解　説

# 非標準論理の現状とその展望†

小　野　寛　晰††

## 1. はじめに

最近ある数学の専門誌の書評欄を眺めていたら，つぎのような一文が目にとまった.「論理について現在何がおこなわれているかを知りたかったら，計算機の理論に関するシリーズの中にある概説記事を読むのがよい.」もちろん，これは半分は評者の冗談なのだろうが，筆者もここ数年間の論理学と計算機科学の急速な接近には目を見張らされる．今回の特集のテーマである非標準論理——普通は**非古典論理** (nonclassical logic) とよぶので，以下この言い方を採用する——にしても，従来は可能性という意味で議論されることが多く，したがって一般的には論理の研究者の興味の対象にとどまっていたものである.

非古典論理とは，普通に数学で用いられる論理を**古典論理** (classical logic) というのに対し，それ以外の論理に対する総称である．非古典論理は

1)　古典論理の立場そのものへの批判

2)　日常に用いられている推論により近い形での論理の形式化

などが，その研究の出発点になっている．1)としては直観主義論理，2)としては様相論理や適切さの論理を例としてあげることができる．したがって初期の研究は，主として特定の非古典論理について，その形式化の妥当性を検討しその論理的性質を調べることが中心であった．しかし，セマンティクスに関するその後の研究——とくに代数的手法と Kripke の方法——の進展は，個々の論理に関する研究から論理のクラスについての研究の発展を促した．このような研究においては，論理やそのモデルのもつ諸性質——たとえば決定可能性とか有限公理化可能性など——が興味の中心になり，個々の論理はいわば一つの数学的対象として扱われるようになってきている.

これに対し，最近のプログラム言語や人工知能の研究の中で論理の重要性についての認識が深まり，いくつかの非古典論理は単なる可能性としての論理としてではなく，より現実的な意味をもち得る論理として注目されるようになってきている.

その意味で，数理論理学の研究は現在一つの大きな転回点を迎えているといえる．そしてこのような動きは数理論理学の研究に対しても多大な影響をもたらすに違いない.

以下では，非古典論理の基本的な考え方や手法，さらに最近の研究の方向などについて述べる．計算機科学との関連については他の解説に委ねることにし，ここではもっぱら数理論理学の立場からみて重要と思われる事柄について述べる．**2.** から **4.** までは代表的な非古典論理の紹介にあてる．**5.** では非古典論理のセマンティクスに関する話題を述べる．**6.** では，最近の話題の一つである構造規則と論理との関係，およびその研究が目指すものについての紹介を行う．文末にあげた文献は，オリジナルなものよりむしろその分野の研究の動向や文献を知る上で有用と思われるものを中心にあげておいた.

## 2. 直観主義論理

Russell のパラドクスなどに端を発した今世紀初頭のいわゆる「数学の危機」に際し，Brouwer は直観主義の立場をとなえ従来の数学の考え方を批判した．彼は，数学の対象は人間の思考が構成するものであり，したがって数学の対象がもつ性質の証明は構成的な手続のみを用いて行わなければならないと主張した．これは，数学者が一般に抱いている素朴な実在論に真向から対立するものであった.

直観主義の考え方を説明するためにつぎの命題をとりあげてみよう.

（1）　無理数の中で，その$\sqrt{2}$乗が有理数となるものが存在する.

† Nonclassical Logics—An Overview by Hiroakira ONO (Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University).
†† 広島大学総合科学部

つぎの(2)は(1)に対する一つの証明である.

(2) $\sqrt{2}$は無理数である. $\sqrt{2}$の$\sqrt{2}$乗を$a$とおく. もし$a$が有理数ならば, $\sqrt{2}$が求める数となる. $a$が無理数ならば, $a$の$\sqrt{2}$乗は$\sqrt{2}$の2乗, すなわち2だから, $a$が求める数となる.

(2)は通常の数学では正しい証明とみなされる. しかし, (2)の証明からは求める無理数がなんであるか, すなわち $\sqrt{2}$ なのか $a$ なのか, についてなにも情報は得られない. 直観主義の立場では, 実際に(1)をみたす無理数を見いだす手続を与えないかぎり (1)が証明されたとはみなさない. (2)は単に

(3) すべての無理数の$\sqrt{2}$乗が無理数であると仮定すると矛盾が生ずる

ことの証明にすぎないと考えるのである.

Brouwer の考え方は, これまで得られた数学の成果の多くを否定するものであり, また彼の主張が難解だったことも手伝って, 多くの数学者の支持を得ることはできなかった.

Heyting は1920年代末に, 直観主義の論理的な部分の形式化を与え, 直観主義の論理的側面を明確にした. これが現在, 直観主義論理とよばれるものである. 直観主義論理においては二重否定の法則 $\neg\neg\varphi\supset\varphi$ や排中律 $\varphi\vee\neg\varphi$ は一般的には証明できない. 上の(2)の証明の中で, $a$ は有理数かまたは有理数でないか (すなわち, 無理数であるか) のいずれかであるということが用いられていることを注意しておこう. 上の二つの論理式のいずれかを公理として直観主義論理につけ加えると古典論理の体系が得られる.

直観主義の形式体系としては Gentzen の自然演繹体系 (natural deduction) や sequent calculus によるものがよく知られている. またセマンティクスとしては, Heyting 代数を用いる代数的セマンティクスと Kripke によるセマンティクスがある. ここで $\mathbf{A}=(\mathrm{A}, \cap, \cup, \supset, 1, 0)$ が **Heyting 代数**であるとは, $(\mathrm{A}, \cap, \cup)$ が最大元1, 最小元0をもつ分配束で, さらに任意の $x, y, z\in\mathrm{A}$ に対し

$$x\cap z\leqq y \Leftrightarrow z\leqq x\supset y$$

がなりたつことをいう. $x\supset 0$ を $x'$ と表すことにする. $x\cup x'=1$ がすべての $x\in\mathrm{A}$ に対してなりたつような Heyting 代数 $\mathbf{A}$ はちょうど **Boole 代数**になる. 命題変数全体の集合から A への写像は, $\mathbf{A}$ 上の付値といわれる. $f$ が $\mathbf{A}$ 上の付値であるとき, $f$ は命題論理の論理式全体の集合からAへの写像に, つぎのようにして拡張される.

$$f(\varphi\wedge\phi)=f(\varphi)\cap f(\phi),$$
$$f(\varphi\vee\phi)=f(\varphi)\cup f(\phi),$$
$$f(\varphi\supset\phi)=f(\varphi)\supset f(\phi),$$
$$f(\neg\varphi)=f(\varphi)'.$$

$\mathbf{A}$ 上の任意の付値 $f$ に対して $f(\varphi)=1$ となるとき, 論理式 $\varphi$ は $\mathbf{A}$ で**恒真**であるという. どんな Heyting 代数においても恒真であるような論理式は, 直観主義論理で証明可能であり, またその逆もなりたつことが知られている (直観主義論理の代数的セマンティクスに関する完全性).

直観主義に基づく数学は1960年代末に Bishop によってより明確な観点から**構成的数学** (constructive mathematics) として再構成された. 構成的数学はこれまで解析学や代数学の分野で着実に成果をあげている. それとともに, 構成的な証明は一つの計算手続を与え, またその逆もなりたつという認識の上に立って, プログラムの合成や検証における構成的数学の重要性が明らかにされつつある[1]. 構成的数学と並んで直観主義論理の計算機科学への応用の可能性を示すものとして **Curry-Howard の原理** (または, formulas-as-types の原理) をあげることができる. これはラムダ計算における型づけ (type-assignment) と直観主義論理の自然演繹体系における証明との対応関係を与えるものである[16]. 関数型プログラミング言語の型理論はこの考え方を発展させたものである.

直観主義論理に関する別な観点からのアプローチとしては, トポスと直観主義論理上の理論との対応[13]や, Heyting 代数の値をとる集合論とその中での数学の構築[42]をあげることができる. 文献 48) に van Dalen による直観主義論理に関するすぐれた解説がある.

直観主義論理は古典論理よりも弱い論理だが, これら二つの論理の間に位置する論理を**中間論理**という. 中間論理についての系統的な研究は1950年代に梅沢により始められた. 中間論理の研究の目標は, 直観主義論理や古典論理のもつ論理的ないし意味論的諸性質とそれらの相互関係を一般的な状況設定の下で調べることである. この分野での主要な結果や未解決問題については文献 18), 32) を参照されたい.

## 3. 様相論理とその周辺

様相論理では, 通常の論理演算のほかに「～は必然的である」,「～は可能である」といった様相を表す演算□, ◇がとり扱われる. 様相論理の研究は Aristotle

までさかのぼることができる．彼の論理に関する考察は，もちろん不十分な点もあるが非常に興味深いものがある（Bocheński[2] をみよ．中世における様相概念の研究については Lemmon[25] の序をみよ）．現代的な意味での様相論理の研究は Lewis に始まる．彼は Langford とともに 1932 年に「Symbolic logic」を著し，その中で様相論理の体系 S1 から S5 を導入した．様相論理の Gentzen 流の体系による形式化は，Curry および大西と松本らにより始められた．

以下ではいくつかの代表的な様相論理をとりあげる．$\Diamond\varphi$ は $\neg\Box\neg\varphi$ として定義することができるので，様相に関する論理演算としては□のみを用いることにする．様相論理 K の公理系は，古典論理の公理系に公理として

$$\Box(\varphi\supset\psi)\supset(\Box\varphi\supset\Box\psi)$$

を，推論規則として

$$\vdash\varphi \text{ ならば } \vdash\Box\varphi$$

をつけ加えて得られる．ここで三つの公理を導入する．

(A) $\Box\varphi\supset\varphi$,

(B) $\Box\varphi\supset\Box\Box\varphi$,

(C) $\neg\varphi\supset\Box\neg\Box\varphi$.

K に(A)をつけ加えた体系を T，T に(B)，T に(C)，T に(B)と(C)をつけ加えた体系をそれぞれ S4，B，S5 という．

様相論理に対する代数的セマンティクスは単項演算 I をもつ Boole 代数――**様相代数**という――により与えられる．I は□の解釈を定める．様相論理の体系に応じて，演算 I に対する条件がかわってくる．

Kripke が様相論理のセマンティクスを導入したのは 1960 年代のはじめである．空でない集合 W と W の上の二項関係 R――到達関係という――の組 $\langle W, R\rangle$ を **Kripke 構造**という．R についての条件として

(a) $xRx$（反射律）

(b) $xRy$ かつ $yRz$ ならば $xRz$（推移律）

(c) $xRy$ ならば $yRx$（対称律）

をとる．各 Kripke 構造を新たに K-構造とよび，(a)をみたす K-構造を T-構造という．T-構造においてさらに(b)，(c)，(b)と(c)がなりたつとき，それらをそれぞれ S4-構造，B-構造，S5-構造という．

各命題変数に対し，W の部分集合を対応させる写像 V を $\langle W, R\rangle$ 上の付値という．V はつぎのようにして W の要素と論理式との間の関係⊨を一意的に定める．（以下では V と⊨とを同一視し，⊨も付値という．）

$a\models p \Leftrightarrow a\in V(p)$（$p$ は命題変数），

$a\models\neg\varphi \Leftrightarrow a\models\varphi$ でない，

$a\models\varphi\wedge\psi \Leftrightarrow a\models\varphi$ かつ $a\models\psi$,

$a\models\Box\varphi \Leftrightarrow aRb$ となるすべての $b$ について $b\models\varphi$.

（$\varphi\vee\psi$，$\varphi\supset\psi$ はそれぞれ $\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$，$\neg\varphi\vee\psi$ により定義する．）このとき，明らかに

$a\models\Diamond\varphi \Leftrightarrow aRb$ となるある $b$ について $b\models\varphi$

となる．Kripke 構造 $\langle W, R\rangle$ 上の任意の付値⊨および任意の $a(\in W)$ に対し $a\models\varphi$ となるとき，$\varphi$ は $\langle W, R\rangle$ で恒真であるという．L を K，T，S4，B，S5 のいずれかとしたとき，どんな L-構造においても恒真である論理式は論理 L で証明可能であり，またその逆もなりたつことが知られている（Kripke 型のセマンティクスに関する完全性）．

W の要素はしばしば可能世界（possible world）といわれる．そのことから Kripke 型のセマンティクスのことは**可能世界意味論**といわれる．

Jonsson-Tarski の論文 20) では一般の様相代数についての議論が行われている．この論文では様相論理との関係は明示的な形では述べられていないが，内容的には S4-構造や S5-構造と S4 や S5 に対する様相代数との関係などの基本的な性質が証明されている．

Kripke 構造を用いたセマンティクスでは，$a$ という世界で「$\varphi$ が必然的である」ことが真になるのは $a$ から「到達できる」どんな世界でも $\varphi$ が真であることとして定義されている．これは，われわれが必然性に対していだいているイメージ――すなわち，どんな場面や状況においてもなりたつこと――をよく反映している．これが Kripke のセマンティクスが成功を収めた一つの大きな理由であろう．われわれがどんな場面や状況を考慮するかは到達関係に対する条件を規定することとして表現される．上に述べた□についての仮定(A)，(B)，(C)と R についての条件(a)，(b)，(c)の対応関係は，より一般的な形に拡張することができる．この対応関係の研究は Lemmon[25] や Segerberg[37] に始まり，現在は**対応理論**（correspondence theory）という名前でよばれる研究テーマになっている[46]．

直観主義論理と様相論理の対応関係を示す一つの結果として **McKinsey-Tarski の対応**がある[29]．いま直観主義命題の論理式 $\varphi$ に対し様相命題論理の論理式 $T(\varphi)$ をつぎのように定義する．

$T(p)=\Box p$（$p$ は命題変数），

$T(\varphi*\psi)=T(\varphi)*T(\psi)$（$*$ は $\wedge$ か $\vee$），

$T(\varphi \supset \psi) = \Box(T(\varphi) \supset T(\psi))$,

$T(\neg\varphi) = \Box\neg T(\varphi)$.

このとき，つぎのことが証明できる．

直観主義論理の任意の論理式 $\varphi$ に対し，$\varphi$ が直観主義論理で証明可能なとき，またそのときのみ $T(\varphi)$ は S4 で証明可能である．

近年では古典論理の上の様相論理のほかに，直観主義論理やもっと弱い論理の上の様相論理も研究されるようになってきている[31]．また様相論理に等号や量化を導入する際に生ずる問題点は，Frege，Russell，Quine, Kripke などが主として哲学的な立場からの議論を行っている[26]が，ここではこの問題には立ち入らない．様相論理に関する基本的な文献としては 3)，19)，37) がある．

Kripke 構造 ⟨W, R⟩ として，とくにWを（可能な）時点の集まり，Rを時間の前後関係＜とする．このとき $\Diamond\varphi$ は「いつか $\varphi$ がなりたつであろう」ということを意味することになる．Rとして逆の関係＞をとれば，この場合には $\Diamond\varphi$ は「過去において $\varphi$ がなりたった(ことがある)」ということを意味することになる．これらのことは，日常文に現れる時制についての論理的分析に様相論理の手法が有効に用いられ得ることを示唆している．

時制や時間を扱う**時制論理** (tense logic, temporal logic) の研究は Prior などにより始められた[35]．普通は二種類の演算 F と P が用いられる．$F\varphi$ は「いつか $\varphi$ がなりたつであろう」ということを，また $P\varphi$ は「過去に $\varphi$ がなりたったことがある」ということを表す．時点の集まりであるWの構造についてはいろいろな考え方が可能である．つまり，時制に含まれる時間をどう捉えるか，たとえば物理的な時間なのか心理的な時間なのか，連続的か離散的か，決定論的な，したがって線形なものなのか，それとも非決定論的な枝分れをしたものなのか，などについてさまざまな選択が考えられる．これらの問題については，文献 4)，28)，45) を参照されたい．なお，時制論理は現在プログラム理論において並列プログラムの正当性の検証などに応用されている．

「$\varphi$ を知っている」，「$\varphi$ を信じている」ということをそれぞれ $K\varphi$，$B\varphi$ と表すと，演算KやBは必然性を表す□と共通な性質をもつことが分かる．たとえば前に述べた公理(A)，(B)は□を K でおきかえると，それぞれ「知っていることは（現実に）正しい」，「あることを知っているならば，それを知っているということを知っている」と解釈されるから，正しい命題と考えることができる．Lemmon によれば，K や B と□との類似性は中世から指摘されていたようである[25]．現代的な立場からの研究は，von Wright や Hintikka により始められ，**知識と信念の論理**という名前でよばれている[17]．知識と信念の論理については，哲学や人工知能研究はもとより，経済学やゲームの理論からも研究が行われている[14]．

このほか，様相演算と同様な振舞を示す演算を扱う論理としては，プログラム理論に関係した**動的論理** (dynamic logic)[15] や，**証明可能性の論理** (provability logic)[40] などをあげることができる．前者においては，プログラム $\alpha$ に対し $[\alpha]\varphi$ は「$\alpha$ の実行後 $\varphi$ がなりたつ」ことを表す．また後者においては，$\Box\varphi$ は「$\varphi$ はあたえられた形式体系――たとえば一階の Peano の自然数論の体系――で証明可能である」ことを表す．また Girard が**線形論理** (linear logic) の論文[11]において導入した of course や why not とよばれる演算もやはり一種の様相演算とみなすことができる．今後はこのような個々の演算についての研究とともに，文献 20) で展開されたような単項演算の一般論という立場からの様相論理の研究も行われるであろう．

## 4. そのほかの非古典論理

### 4.1 多値論理

古典論理では，それぞれの命題は真と偽の二つの真理値のいずれかの値をとるものと考えている．これに対し，真偽以外の真理値（場合によっては無数の真理値）を許す論理を一般に**多値論理**という．多値論理の創始者である Łukasiewicz にとって，多値論理の研究は数学的な興味というよりはむしろ古典論理のもつ決定論的な世界観に対する挑戦であった[44]．彼は「可能性」を意味する第三の値を導入し，それを用いて真理値による様相概念の説明を与えようとした．その後，彼は $n$ 値や無限値の多値論理を導入した．Post や Bochvar は Łukasiewicz とは異なる考え方に基づいて別のタイプの多値論理を導入している．

多値論理についてはいろいろな角度からの研究がある．その一つは 0，1 の二つの値の代わりに $n$ 個の値をとるような論理回路の研究である．また現在盛んに研究が行われている**ファジィ論理**も，その論理学的な側面に限れば一種の多値論理とみなされる．

多値論理の Kripke 型のセマンティクスに関しては，Urquhart や Scott による研究がある[44]．また古森は代数的手法を用いて Łukasiewicz の無限値論理より強いような論理全体に対する完全な特徴づけを与えている[22]．

### 4.2 適切さの論理

**適切さの論理** (relevance logic) は，古典論理における含意についての批判から出発した．古典論理では $\varphi \supset \psi$ が真であるのは，$\varphi$ が偽か $\psi$ が真のときに限られる．この含意を**実質的含意** (material implication) という．これに対し日常における含意では，$\varphi \supset \psi$ は $\varphi$ と $\psi$ の間に原因と結果といった因果関係が存在する場合に用いられるのが普通である．したがって，「1=2 ならば明日は雪が降る」といった $\varphi$ と $\psi$ が無関係な命題の真偽をうんぬんすることはない．

実質的含意が日常的な含意といろいろな点で食い違うことから，日常的な含意を形式化する試みが行われてきた．たとえば Lewis は日常的な意味での含意「$\varphi$ ならば $\psi$」を $\Box(\varphi \supset \psi)$ により定義し，これを**厳密含意** (strict implication) とよんだ．

適切さの論理も同じく実質的含意に対する批判から出発している．1950年代の中頃，Ackermann は「if $\varphi$ then $\psi$」は $\varphi$ が $\psi$ と適切にしかも必然的に結びつくときにのみ真になるとした．したがって，矛盾からすべてを導くことや，無関係な仮定をつけ加えた含意――たとえば，$\varphi \supset (\psi \supset \varphi)$――は適切な含意とはみなさない．

もちろん，なにが適切であるかは意見が分かれるところである．「適切さ」を巡ってさまざまな議論と形式化の試みが行われてきた．しかしその形式体系としての表し方が必ずしも適当な形でなかったため，適切さの論理の内容を必要以上に分かりにくいものにしていた面がある．適切さの論理に対する Kripke 型のセマンティクスについては Urquhart, Routley と Meyer および Fine による研究がある[8]．

### 4.3 量子論理

これまで述べてきた非古典論理とは違うタイプの論理として**量子論理**がある．量子論理は量子力学における時空に関する記述の間の論理的な関係を形式化したものである．代数的には，与えられたヒルベルト空間 **H** の閉部分空間全体のなす orthomodular 束 C(**H**) として捉えることができる．この場合，C(**H**) の各要素は量子論的な命題とみなされる．与えられた C(**H**) の要素 $X$ と状態 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が $X$ にも $X$ の orthocomplement にも属さないということが起こりうる．論理の言葉で言いかえるとこれは排中律がなりたたないことに相当する．量子論理では分配法則もなりたたない．これは二つの命題 $X$ と $Y$ に対し，$X \vee Y$ が真であっても $X$ も $Y$ も真でないということが起こり得ることによる．量子論理については文献 6) を参照されたい．

### 4.4 日常における推論

われわれが日常において行っている推論は，われわれがおかれている状況についての不完全な知識や情報に基づいてなされる．知識は時間に従って変化するものであり，われわれを取り囲む状況は数多くの可能性と予知できない因子を含んでいるから，それを完全に規定することは難しい．さらに，しばしば推論はわれわれのとる行動の選択と結びついているため，たとえ不十分な推論であっても結論を出さざるを得ないことも多い．したがって，日常における推論には推測とか判断といった要素が含まれることになる．それにもかかわらず，日常における推論にはなんらかの共通性が含まれ，そしてそれはなんらかの意味において合理的であるに違いない．それを明らかにしようとする試みが，主として人工知能研究の立場から**サーカムスクリプション**や**非単調論理**の研究として行われている．これらの論理と知識と信念の論理や帰納的推論との関係を探ることも今後必要であるように思われる．

## 5. 非古典論理のセマンティクスをめぐって

すでに述べたように非古典論理のセマンティクスとしては代数的なセマンティクスと Kripke 型のセマンティクスがある．Kripke 型のセマンティクスに関してはこれまでも簡単にふれてきたので，ここでは代数的なセマンティクスについて少し補足しておく．代数的セマンティクスは1950年代から主としてポーランドを中心に研究が行われていた[36]．ここで論理とそれに対応する代数構造を表にしておく．

| 論　理 | 代数構造 |
|---|---|
| 直観主義論理 | Heyting 代数 |
| 様相論理 | 様相代数 |
| Post の多値論理 | Post 代数 |
| 適切さの論理 | de Morgan monoid |
| 量子論理 | orthomodular 束 |

命題論理の場合には，おのおのの論理に対する **Lindenbaum 代数**というカノニカルな構造をとることにより完全性は容易に示される．また，命題論理の

場合であれば，一般的には与えられた Kripke 構造から対応する代数構造を自然に作り出すことが可能である．このことを様相論理の場合について示しておこう．いま ⟨W, R⟩ を Kripke 構造とする．明らかにWのベキ集合 P(W) は集合演算に関して Boole 代数を作る．また P(W) 上の演算 I をつぎのように定める．Wの任意の部分集合Uに対し

$$IU=\{w\in W ; wRv \text{ となるすべての } v \text{ に対し } v\in U\}.$$

このとき，$(P(W),\ \cap,\ \cup,\ \supset,\ I,\ W,\ \phi)$ を **A** とおくと **A** は様相代数になり，しかも Kripke 構造 ⟨W, R⟩ で恒真である論理式の集合と **A** で恒真である論理式の集合は一致する．この逆――すなわち与えられた代数構造に対し，それと同じ恒真な論理式の集合を定めるような Kripke 構造が存在すること――は一般にはなりたたない．この意味において代数的なセマンティクスの方がより一般的なセマンティクスといえる．もちろん，Kripke 型のセマンティクスは直観的なイメージに近いということや，構造が比較的簡単で扱いやすいという利点をもっている．

命題論理の場合には**普遍代数** (universal algebra) の方法がしばしば有効に用いられる．たとえば，中間論理（または様相論理）全体と Heyting 代数（または様相代数）の **variety** 全体の間には 1 対 1 で上への対応が存在する．ただし，Heyting 代数（または様相代数）のあるクラス C が variety をなすとは，C が部分代数，直積および準同型像に関して閉じていることをいう[5]．普遍代数が有効に用いられた例として Maksimova の結果をあげておこう．論理 L で (Craig 型の) **補間定理**がなりたつとは，$\varphi\supset\psi$ がLで証明可能ならば，$\varphi$ と $\psi$ に共通な命題変数のみからなる論理式 $\theta$ が存在して，$\varphi\supset\theta$ と $\theta\supset\psi$ がともにLで証明可能になることとする．さて，中間論理において補間定理がなりたつことと，その論理に対応する Heyting 代数の variety が amalgamation property という代数的性質をもつことが一致することが示される．このことを用いて Maksimova は非可算個ある中間論理のうち補間定理がなりたつものは，古典論理と直観主義論理を含めちょうど7つだけであるという驚くべき結果を示した[27]．彼女は様相論理に関しても同様な結果を得ている．

上に述べたように，命題論理の場合には一般に代数的なセマンティクスに関する完全性が示される．またよく知られた論理については Kripke 型のセマンティクスに関する完全性が証明されている．それではどんな命題論理についても Kripke 型のセマンティクスに関する完全性が証明できるであろうか．この問題に対し，様相命題論理については Fine[9] と Thomason[43] が，また中間命題論理については Shehtman[38] が否定的な解決を与えた．また中間述語論理の場合には，代数的セマンティクスと Kripke 型のセマンティクスのそれぞれに関して不完全であるような論理の存在を筆者が証明している[30]．このことにより一般的な立場からの述語論理の研究は著しく困難になる．この状況を打開するために，最近 Shehtman らは前層 (presheaf) の概念を用いてこれら二つのセマンティクスを拡張する試みを行っている[39]．

## 6. 論理と構造規則

これまで述べてきた非古典論理の多くはそれぞれに固有な動機や目的意識に基づいて導入されたものである．個々の論理についての研究の重要性はいうまでもないことだが，他方いろいろな非古典論理を共通な枠組の中で眺め直しておくことは，それらの論理の相互関係を知り，それと同時に個々の論理の特性を知る上で重要だと思われる．筆者らや Došen が行ってきた，論理を構造規則との関係で捉えようとする試みもこのような方向の一つの研究である[7),34]．また Girard が 1987 年の論文[11] で導入した線形論理も構造規則を欠いた論理の一つである．以下，構造規則の役割と論理との関係について簡単に紹介しておく．

### 6.1 構造規則

Gentzen は古典論理および直観主義論理に対し，sequent を用いた形式体系 LK と LJ を導入し，cut 除去定理をはじめとして多くの基本的な結果を得た．これらの体系における推論規則は，個々の論理記号に特有な推論規則，cut そして sequent の構造に関する推論規則（構造規則）からなる．ここで構造規則について簡単に説明しておこう．まず，sequent とは

(1) $\varphi_1,\cdots,\varphi_m \rightarrow \psi_1,\cdots,\psi_n$

の形をした表現である．ただし，$\varphi_i$ や $\psi_j$ は論理式とする．上の sequent は内容的には，$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ のすべてを仮定すれば $\psi_1,\cdots,\psi_n$ のいずれかが成立することを意味する．（直観主義論理の体系 LJ では $n\leqq 1$ としておく．）さて古典論理の体系 LK の構造規則はつぎの3種類のものからなる．ただし，$\Gamma$, $\Delta$ 等は有限個の論理式をコンマで区切った列を表す．

(exchange)

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma' \to \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Gamma' \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi, \psi, \Delta'}{\Gamma \to \Delta, \psi, \varphi, \Delta'}$$

(contraction)

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi, \Gamma' \to \Delta}{\Gamma, \varphi, \Gamma' \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi, \varphi, \Delta'}{\Gamma \to \Delta, \varphi, \Delta'}$$

(weakening)

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \to \Delta}{\Gamma, \varphi, \Gamma' \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \Delta'}{\Gamma \to \Delta, \varphi, \Delta'}$$

contraction をもたない論理については1970年代に Grišin が，また近年では筆者と古森が論じている[34]．Girard の線形論理は contraction と weakening をもたない論理である．

構造規則をもたない論理について明確な形で議論を行ったのは Lambek が最初であろう[23]．彼は言語学的な立場からカテゴリ文法 (categorial grammar) における型の変換規則を定める体系としてこのような論理を導入したのであった．この研究を進める中で彼は sequent とカテゴリ（圏）の射との形式的な類似性をもとに，sequent calculus に基づく証明論とカテゴリ論との関係を論じた．たとえば直観主義論理に対応するカテゴリはラムダ計算のモデルの構成に用いられるカルテシアン閉カテゴリである[24),41]．

Lambek によるカテゴリ文法の研究は，最近になって van Benthem や Buszkowski らにより見直され，構造規則やラムダ計算との関連において言語学的な意味での多相型の研究が行われている[47]．

よく知られているように古典述語論理は決定不可能だが，古典論理や直観主義論理から contraction を除いた体系では述語論理でさえも決定可能になる．このような体系における定理自動証明のアルゴリズムを論じたものとしては Ketonen と Weyrauch の研究[21]がある．

contraction か weakening のいずれかを欠いた論理では2種類の論理積や論理和が必要になってくる．つまり，このような論理においては(1)の sequent の左辺と右辺をそれぞれ $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$, $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ と解釈することはできない．それらに代わる役割を果たすのが新しい論理積と論理和である．たとえば新しい論理積⊗についての推論規則はつぎのようになる．

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \to \Delta}{\varphi \otimes \psi, \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi \quad \Sigma \to \Pi, \psi}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi, \varphi \otimes \psi}$$

$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ は証明できるが，contraction がなければ一般に $\varphi \otimes \varphi \equiv \varphi$ は証明できない．もちろん，contraction と weakening の両方があれば $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \otimes \psi$ の同値性が証明できる．

線形論理は contraction も weakening ももたないので，(1)の形の sequent が証明された場合には $\varphi_1$ から $\varphi_m$ までの仮定はその証明において（本質的には）ちょうど一度だけ用いられることになる．そのことから Girard は線形論理を一種の「行為についての論理」として説明している．たとえば，$\varphi$ と $\varphi \supset \psi$ から $\psi$ を導いたとすると，普通の論理では $\psi$ を導いたあとも $\varphi$ は依然としてなりたっていると考える．一方，命題を行為とみなすと，$\varphi$ という行為（たとえば，100円を払う）の結果として $\psi$（キップを手に入れる）が生じた場合，もう一度 $\varphi$ という行為が可能だとは限らない．このことに対応して，線形論理では一般には

$$\varphi, \varphi \supset \psi \to \varphi \otimes \psi$$

は証明できない．しかし

$$\varphi, \varphi, \varphi \supset \psi \to \varphi \otimes \psi$$

(200円あれば，100円と100円のキップとが手に入る）は証明できるのである．Girard は線形論理が遅延評価などの計算のプロセスを説明するのに適していると主張している[12]．これについては今後の検討を待たねばならないだろう．

### 6.2 共通な枠組を求めて

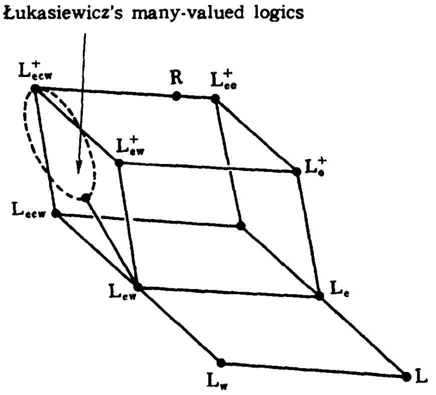
直観主義論理の体系 LJ からすべての構造規則を除いて得られる体系をここではLと表すことにする．また，exchange, contraction, weakening を略してそれぞれ e, c, w と表し，L に e をつけ加えた論理を $L_e$ のように表すことにする．

$L_e$ は Girard が導入した直観主義的線形論理，また $L_{ew}$ はコンビネータとの関係で BCK 論理とよばれている．明らかに $L_{ecw}$ は直観主義論理である．これらのそれぞれに公理として二重否定の法則 $\neg\neg\varphi \supset \varphi$ をつけ加えた論理は，線形論理，Grišin の論理および古典論理に一致する．Łukasiewicz の無限多値論理は $L_{ew}$ より強い論理であり，一方2値論理は古典論理だから，結局 Łukasiewicz の多値論理は $L_{ew}$ と古典論理の間に位置することが分かる．

前に述べたように適切さの論理においては weakening はなりたたない．実際，代表的な適切さの論理である R は $L_{ec}$ に二重否定の法則および分配法則

$$(\theta \wedge (\varphi \vee \psi)) \supset (\theta \wedge \varphi) \vee (\theta \wedge \psi)$$

をつけ加えて得られる論理に等しい．（直観主義論理の体系 LJ から contraction または weakening を取




$L^+_{ecw}$ : classical logic
$L_{ecw}$ : intuitionistic logic
$L^+_{ew}$ : Grišin's logic
$L_{ew}$ : BCK logic
$L^+_{e}$ : Girard's linear logic
$L_{e}$ : Girard's intuitionistic linear logic
R : Anderson-Belnap system of relevant implication

図

り除いた体系では分配法則は証明できない.) 以上のことを整理すると上の図が得られる. ただし $L^+_x$ は論理 $L_x$ に二重否定の法則をつけ加えて得られる論理とする.

論理に対するこのような見方は, シンタクスのみならずセマンティクスに対しても可能である. 文献 34) では, 下半束 (lower semilattice) をなすような順序モノイドを用いた Kripke 型のセマンティクスを導入し, 構造規則を欠いた (直観主義的な) 論理の完全性を証明している. さらに, そのセマンティクスと直観主義論理, Łukasiewicz の多値論理, 適切さの論理などに対する従来の Kripke 型のセマンティクスとの関係を明らかにしている.

このような構造規則のない論理とそのセマンティクスを基礎とすることにより, 多くの非古典論理を共通の枠組の中で語ることが可能になる. これについてのより詳しい解説については文献 33) を参照されたい.

## 7. むすび

非古典論理の今後の研究の方向としてはつぎのことが考えられよう.

1) 個々の論理とその拡張についてのより深い研究.

2) 1)とは逆に, さまざまな非古典論理を統一的な観点から捉えること.

いずれにせよ, 従来からの論理の研究の枠を越えて, 理論面でも応用面でも他の分野との関わりを見据え, 広い視野をもつ研究が大切であろう.

## 参考文献

1) Beeson, M. J.: Foundations of constructive mathematics, p. 466, Springer-Verlag (1985).
2) Bocheński, I. M.: Ancient formal logic, p. 122, North-Holland (1951).
3) Bull, R. A. and Segerberg, K.: Basic model logic, in 10) II, pp. 1-88.
4) Burgess, J. P.: Basic tence logic, in 10) II, pp. 89-133.
5) Burris, S. and Sankappanavar, H. P.: A course in universal algebra, p. 276, Springer-Verlag (1981).
6) Dalla Chiara, M. L.: Quantum logic, in 10) III, pp. 427-469.
7) Došen, K.: Sequent systems and groupoid models, Math. Inst., Serbian Acad. Sci., Belgrade (1986). (to appear in Studia Logica.)
8) Dunn, J. M.: Relevance logic and entailment, in 10) III, pp. 117-224.
9) Fine, K.: An incomplete logic containing S 4, Theoria 40, pp. 23-29 (1974).
10) Gabbay, D. and Guenthner, F. ed.: Handbook of philosophical logic, I, II, III, D. Reidel (1984).
11) Girard, J. Y.: Linear logic, Theor. Compt. Sci. 50, pp. 1-102 (1987).
12) Girard, J. Y. and Lafont, Y.: Linear logic and lazy computation, Lecture Notes in Compt. Sci. 250, pp. 52-66 (1987).
13) Goldblatt, R.: Topoi, the categorical analysis of logic, North-Holland, p. 486 (1979).
14) Halpern, J. Y. ed.: Theoretical aspects of reasoning about knowledge, Proceedings of the 1986 Conference, p. 407, Morgan Kaufman (1986).
15) Harel, D.: Dynamic logic, in 10) II, pp. 497-604.
16) Hindley, J. R. and Seldin, J. P.: Introduction to combinators and λ-calculus, Cambridge Univ. Press, p. 360 (1986).
17) Hintikka, J.: Knowledge and belief, p. 180, Cornell Univ. Press (1962), (認識と信念, 永井・内田共訳, 紀伊国屋書店, 1975年).
18) Hosoi, T. and Ono, H.: Intermediate propositional logics (A survey), J. of Tsuda College 5, pp. 67-81 (1973).
19) Hughes, G. E. and Cresswell, M. J.: An introduction to model logic, p. 388, Methuen and co

ltd (1968). (様相論理入門, 三浦他訳, 恒星社厚生閣, 1981年).

20) Jonsson, B. and Tarski, A.: Boolean algebras with operators, Part I, Amer. J. Math. 73, pp. 891-939 (1951).

21) Ketonen, J. and Weyrauch, R.: A decidable fragment of predicate calculus, Theor. Compt. Sci. 32, pp. 297-307 (1984).

22) Komori, Y.: Super-Lukasiewicz propositional logics, Nagoya Math. J. 84, pp. 119-133 (1981).

23) Lambek, J.: The mathematics of sentence structure, Amer. Math. Monthly 65, pp. 154-170 (1958).

24) Lambek, J. and Scott, P. J.: Introduction to higher order categorical logic, p. 293, Cambridge Univ. Press (1986).

25) Lemmon, E. J.: An introduction to modal logic, in collaboration with D. Scott, p. 94, B. Blackwell (1977).

26) Linsky, L.: Reference and modality, p. 175, Oxford Univ. Press (1971).

27) Maksimova, L. L.: Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-Boolean algebras, Algebra i Logika 16, pp. 643-681 (1977).

28) McArthur, R. P.: Tense logic, D. Reidel, p. 84 (1976).

29) McKinsey, J. C. C. and Tarski, A.: Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, J. Symbolic Logic 13, pp. 1-15 (1948).

30) Ono, H.: A study of intermediate predicate logics, Publ. PIMS, Kyoto Univ. 8, pp. 619-649 (1972).

31) Ono, H.: On some intuitionistic modal logics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., pp. 687-722 (1977).

32) Ono, H.: Some problems in intermediate predicate logics, Reports on Math. Logic, pp. 55-67 (1987).

33) Ono, H.: Structural rules and a logical hierarchy, to appear in Proc. of Heyting '88 Conference, Plenum Press.

34) Ono, H. and Komori, Y.: Logics without the contraction rule, J. Symbolic Logic 50, pp. 169-201 (1985).

35) Prior, A. N.: Past, present and future, p. 217, Clarendon Pless (1967).

36) Rasiowa, H.: An algebraic approach to non-classical logics, p. 403, PWN and North-Holland (1974).

37) Segerberg, K.: An essay in classical modal logic, Philosophical studies, Vol. 13, University of Uppsala, p. 250 (1971).

38) Shehtman, V. B.: On incomplete prpositional logics, Dokl. Acad. Nauk, SSSR 235, pp. 542-545 (1977).

39) Shehtman, V. B. and Skvortsov, D. P.: Semantics of non-classical first order predicate logics, to appear in Proc. of Heyting '88 Conference, Plenum Press.

40) Smorynski, C.: Self-reference and modal logic, p. 333, Springer Verlag (1985).

41) Szabo, M. E.: Algebra of proof, p. 297, North-Holland (1978).

42) 竹内外史: 直観主義的集合論, p. 196, 紀伊国屋書店 (1980).

43) Thomason, S. K.: An incompleteness theorem in modal logic, Theoria 40, pp. 30-34 (1974).

44) Urquhart, A.: Many-valued logic, in 10) III, pp. 71-116.

45) Van Benthem, J.: The logic of time, p. 260, D. Reidel (1983).

46) Van Benthem J.: Correspondence theory, in 10) II, pp. 167-247.

47) Van Benthem, J.: Essays in logical semantics, p. 225, D. Reidel (1986).

48) Van Dalen, D.: Intuitionistic logic, in 10) III, pp. 225-339.

(平成元年1月9日受付)