知能と複雑系　131－4
(2003. 1. 29)

株式市場の統計法則と確率モデル

海蔵寺　大成　　海蔵寺　道代

海蔵寺研究室　国際基督教大学社会科学科　〒181-8585 東京都三鷹市大沢 3-10-2

E-mail: kaizoji@icu.ac.jp

あらまし　本稿において、日本の株式市場の日次データを分析し、統計的性質を示す。さらに、発見された統計法則を説明する確率モデルを提案する。

キーワード　株式市場の統計法則，確率モデル

Statistical Laws of Stock Markets and a Stochastic Model

Taisei KAIZOJI　and　Michiyo KAIZOJI

† Kaizoji Laboratory, Division of Social Sciences, International Christian University　3-10-2 Osawa, Mitaka-shi, Tokyo, 181-8585 Japan

E-mail:　kaizoji@icu.ac.jp

Abstract　In this paper we investigate quantitatively daily data in the Japanese stock market, and show the statistical properties. Furthermore, we propose a stochastic model in order to explain the statistical properties.

Keyword　statistical properties in stock markets, a stochastic model

1. はじめに

株式市場の統計的性質を統計物理学的視点から分析しようとする研究が注目を集めている。本稿では、これまで本格的に分析されることのなかった日本の株式市場の日次データを用いて、株価と出来高の統計的性質を示す。さらに、発見された統計的性質を説明するマーケット・モデルを提案する。

2. 日本の株式市場における統計法則

分析のために使用したデータは、と(i)東京証券取引所に上場されている企業のうち約 1000 社の 1975 年から現在までの 28 年間の日次データと(ii)1984 年から 2002 年までの日経平均株価指数である。日経平均株価指数は 225 銘柄の単純平均として計算されている。

2.1. リターンとボラティリティー

ここでは典型的な例として、「日鉄鉱業」を取り上げて分析結果を示す。図 1 は株価収益率いわゆるリターンの時系列である。図 2 はリターンの累積分布の片対数プロットである。ここで、累積分布は確率変数 X が x より大きい値をとる確率として定義されている。この図は、リターンが二重指数分布あるいはラプラス分布

$$P(R > x) \propto \begin{cases} \exp(-\alpha\, x), & x > 0 \\ \exp(\beta\, x), & x \le 0 \end{cases} \qquad (1)$$

にしたがっていることを示している。最小二乗法を使ってパラメータを推定し、次の結果を得た。

$$\alpha = 1.49\ (R^2 = 0.99);\quad \beta = 1.18\ (R^2 = 0.99)$$

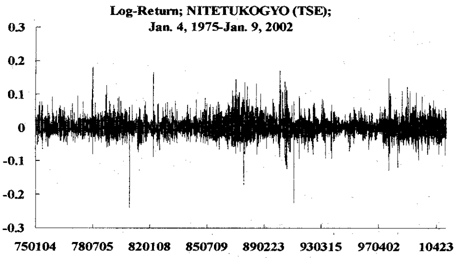

図 1(a)

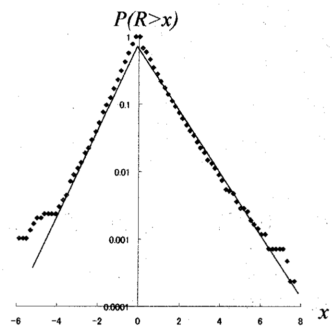

図 2

我々は他の日本企業、約 1000 社について同様の分析を

行い、これらの統計的性質が、東京証券取引所に上場している大多数の企業について成立していることを確かめた[7]。

米国の株価データを使った最近の研究では、リターンの分布はべき分布[1,2]によって、ボラティリティーの分布は対数正規分布[3,4]によって近似できることが報告されており、我々の結果とはことなっている。この相違は、日本と米国で株価の統計的性質が異なっている可能性を示唆している。

図3は日経平均株価指数のリターンの累積分布の片対数プロットである。これらの図は、日経平均株価指数のリターンの分布が、二重指数分布によって近似できることを示している。独立な指数確率変数の和はアーラン分布に従うことが解っていることから、株価指数を構成している銘柄の株価収益率の間には何等かの相関関係があることがわかる[7]。

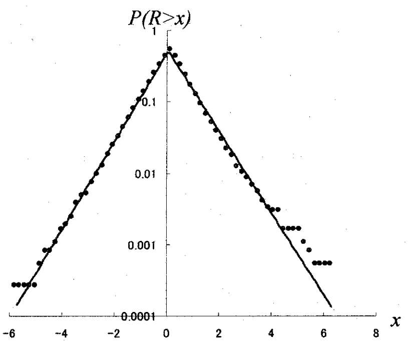

図3

2.2. 出来高

次に、1日に取引された株式の枚数を表す出来高の時系列データを分析する。図4は出来高変化 V の時系列である。図1と比較すると、リターンは多くのノイズを含んでいる一方、出来高変化の時系列は非常にはっきりとしたオン—オフ間欠性を示している。

図5は出来高変化の累積分布の両対数プロットである。この図は出来高変化の分布が広い範囲にわたってべき分布

$$P(V>z) \propto \begin{cases} x^{-\mu z}, & x \geq 0 \\ |x|^{-\eta z}, & x<0 \end{cases}$$

によって近似できることを示している。

さらに、最小二乗法を使って、指数を推定し、次の結果を得た。

$$\mu = 1.14\ (R^2 = 0.99);\quad \eta = 1.06\ (R^2 = 0.99)$$

指数が1のべき分布はジップの法則とよばれ、様々な社会・自然現象で観察されている。

出来高変化の分布が1に近い指数を持つべき分布であるという性質は、多くの上場企業についても成立していることが確かめられている[6]。

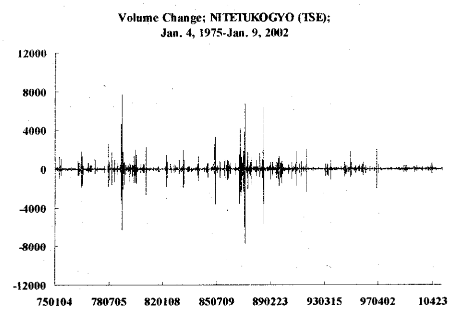

図4

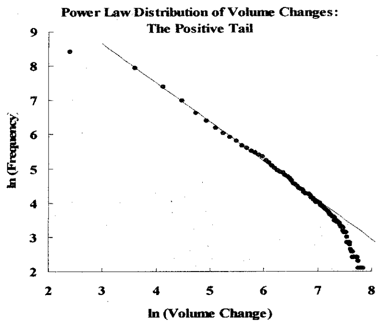

図5

3. 確率モデル[5]

前節では、実際の株価と出来高のデータの統計的性質を示した。主な結論は、リターンは二重指数分布に従う一方、出来高変化は指数が1に近いべき分布に従うということであった。なぜ、このような性質が見られるのだろうか？本節では、これらの統計的性質を説明する単純なマーケット・モデルを提案する。

単純化のために1銘柄が取引される株式市場を考え、投資家をファンダメンタリストとノイズ・とレーダーの2つのグループに分ける。

3.1. ファンダメンタリスト

ファンダメンタリストは株式の適切な価格（ファンダメンタル価格）p*を株式を発行する企業に関する様々なデータを収集して予測する。もし、株価がファンダメンタル価格より高ければ、ファンダメンタリストは株式市場は株価を過大評価していると考えて、株式を売ろうとする。なぜなら、ファンダメンタリストは株価が近い将来、ファンダメンタル価格まで下がるだろうと予測するからである。逆に、株価がファンダメンタル価格より低ければ、ファンダメンタリストは株式市場が株価を過小評価していると考えて、株式を

買おうとする。なぜなら、ファンダメンタリストは株価が近い将来、ファンダメンタル価格まで上がるだろうと予測するからである。以上のファンダメンタリストの投資行動から、ファンダメンタリストの株式の総需要、総供給 $Q^f(t)$ は次の式によって表すことができる。

$$Q^f(t) = a\,m(p^*(t) - p(t))$$

ここで、a はファンダメンタリスト1人当たりの売り買いの数量、m はファンダメンタリストの人数である。

3.2. ノイズ・トレーダー

本稿におけるノイズ・トレーダーは他の投資家の投資行動を見て確率的に自らの投資行動を変更する投資家であると考える。分析を単純化するために、ノイズ・トレーダーは各期において、売り手か買い手かを決めるとする。ノイズ・トレーダーの投資態度を s_i で現し、このトレーダーが売り手なら $s_i = -1$、買い手なら $s_i = +1$ であるとする。ノイズ・トレーダーが売り手である場合、ノイズ・トレーダーの投資態度を決める確率的ルールを次の遷移確率によって与える。

ノイズ・トレーダーが売り手から買い手へ投資態度を変更する確率：

$$W_{\uparrow}(\kappa s) = \frac{1}{1 + \exp(-2\kappa s)}$$

ノイズ・トレーダーが買い手から売り手へ投資態度を変更する確率：

$$W_{\downarrow}(k s) = \frac{1}{1 + \exp(2\kappa s)}.$$

これらの遷移確率を使うと、次の確率微分方程式を導出することができる。ここで、s はノイズ・トレーダーの平均投資態度を表している。

$$s = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{n}, \quad i = 1, \ldots, n$$

n はノイズ・トレーダーの人数である。s がプラスなら、半数以上のノイズ・トレーダーが買い手であることを意味し、s がマイナスなら、半数以上のノイズ・トレーダーが売り手であることを意味している。遷移確率(),()は s が大きくなるにつれて、売り手から買い手になる遷移確率が大きくなり、逆に買い手から売り手になる遷移確率が小さくなることを表している。

ここで、k はノイズ・トレーダー間の相互作用の強さを表す変数であるが、標準確率分布にしたがう確率変数であると仮定する。

上記の遷移確率を使って、ノイズ・トレーダーの平均的投資態度 s に関する確率微分方程式[]を導くことができる。

$$\frac{ds(t)}{dt} = \tanh(k\, s(t)) - s(t) + \sqrt{\frac{1}{n}[1 - s(t)\tanh(k\, s(t))]}\,\xi(t)$$

ここで、$\xi(t)$ は Gauss 型-δ 相関ランダム力と仮定する。すなわち、相関関数は、

$$<\xi(t)>=0 \qquad <\xi(t+\tau)\xi(t)>=\delta(t)$$

であると仮定する。

ノイズ・トレーダーの総超過需要（総超過供給）$Q^n(t)$ は次の式によって表されると仮定する。

$$Q^n(t) = b\,n\,s(t)$$

ここで、b はノイズ・トレーダー一人当たりの売り買いの数量、n はノイズ・トレーダーの人数である。これらの数は一定であると仮定する。

4. 株価と出来高

前節で求めたファンダメンタリストの総需要（総供給）関数とノイズ・トレーダーの総超過需要（総長か供給）関数を使って、株式に対する買い注文と売り注文が一致する株価の水準を求めることができる。

株式市場における需給バランスは次の式によって表すことができる。

$$Q^f(t) + Q^n(t) = a\,m(p^*(t) - p(t)) + b\,n\,s(t) = 0$$

この需給バランス式を解くと、需給を均衡させる株価は

$$\ln p(t) = \ln p^*(t) + \lambda s(t), \quad \lambda = \frac{b\,n}{a\,m}$$

となる。また、市場均衡価格下での出来高は、

$$M(t) = b\,n\frac{1 + |s(t)|}{2}$$

となることが簡単な考察からわかる。これらの式から、株価はファンダメンタリストによって予測されるファンダメンタル価格とノイズ・トレーダーの平均的投資態度によって決まることがわかる。また、出来高はノイズ・トレーダーの平均的投資態度のみによって決まることがわかる。

ここで、株価の対数値の時間微分は、

$$\frac{d\ln p(t)}{dt} = \frac{d\ln p^*(t)}{dt} + \lambda\frac{ds(t)}{dt}$$

である。以下で株価のリターンを株価の対数値の時間微分、出来高の変化を出来高 M(t)の時間微分でそれずれ、あらわすことにする。

$$R(t)=\frac{d\ln p(t)}{dt},\qquad V(t)=\frac{dM(t)}{dt}.$$

また、ファンダメンタル価格の対数の時間変化は、標準正規分布に従う確率変数であると仮定する。

5. シミュレーション

ここで提案したモデルがどの程度、実際の株式市場の統計法則を再現できるかを見るため、モデルのシミュレーションを行う。モデルのパラメーターを次のように設定する。

$$\kappa=5;\ n=m=5000;\ \lambda=1.$$

図 6 は、出来高変化の時系列である。この図は明らかにオン—オフ間欠性を示している。図 7 は出来高変化の累積分布の両対数プロットである。この図はモデルのシミュレーションから作り出した出来高変化がべき分布にしたがっていることを示している。最小二乗法によってべき分布の指数をもとめると、ほぼ 1 であることがわかる。

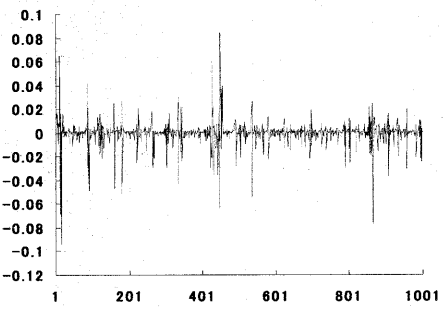

図 6

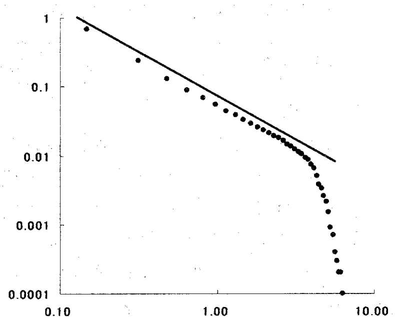

図 7

図 8 は図 6 の時系列に対応するリターンの時系列である。出来高変化に比べて、多くのノイズを含んでいることがわかる。これは、ファンダメンタル価格の変動がノイズ・トレーダーの平均投資態度 $s(t)$の変動にプラスされたためである。

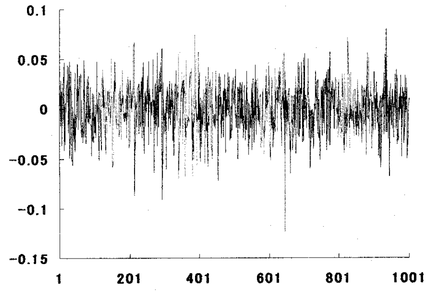

図 8

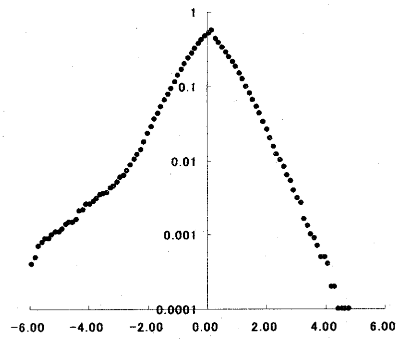

図 9

図 9 は、図 8 の時系列から計算したリターンの累積分布関数である。リターンは、非対称な二重指数分布にしたがっていることがわかる。

6. おわりに

本稿では、最初に、日本の株式市場の株価データの統計的性質を示した。結論をまとめると次のとおりである。(i)個別銘柄のリターンの分布は非対称な二重指数分布によって非常にきれいを近似できる。(ii)ボラティリティーの分布は指数分布によって近似できる。(iii) 個別銘柄の出来高変化の分布は、指数が 1 に近いべき分布によって近似することができる。

次に、これらの統計的性質を説明する確率モデルを提案した。モデルのシミュレーションの結果が示唆することとして、日本の株式市場において、リターンが二重指数分布に従うのは、ノイズ・トレーダーより、ファンダメンタリストが市場に参加する割合が大きいため、ファンダメンタル・ニュースの変動を株価が強く反映す傾向があるためであることがわかる。

文　献

[1] P. Gopikrishnan, et. al., Phys. Rev., 5305 E60 (1999).

[2] V. Plerou, et. al., Phys. Rev., E60, 6519 (1999).
[3] Y. Liu, et. al., Phys. Rev. E60, 1390 (1999).
[4] P. Cizeau, et. Al., Physica A245, 437 (1997).
[5] T. Kaizoji and M. Kaizoji, Exponential Laws of a Stock Price Index and an Interacting-agent Model, (2003) submitted.
[6] T. Kaizoji and M. Nuki, Scaling Law for the Distribution of Fluctuations of Share Volume, preprint (2002) submitted.
[7] T. Kaizoji and M. Kaizoji, Exponential laws in stock markets: Empirical results and a stochastic model, (2003) in preparation.