wX をまず根のみよりなる木の根に置く．

2) α 型の式が葉に現れるならば，$F \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ を新たにその葉に付随する式とする．

3) β 型の式が葉に現れるならば，その子として $F \cup \beta_1, F \cup \beta_2$ をそれぞれ付随する式とする二つの葉を接続する．

4) γ 型の式が葉に現れるならば，Z をその葉に現れる前置式集合 F 中の前置記号のすべてとすると，$q \in \phi(p, Z)$ ならば，$\gamma(q)$ をその葉に加える．さらに $q \in Z$ かつ pR_0q ならば $\gamma(q)$ もその葉に加える．

5) π 型の式が葉に現れるならば，Z をその葉に現れる前置式集合 F 中の前置記号のすべてとすると，$q \in \phi(p, F)$ ならば $\pi(q)$ をその葉に加える．

タブロの葉が前置式 pY と $p\neg Y$ を含んでいるならば，その葉は閉じているという．以上の操作によってタブロのすべての葉が閉じたとき，そのタブロは閉じているという．$p\neg X$ の L-タブロが閉じているとき，X を L の定理と呼ぶ．これから分かるようにタブロによる証明は，ある世界で $\neg X$ が成立しているとすると矛盾するならば，すべての世界で X が真であるとする反駁によるものである．

一般的構造 $\langle W_0, R_0\rangle$ は各様相システムに従って以下のように定義される．$S5$ の場合，W_0 は整数の集合と考えてよい．R_0 は単純に $W_0 \times W_0$ である．Z が W_0 の有限部分集合であり，$p \in Z$ ならば，$\phi(p, Z) = W_0 - Z$ とする．

それ以外の場合は，W_0 は整数の列よりなる集合と考え，推移関係 R_0 を以下のように考えることができる．

$S4$: $sR_0s \cdot t, |t| \geqq 0$

B : $sR_0s, s \cdot pR_0s, sR_0s \cdot p$

T : $sR_0s, sR_0s \cdot p$

$DT(KT)$: $sR_0s \cdot p$

$DS4(KS4)$: $sR_0s \cdot t, |t| \geqq 1$

ここで，s, t は列，p は一つの記号を表す．

（例 3.1）

T における $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$ のタブロによる証明

$1\neg((\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B))$ （1）

$1(\Box A \wedge \Box B)$ （2）［（1）より］

$1\neg\Box(A \wedge B)$ （3）［（1）より］

$1\Box A$ （4）［（2）より］

$1\Box B$ （5）［（2）より］

$1 \cdot 1\neg(A \wedge B)$ （6）［（3）より］

$1 \cdot 1\neg A$（7）［（6）より］ $1 \cdot 1\neg B$（8）［（6）より］

$1 \cdot 1A$ （9）［（4）より］ $1 \cdot 1B$ （10）［（5）より］

〈閉じ〉 〈閉じ〉

この証明システムは完全であることが証明されている[21]．

以上の方法では，前置記号を選ぶのに任意性があり効率が悪い．それを改善するために様相記号の統一化による方法が考えられている．

3.2　様相記号列の統一化による方法

この方法では基本的には◇をスコーレム定数，□を変数とみなし，変数への代入を見つけるのであるが，それは各様相システムごとに，いくつかの制約を課した部分列を部分列に対応付けることが可能な結合的統一化（associative unification）となっている[22]．

あらゆる体系に共通なもっとも単純な例で述べるならば，$\Diamond_a P \wedge \Box_x \neg P$ の充足不能性は，変数 x に定数 a が代入可能であることとして表される．すなわち矛盾する世界 a が存在することとして表現される．

この方法を節形式での分解証明に応用する．

一般的には様相論理における節形式は存在しない．それは $\Box(A\vee B)\rightarrow\Box A\vee\Box B$ が成立しないからである．そのため以下のような節形式に準じた標準形を考える．

$$C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n$$

各 C_i は以下の形をした節である．

$$C_i=\mathrm{pre}_{i1}L_{i1}\vee\mathrm{pre}_{i2}L_{i2}\vee\cdots\vee\mathrm{pre}_{im}L_{im}$$

ここで，L_{ij} はリテラルであり，pre_{ij} は以下の手続きで得られる前置様相記号列である．ここで，$L_{ij}=\neg L_{kl}$ $(i\neq k)$ であるとき，これらを相補的リテラルと呼ぶ．

（標準形変換手続き）

step 1：$\rightarrow$ を $\neg$ と $\vee$ で書き換える．

step 2：$\neg$ を一番内側へ移動する．

step 3：$\Box(A\wedge B)\leftrightarrow\Box A\wedge\Box B$　(D_1)

$\Diamond(A\vee B)\leftrightarrow\Diamond A\vee\Diamond B$　(D_2) を用いて様相記号を分配する．

step 4：様相記号 □ の出現に異なる変数名（$x, y\cdots$）を，様相記号 ◇ の出現に異なる定数名（$a, b,\cdots$）を付加する．

step 5：さらに，(D_1), (D_2) 及び

$\Box_x(A\vee B)\rightarrow\Box_x A\vee\Box_x B$ (D_3)

$\Diamond_a(A\wedge B)\rightarrow\Diamond_a A\wedge\Diamond_a B$ (D_4) を用いてラベル付けされた様相記号を分配する．

なお，上記の step で，可能なときはいつでも∨に関して∧を分配する．

また，充足可能性を保存するトートロジの除去などは随時用いて良い．このようにして得られた節集合の相補的リテラルについて，分解証明規則の適用を通常のように行うのであるが，このとき相補的リテラルに付いている前置様相記号列同士が以下の制約のもとで統一化が可能でなければならない．

表-1　統一化における代入規則スキーマ

$S5$	δ/γ, ϕ/γ　ただし，記号列の最後の要素のみを考えれば良い．
$S4$	δ^*/γ
B	δ/γ, ϕ/γ, $\phi/\delta\gamma$
T	δ/γ, ϕ/γ
DT	δ/γ
$DS4$	δ^+/γ
$KS4$	π^+/γ
KT	π/γ
$KD45$	δ/γ　ただし，記号列の最後の要素のみを考えれば良い．

その制約は各様相体系に従って表-1 のように整理される[23]．ここで π, γ, δ でそれぞれ◇型，□型，◇または□型の様相記号を表す．ϕ は空列を表し，x/y で x が y に代入可能であることを表す．

このような命題を支配する様相記号列の統一化による方法は，各体系の違いを統一化の規則のみに押し込めているので分解証明法の従来の戦略をそのまま適用することが可能である．また様相述語論理に拡張することも容易である[24]．

その他の証明法として，節形式を用いない時相論理に関する分解証明法として[25]がある．また認識論理に関する分解証明法として[26]があるが，これは基本的には，タブロ法であり，各可能世界に対応するタブロの中では通常の分解証明法を用いている．また様相を処理し新しいタブロをつくり出すのに，任意の恒真な式を途中で導入する特殊な分解証明法[27]を用いる．

4. 決定手続きの複雑さ

$T, K, S4$ の充足可能性問題の計算の複雑さは，PSPACE-完全であることが知られているが，$S5$ に関しては NP-完全であるから，これは命題論理と同じである．複数プレーヤの場合は，$T, K, S4, S5$ のすべてが，PSPACE-完全となる．$S5$ の NP-完全性については以下のような容易な直観的理解が可能である．

$S5$ においてはすべての世界が互いに到達可能であるから，式において現れる命題変数を支配する様相記号の中でもっとも内側の一つの様相記号のみが意味をもつ．すなわち△を◇または□とすると，$\triangle^*\Box p\leftrightarrow(\Diamond p\wedge\Box p\wedge p)$ が成立する．また $\triangle^*\Diamond p\leftrightarrow\Diamond p$ であるから，否定を一番内側に移動しておいて，すべての命題変数の出現について右辺のように書き換え，否定を様相記号の外に出し，$\Diamond p$, 及び $\Box p$ を新たな命題変数と置き換えることにより，充足可能性において

等価な命題論理式が得られる．この式の長さは，もとの式の長さのたかだか整数倍である．

他のシステムが PSPACE-完全となることは，いかなる n についても少なくとも，$2^{\sqrt{cn}}$ の世界をもつモデルでしか充足されない長さ n の式が存在することより証明される．これはタブロによって作られる世界の木構造の深さが n に依存したものとなることに基づく[28]．

この結果は，m-種類の様相記号をもつホモジニアスでノンイタラクティブな多重様相論理 $T(m), K(m), S_4(m), \cdots$ についても拡張され，同様にタブロの作る木の大きさからそれぞれ PSPACE-完全であることが示されている[29]．

さらに，その充足可能性判定問題が決定不能となる論理も容易に作れる．たとえば時相論理の一つであるインターバル論理（ITL）[30] などがそうである．

5. 様相論理の応用

様相概念はそもそも，含意の精密化，必然とか可能といった概念を形式化しようとして考えられたものであるが，このような種類の言明に関する様相に限ったとしても，多くの他の様相概念がある．たとえば過去や未来といった時間的様相，知る，信じるといった認知的様相，願う，好むといった情緒的様相，しなければならない，してはならない．などの義務的様相などが存在する．これらは自然言語の意味の問題と直接関連するから，当然その形式的意味論に適用可能と思われる．すべてが詳しく調べられているわけではないが，知識と信念の論理，非単調論理と様相論理との関係などについてはよく研究されている．ここでは，これらの論理との関係，特に直観主義論理との関係及び直観主義様相論理について詳しく述べる．時相論理，動的論理など，計算機科学に関係の深い関連する論理については，文献 15)，31)，40) などを参照されたい．

5.1 様相論理と直観主義論理

直観主義論理[32]は，値の存在証明からその計算手続きが得られることから，非標準論理の一つとして計算機科学の中で注目を集めているが，この論理も様相論理とはいくつかの点で関連がある．前に述べたように，位相ブール代数（位相束）は，様相命題論理 $S4$ に対応する．一方直観主義論理は偽ブール代数に対応している．位相を導入することにより，偽ブール代数の性質が再定義可能であることから，直観主義論理の意味論を，様相論理体系 $S4$ を用いて構成することが可能である．

これは，以下のような考え方に基づく[33]．すなわち，理想的数学者の行動を世界の推移と考え，世界の推移するごとに情報が蓄積されていくものと考える．その推移は半順序的であり必ずしも線形である必要はない．理想的数学者は，たとえば $A\to B$ が真であることを世界 w においていかに知るかというと，それは w を含むすべての将来の世界において，A が真であることが分かったならば B も真であることが分かることとする．また，このような考え方により，ϕ を直観主義命題論理の式から真偽に関して等価な S_4 の様相論理式への変換とすると，ϕ は以下のように定義することができる．

$\phi[A] \quad =\Box A$ （A が命題変数のとき）

$\phi[A\wedge B]=\phi[A]\wedge\phi[B]$

$\phi[A\vee B]=\phi[A]\vee\phi[B]$

$\phi[A\to B]=\Box(\phi[A]\to\phi[B])$

$\phi[\neg A] \quad =\Box\neg\phi[A]$

定理 5.1

直観主義論理式 A が定理であるための必要十分条件は，$\phi[A]$ が恒真であることである．

（例 5.1）

この定義に従えば，たとえば，排中律が直観主義の体系に矛盾しないことは，いかなる A についても，式 $\neg\neg(A\vee\neg A)$ が，定理であることが，ϕ による変換によって，$S4$ において示されれば良い．

$$
\begin{aligned}
\phi(\neg\neg(A\vee\neg A)) &= \Box(\neg\phi(\neg(A\vee\neg A)))\\
&= \Box(\neg\Box\neg\phi(A\vee\neg A))\\
&= \Box(\neg\Box\neg(\phi(A)\vee\phi(\neg A))\\
&= \Box(\Diamond(\Box A\vee\Box\neg\phi[A]))\\
&= \Box(\Diamond(\Box A\vee\Box\neg\Box A))
\end{aligned}
$$

この式の否定を取ると，$\Diamond(\Box(\Diamond\neg A\wedge\Diamond\Box A))$

$$
\begin{aligned}
&= \Diamond(\Box\Diamond\neg A\wedge\Box\Diamond\Box A)\\
&\to \Diamond(\Box\Box\Diamond\neg A\wedge\Box\Diamond\Box A)\\
&\qquad [A_4\text{: 推移律より}]\\
&= \Diamond\Box(\neg\Diamond\Box A\wedge\Diamond\Box A)
\end{aligned}
$$

括弧の中は充足不能である．

一般に古典的では恒真であるが，直観主義論理では一般に成立しない式 P について，$\neg\neg P$ は直観主義論理の定理である．

5.2 直観主義様相論理

さて，上で述べた考え方を様相論理自身に適用することにより，直観主義の様相論理を定義することも可能となる．これは通常の直観主義論理にさらに様相概

念を加えたときに，$\neg\Box A\to\Diamond\neg A$ が一般的には成立しないような論理である[34]．この論理の具体的な応用はまだ定かではないが，制御プログラムをイベントの発生順に関する制約記述である仕様から，証明によって得ようとするときなどに有効な論理であろう．直観主義論理が $S4$ で定式化可能であることから分かるように，直観主義様相の定式化には，世界間の到達可能関係として，直観主義のためと，様相を表すための二つの関係を導入する必要がある．そしてこれらの関係は独立ではない．

写像 ϕ を直観主義様相論理の上に拡張しよう．

$$\phi[\Diamond A]=\blacklozenge\phi[A]$$

$$\phi[\Box A]=\Box\blacksquare\phi[A]$$

（例2）

$$\begin{aligned}\phi[\Diamond\neg A\to\neg\Box A]&=\Box(\phi[\Diamond\neg A]\to\phi[\neg\Box A])\\&=\Box(\blacklozenge\phi[\neg A]\to\Box\neg\phi[\Box A])\\&=\Box(\blacklozenge\Box\neg\phi[A]\\&\quad\to\Box\neg\Box\blacksquare\phi[A])\\&=\Box(\blacklozenge\Box\neg\Box A\\&\quad\to\Box\neg\Box\blacksquare\Box A)\\&=\Box(\blacksquare\Diamond\Box A\vee\Box\Diamond\blacklozenge\Diamond\neg A)\end{aligned}$$

ここで，$\blacklozenge$や$\blacksquare$は，直観主義を表すための $S4$ の様相記号$\Diamond$，$\Box$と区別するために導入された直観主義様相論理の様相記号に対応した様相記号である．ϕ で変換された式の解釈のためのモデルで用いられる世界の間には，二つの関係 R, I が存在し，R は$\blacklozenge$，$\blacksquare$を解釈するために，I は$\Diamond$，$\Box$の解釈に用いられ，反射律，推移律を満たす．R は，直観主義様相論理の体系を反映した性質をもつ．R と I の関係は独立ではなく，たとえば以下のような関係をもつ．

1. $\forall w\forall w'\forall v(wIw'\wedge wRv\to\exists v'(w'Rv'\wedge vIv'))$

これと，情報の蓄積の仮定より，以下の公理が導かれる．

$$\blacklozenge\Box p\to\Box\blacklozenge p \tag{5.1}$$

同様に，

2. $\forall w\forall w'\forall v'(wIw'\wedge w'Rv'\to\exists v(wRv\wedge vIv'))$

$$\Diamond\blacklozenge p\to\blacklozenge\Diamond p \tag{5.2}$$

3. $\forall w\forall v'\forall v(vIv'\wedge wRv\to\exists w'(w'Rv'\wedge wIw'))$

$$\blacklozenge\Diamond p\to\Diamond\blacklozenge p \tag{5.3}$$

（例3）

例2の式が真であることは，ϕ で変換された式が恒真であることにより，以下のように示される．否定をとることにより，

$$\Diamond(\blacklozenge\Box\Diamond\neg A\wedge\Diamond\Box\blacksquare\Box A)$$

括弧の中の左辺は，

$$\begin{aligned}&\blacklozenge\Box\Diamond\neg A\\&\to\Box\blacklozenge\Diamond\neg A\quad[5.1\text{ より}]\\&\to\Box\Box\blacklozenge\Diamond\neg A\quad[A_4\text{ 推移律より}]\\&\to\Box\Diamond\blacklozenge\Diamond\neg A\quad[A_7\text{ 連鎖律より}]\\&=\neg\Diamond\Box\blacksquare\Box A\end{aligned}$$

であるから充足不能．よって例2の式は真．

直観主義様相論理式，$\neg\Box A\to\Diamond\neg A$ が証明できないことも容易に確かめられる．

以上が直観主義 K システムの定義であるが，他のシステムたとえば直観主義の T システムについては，どのような公理が必要であろうか．古典様相論理では，等価であった二つの公理，$\Box A\to A$ と $A\to\Diamond A$ は，直観主義では等価ではない．したがって，直観主義 T システムとしては，$\Box\blacksquare p\to p$ を加えたシステム $T_\Box$，及び $\Box p\to\blacklozenge p$ を加えたシステム $T_\Diamond$ が考えられる．

一般に直観主義様相論理の公理として，$\Diamond^k\Box^l A\to\Box^m\Diamond^n A$（$G^{k,l,m,n}$ スキーマ[13]）を加えた場合，翻訳された古典様相論理について以下が成立する．

定理 5.2

$\Diamond^k\Box^l A\to\Box^m\Diamond^n A$ の型の直観主義様相論理式を公理とする体系の定理を，ϕ によって変換した式を満たすモデルは，以下の条件を満たす．

$$\forall w\forall u\forall v(wR^k u\wedge wR^m v\to\exists u'\exists x(uIu'\wedge u'R^l x\wedge vR^n x))$$

したがって，このような公理をもつ直観主義様相論理は，T の場合と同様にノンホモジニアスでインタラクティブな古典的様相論理で表現される．

5.3 様相論理と非単調論理

非単調論理の概念は，一つの様相である．非単調論理にはさまざまな種類があるが，その中のいくつかの基本概念は様相論理の枠組みの中で説明することができる．たとえば，McDermott と Doyle の提案による，初期の非単調論理[35]では，以下のような様相オペレータが導入された．すなわち，$M(p)$ の解釈として，p が矛盾を導かないこととする．このとき，$M(p)\to p$ を標準ディフォールトと呼ぶ．

$M(p)$ の意味を直観主義論理的にとらえると，前述の写像 ϕ を拡張することによって，その意味は以下のように定義される[36]．

$$\phi[M(p)]=\neg\phi[\neg p]=\neg\Box\neg\phi[p]=\Diamond\phi[p]$$

すると，

$$\begin{aligned}\phi[M(A)\to A]&=\Box(\phi[M(A)]\to\phi[A])\\&=\Box(\Diamond\phi[A]\to\phi[A])\\&=\Box(\Box\neg\phi[A]\vee\phi[A])\end{aligned}$$

$$=\Box(\Box\neg\Box A\vee\Box A)$$
$$=\Box(\Diamond\Box A\to\Box A)$$

これは，ユークリッド律にほかならない．(括弧の中は直観主義論理式 $A\vee\neg A$ の変換に等しいことに注意.) したがって，定理 2.1 の(3)より標準ディフォールトを認めるということは，$S5$ の体系で考えるということになる．この方法によれば，35)の場合と違って，$\{M(A)\to B,\neg B\}$ から，$\neg A$ が導けるという自然な性質をもっていることは，簡単に確かめられる．

5.4 様相論理と自己認識論理

自己認識論理[14]は，自分自身の信念を形式化したものであり，信念 (belief) の論理とも呼ばれる．信念の基となる．前提 (premise) の増加にしたがって，必ずしも信念が増加しないために，これは非単調論理となっている．命題 p を信じていることを，$B(p)$ と表すとすると，その意味は，前提の集合 T が与えられたとき，$B(p)$ が真であるのは，p が T の要素であるときのみとする．T がその論理的帰結をすべて含み，また $B(p)$ が真であれば，T は $B(p)$ を含み，そうでなければ，T は $\neg B(p)$ を含むとき，自己認識理論は安定 (stable)[37] といわれる．この仮定は必ずしも現実的世界を想定していないが，そうすることによって様相論理 $S5$ との単純な対応が付けられる．すなわち，B を□と解釈すればよい．ここでの B を前述の非単調論理における M の双対，$B(p)=\neg M(\neg P)$ と考えることは自然である．この意味でこの論理は前述の非単調論理と関係が深いが微妙な相違がある[38]．この他にもさまざまな非単調論理が存在するが[39]，これらを様相論理の上で比較することにより，その相違を明確に理解することが可能となる．

5.5 様相論理と多値論理

可能性や必然性を表現する様相命題を記号論理の中で表すために，Lukasiewicz, J. は，真でも偽でもない第三の真理値を導入し，いわゆる 3 値論理を提案した．これはいわゆる多値論理へと拡張されるが，ここでは単純な 3 値の場合について考えよう．

真理値として $\{0,m,1\}$ を考え，まず以下の表のように基本演算を定義する．

p	$\neg p$
0	1
m	m
1	0

$$p\wedge q=\begin{cases}0 & p,q\ \text{のいずれかが 0 のとき}\\ 1 & p,q\ \text{がともに 1 のとき}\\ m & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

$p\vee q=\neg(\neg p\wedge\neg q)$ とする．

すると，$\neg\neg p=p$ であるとことは，容易に確かめられる．

多値論理の場合，否定の解釈として，以下のようなより強い解釈を与えることも可能である．すなわち，

p	$\sim p$
0	1
m	0
1	0

$p\to q=\neg p\vee q$ とするとき，$\sim p\to\neg p, p\to\sim\sim p$ となる．したがってこれは p を真と仮定すると矛盾が生じることが示せるという，直観主義における否定に近い意味をもつ．以前述べたように，直観主義の否定は様相論理では $\phi[\neg A]=\Box\neg\phi[A]$ のように解釈されるから，各様相オペレータを以下のように定義することが考えられる．

$\Box A=\sim\neg A$

$\Diamond A=\neg\sim A$

これらの値は，以下のようになり，

p	$\neg p$	$\sim p$	$\neg\sim p(=\Diamond p)$	$\sim\neg p(=\Box p)$
0	1	1	0	0
m	m	0	1	0
1	0	0	1	1

$\Box\neg p=\neg\Diamond p$, $\Diamond(p\vee q)=\Diamond p\vee\Diamond q$ を満たすことは，容易に分かる．

6. 今後の展望

様相論理は，クリプケの可能世界モデルに基づく単純な意味論をもつに拘らず，豊富な事象の表現が可能である．それは，可能世界の到達可能関係というものの見方が普遍的であることを物語っている．

様相論理の機械的処理は，古典的論理のそれに比べて複雑であるが，統一的な方法が存在し，また複雑さの問題も応用の範囲を限定することにより，実用的なクラスを与えることも可能であろう．ソフトウェアの検証や論理型言語に様相論理を実際的に用いることが試みられているが[40]，より多くの問題，特にその起源となす自然言語の意味処理に実際的に用いられることが望まれる．

一方，カテゴリ理論と構成的数学とは，トポスが高階の直観主義論理と対応しているといった点で関係が深い．また直観主義が様相概念と関係が深いことも述べてきたとおりであるが，クリプケ流の解釈がトポスへのカテゴリカルな解釈の特殊なものであることが分

かっている[41]. またプログラム合成のための有力な基礎であるタイプ理論は構成的数学を基にしており，これらの間の関係を整理する基礎的研究にも期待するところが大きい.

参　考　文　献

1) Hughes, G. E. and Cresswell, M. J.: An Introduction to Modal Logic, Methuen, London. (1968). 三浦 聰, 大浜茂生, 春藤修二訳：様相論理入門, 恒星社厚生閣 (1981).
2) Barcan, R. C.: A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication, JSL Vol. 11, pp. 1-16 (1946).
3) Kripke, S. A.: A Completeness Theorem in Modal Logic, JSL Vol. 24, pp. 1-14 (1959).
4) Hintikka, K. J. J.: Modality and quantification, Theoria Vol. 27, pp. 110-128 (1961).
5) Montague, R.: Syntactical Treatments of Modality. Acta Philosophica Fennica; Modal and Many-valued Logics pp. 153-166 (1963).
6) Pratt, V. R.: Semantical Considerations on Floyd-Hoare logic. Proc. IEEE FOCS 17, pp. 109-121 (1976).
7) Harel, D.: First Order Dynamic Logic, Lecture Notes in Computer science, No. 68 (1979).
8) Pnueli, A.: The Temporal Semantics of Concurrent Programs, 18th Symp. on Theoretical Foundation of Computer Science (1977).
9) Montague, R.: Proper Treatment of Quantification in Ordinary English, in Thompson (ed.): Formal Philosophy, Yale University, pp. 247-270 (1974).
10) McCarthy, J. and Hayes, P.: Some Pilosophical Problems from the Stand Point of Artificial Intelligence, in Machine Intelligence 4 (ed. D. Michie), American Elsevier, pp. 463-502 (1989).
11) 様相論理： 数理科学, サイエンス社, No. 5 (1986).
12) 堂下修二, 西田豊明他：様相論理とその情報処理への応用(I), (II), (III), 情報処理, Vol. 29, No. 1-No. 3 (1988).
13) Chellas, B. F.: Modal Logic: An Introduction, Cambridge University Press (1980).
14) Moore, R. C.: Possible-world Semantics for Autoepistemic Logic, Proc. workshop on Nonmonotonic Reasoning, Mohank Mountain House, New Paltz, New York, pp. 344-354 (1984).
15) 沢村 一：算法論理, 情報処理, Vol. 20, No. 8 (1979).
16) Catach, L.: Nomal Multimodal Logic, Proc. of AAAI, pp. 491-495 (1988).
17) Reif, J. and Sistla, A. P.: A Multiprocess Network Logic with Temporal and Spatial Modalities, JCSS, Vol. 30, No. 1, pp. 41-53 (1985).
18) Sato, M.: A Study of Kripke-Style Methods of Some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method, Publications Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 13: 2 (1977).
19) Enjalbert, P.: Many-Sorted Temporal Logic for Multi-Processes Systems, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, pp. 273-281, No. 176 (1984).
20) Fitting, M.: Tableau Methods of Proof for Modal Logics, Notre Dame Jounal of Formal Logic, Volume XIII, No. 2, pp. 237-247 (1972).
21) Fitting, M.: First-Order Modal Tableaux, Journal of Automated Reasoning, Kluwer Academic Publishers, 4 191-213 (1988).
22) Wallen, L.: Matrix Proof Methods for Modal Logics, Proc. of 10th IJCAI, Los Altos, CA: Morgan Kaufmann, pp. 917-923 (1987).
23) 米崎直樹：様相論理証明器の一般化, 第3回大会論文集, 日本ソフトウェア科学会, D-5-1 (1986).
24) Jackson, P. and Reichgelt, H.: A General Proof Method for Modal Predicate Logic without the Barcan Formula, Proc. of AAAI, pp. 177-181 (1988).
25) Adadi, M. and Manna, Z.: A Timely Resolution, Proc. of Symposium on Logic in Computer Science, pp. 176-186 (1986).
26) Konolige, K.: Resolution and Quantified Epistemic Logics, J. H. Siekmann (ed.) Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Vol. 230, pp. 199-230 (1986).
27) Stikel, M. E.: Automated Deduction by Theory Resolution, Journal of Automated Reasoning, Vol. 1, pp. 333-355 (1985).
28) Ladoner, R. E.: The Computational Complexity of Provability in Systems of Modal Propositional Logic, Siam Journal on Computing, Vol. 6, No. 3, pp. 467-480 (1977).
29) Halpern, J. Y.: A Guide to the Modal Logics of Knowledge and Belief: Preliminary Draft, Proc. of IJCAI, pp. 480-490 (1985).
30) Moszkowski, B.: Reasoning about Digital Circuit, STAN-CS-83-970 (1983).
31) 松本一教, 内平直志, 本位田真一：時相論理とその応用, 情報処理, Vol. 30, No. 6 (1989).
32) van Dalen, D.: Intuitionstic Logic. Philosophical Logic, Vol. III, D. M. Gabbay, F. Guenther eds., Reidel. Dordrecht (1988).
33) Gödel, K.: Eine Interpretation des Intuitionistichen Aussagenkalkuls, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 4, pp. 39-40

(1932).
34) Bull, R.: A Modal Extension of Intuitionistic Logic, Notre Dame Jounal of Formal Logic, pp. 142-146 (1965).
35) McDermott, D. and J/Doyle: Non-Monotonic Logic I, Artificial Intelligence, Vol. 13, pp. 41-72 (1980).
36) Clarke, M.R.B. and Gabbey, D.M.: An Intuitionistic Basis for Non-Monotonic Reasoning, Non-Standard Logic for Automated Reasoning, P. Smets etc. eds. Academic Press (1988).
37) Stalnaker, R.: A Note on Non-Monotonic Modal Logic, Dept. Philosophy, Cornell Univ. (1980).
38) Moore, R.C.: Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic, Artificial Intelligence 25, pp. 75-94 (1985).
39) McDermott, D.: Nonmonotonic Logic II: Nonmonotonic Modal Theories, J. ACM 29, pp. 33-57 (1982).
40) 斎藤信男, 米崎直樹：ソフトウェアの検証, ソフトウェア工学ハンドブック（榎本肇編）オーム社, pp. 177-221 (1986).
41) Goldblatt, R.: Topoi, The Categorical Analysis of Logic, North-Holland (1979).
42) Halpern, J.Y., Vardi, M.Y.: The Complexity of Reasoning about Knowledge and Time: Extended abstract, Proc. of 8th ACM Symp. on Th. of Comp. pp. 304-315 (1986).

(平成元年5月1日受付)