

## 価格変動における統計性とダイナミクス —ミクロスケールにおける価格変動—

水野 貴之<sup>†</sup> 栗原 祥子<sup>†</sup> 高安 美佐子<sup>†</sup> 高安 秀樹<sup>\*</sup>

<sup>†</sup> 中央大学理工学部物理科 〒112-8551 東京都文京区春日

<sup>‡</sup> はこだて未来大学システム情報科学部複雑系学科 〒041-8655 北海道函館市亀田中野町 116-2

<sup>\*</sup> ソニーコンピュータサイエンス研究所 〒141-0022 東京都品川区東五反田 3-14-13

E-mail: <sup>†</sup> mizuno@phys.chuo-u.ac.jp

あらまし オープンマーケットにおける非常に短い時間スケールでの統計性を価格差分布と価格変動の相関と価格の拡散に注目して示す。これらの統計性を作り出すダイナミクスについて議論し、ディーラーの基本的な行動に基づいてモデルを構築する。このモデルはディーラーのトレンドへの反応と価格の揺らぎへの反応の2つの要素から成り立っており、価格差分布がべき分布になることや価格変動に高次の相関があることや価格の異常拡散は市場に緩やかなトレンドと激しい揺らぎが内在するために発生していることが分かる。

キーワード 経済物理, 外国為替, 相関, ダイナミクス

## Statistical laws and dynamics of an open market —Price changes in very short time scales—

Takayuki MIZUNO<sup>†</sup> Shoko KURIHARA<sup>†</sup> Misako TAKAYASU<sup>†</sup> and Hideki TAKAYASU<sup>\*</sup>

<sup>†</sup> Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan

<sup>‡</sup> Department of Complex Systems, Future University-Hakodate, 116-2 kameda-Nakano-cho, Hakodate, Hokkaido 041-8655, Japan

<sup>\*</sup> Sony Computer Science Laboratories Inc., 3-14-13 Higashigotanda, Shinagawa-ku, Tokyo 141-0022, Japan

E-mail: <sup>†</sup> mizuno@phys.chuo-u.ac.jp

**Abstract** We show price change distribution and price change correlation and price diffusion in very short time scales in an open market. We think about the dynamics of these statistical laws and make a model based on basic dealer's actions. The keys of this model are two elements of dealer's reactions to price trend and price fluctuation. Therefore, it is noticed that fat-tail of price change distribution and high order correlations and anomalous diffusion are generated by modest price trend and violent fluctuation.

**Keyword** Econophysics, Foreign exchange rate, correlation, dynamics

### 1. はじめに

我々は本論文でオープンマーケットにおける非常に短い時間スケールでの価格変動の統計性とダイナミクスについて述べる。統計性については経済物理学の分野で数多くの経験則が報告されている[1,2]。文献[1]では主に株価変動における内容が、文献[2]では為替変動における内容が主体となっている。この2つの代表的なオープンマーケットでは市場参加者の数が違うため観測される統計性の時間スケールが若干異なるが現象そのものはほとんど同じである。本論文では1989年～2002年までの円ドル為替レートのtickデータ[3]を用いて議論する。1日のtick数は約8000tick～2万tick前後であり、13年間の全データで約2000万

tick存在する。

外国為替取引は24時間市場であり月曜日から金曜日まで世界中で取引がおこなわれている。現在、外国為替取引の多くがロイターやブルムバークが提供する専用端末のネットワーク上でおこなわれており、為替ディーラーはその端末に表示される時系列やニュースなどを情報に最小単位100万ドルで取引をおこなう。取引には「指値」と「成り行き」という代表的な2つの方法があり、「指値」は自分の買いたい価格と売りたい価格を同時に端末に入力する。端末には現在の指値の売値の最安値(Ask)と買値の最高値(Bid)が表示される。「成り行き」は端末に表示されているこれらの値段でそのまま取引することである。外国為替市場は

基本的に誰でも参加することが可能であり、取引を申告するルールなどはない非常に規制の少ない市場である。その為、数十億円の買い取引の直後に数十億の売り取引をすることも十分に可能である。総取引額は外国為替市場全体で1日に約200兆円と言われており、非常に莫大であるため個人が為替を操作することは事実上不可能である。このように、営業時間が長く規制が少ない上にエージェントの個々の特徴が影響しにくい為、外国為替市場はオープンマーケットに潜むダイナミクスを解析するのに最も適していると考えられている。

外国為替市場では取引の申告義務は無い為、実際取引がおこなわれた価格は当事者のみしか知りえない。よって、為替時系列の解析では取引価格の変わりにBid値やAsk値を用いて解析がおこなわれる。第2章では本論分の解析で用いたBid値について議論する。そして、第3章ではBid値を用いてこれまで報告されている価格変動の統計性について紹介する。第4章ではディーラーの基本的な行動に着目してモデルを作り、このモデルを用いて第3章で示した統計性が何故発生するのかを議論する。

## 2. Bid-Ask Spread の統計性

外国為替のデータを解析する上で問題になるのが、取引価格が分からないことである。そこで多くの場合、取引価格の変わりにBid値やAsk値を用いて解析がおこなわれている[4]。この章ではBid値とAsk値の関係について論じる。Fig.1は円ドル為替でのSpread(=Ask値とBid値の差)の確率密度分布である。この図から読み取れるようにSpreadの値は0.05yen/dollarと0.1yen/dollarに集中していることが分かる。この統計性はドルユーロ為替などの他の市場でも観測することができる。このSpreadの自己相関を調べたものがFig.2である。この図から、Spreadの自己相関は強く、しかも $3 \times 10^5$  tick(約30日)という非常に長い相関があることが分かる。この一定のSpreadが持続するという結果から、Bid値とAsk値は同時に同じ値ずつ変化していることが分かる。つまり、この結果はBid値とAsk値のどちらかを解析しても統計性はほとんど変わらないことを意味しているので、本論文ではBid値を用いて解析をおこなう。

## 3. ミクロスケールにおける統計性

### 3.1. 価格変動の分布

はじめに価格変動のダイナミクスを考える上で最も基本となる価格差の分布について議論する。オープンマーケットにおける価格差の分布については、様々な市場について解析されており多くの報告がある[5,6]。

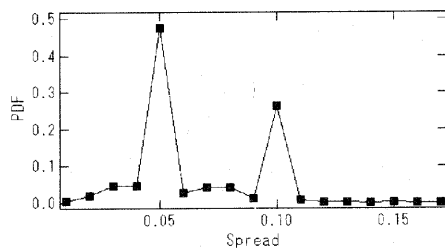


Fig.1 Spread の確率密度分布

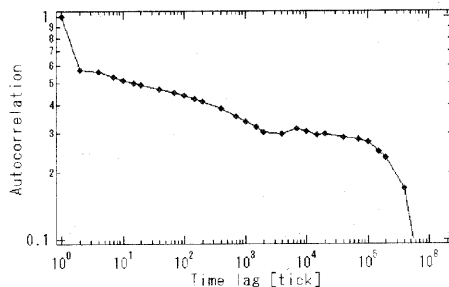


Fig.2 Spread の自己相関

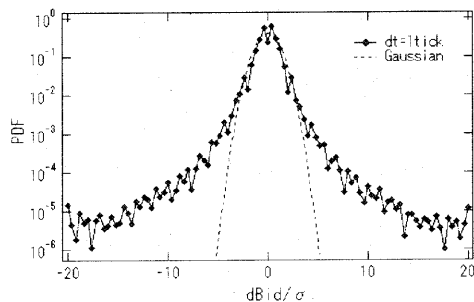


Fig.3 1tick の価格差の分布

分布は標準偏差で規格化されている。破線は標準正規分布。

Fig.3は円ドル為替における1tickのBid値の差の確率密度分布である。この図で見られるように、非常に短い時間スケールの価格差の分布は正規分布と比べて非常に小さい変動と非常に大きい変動が発生しやすいことが一般的な特徴である。この価格差分布の裾野部分はべき分布に近く、どのオープンマーケットでも約-3というべき指数が報告されている[6,7]。円ドル為替の場合、1tickで0.1yen/dollar以上動く確率は約2.7%である。1日のBid数を約1万個とすると、1日で270回も発生していることになる。1日で為替レートが1円動く大きな話題になることから、いかにオープンマーケットに内在する揺らぎが大きいかわかるであろう。

### 3.2. 相関関数を用いた価格変動の相関

価格変動のダイナミクスを追う方法としてまず挙げられるのが相関関数を使う方法である。価格差(dP)の相関(C(dt))は相関関数を使い次のように書くことができる。

$$C(dt) = \frac{\langle dP(t) \cdot dP(t+dt) \rangle - \langle dP(t) \rangle \langle dP(t+dt) \rangle}{\sigma^2} \quad (1)$$

ここで、 $\sigma$ は価格差分布の標準偏差である。円ドル為替における 1tick の価格差における自己相関は Fig.4 のようになり [2,4]、この図から 1tick 目は -0.5 という強い負の相関が存在し、その後は 2 体の相関を見るかぎりでは無相関になっていることが分かる。このような、1tick 目で -0.5 を示し、その後、無相関になるような過程は次のような変動を仮定することにより再現可能である。

$$P(t+1) = C_p + f(t) \quad (2)$$

ここで、 $C_p$ は定数で  $f(t)$ は平均値 0 のホワイトノイズである。この式の  $f(t)$ は時系列の揺らぎを表しているため、実際の為替におけるトレンド成分が揺らぎの成分に比べて無視できるほど小さければこの仮定は正しいことになる。実際、3.1 節よりも分かるように非常に短い時間の価格変動は 1 日の変動と比べても遜色が無いほど大きいことが分かっている [1,2]。

### 3.3. Volatility の相関

Volatility に様々な定義があるのだが、ここでは次のように 1tick の価格差の絶対値として定義する。

$$\text{Volatility}(t) = |P(t+1\text{tick}) - P(t)| \quad (3)$$

この Volatility には非常に長い自己相関があることが知られている [1,8]。円ドル為替においては Volatility の自己相関は時間に対して非常に緩やかな傾きで減少していき約 100 日で相関が無くなる [4,7]。この統計性は 1tick (約 10 秒) の変動幅が 100 日後まで影響を与えていることを意味しており非常に奇妙である。このような統計性は取引間隔の自己相関にも見られており、取引間隔では市場 (東京市場, ニューヨーク市場, ロンドン市場など) によって異なる取引数により 24 時間の周期が発生してこのような長時間相関が観測されることが分かっている [9]。実際、取引数が安定している時間帯を解析するとほとんど相関は観測されない。同様の解析を Volatility についてもおこなう。Fig.5 は 13 年間の Volatility の値を 0 を省いて 500tick 毎に平均を取った値の時系列である。Volatility の平均値が時期により異なっていることが読み取れる。そこで、Volatility の平均値が比較的安定している時期を取り出し、この時期での Volatility の自己相関を観測したものが Fig.6 の◆

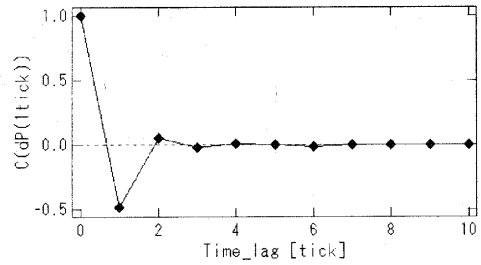


Fig.4 1tick の価格差の自己相関

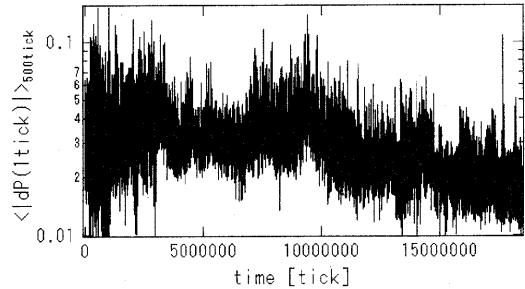


Fig.5 13 年間の平均 Volatility の時間変化

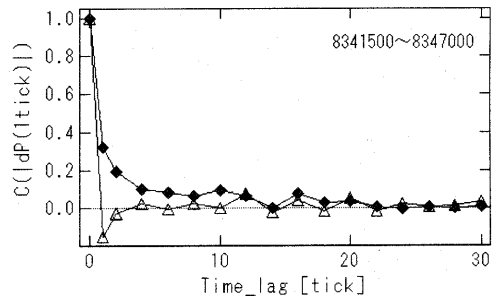


Fig.6 Volatility の安定した時期での相関

である。相関が数 tick しか持続しないのが読み取れる。つまり、Volatility の長時間相関は市場の熱い時期や冷めた時期があるために発生すると言える。よって、非常に短い時間 (局所的な期間) の価格変動のダイナミクスを考える上では、Volatility の長時間相関は考慮しなくても良い。

次に Fig.6 の◆で見られる Volatility の短い時間の相関について考える。1tick 目では約 0.4 の正の相関が観測され、その後も少し持続している。そこで、過去数 tick の平均 Volatility で現在の Volatility を規格化した規格化 Volatility を導入する。この規格化 Volatility の自己相関を計算したものが Fig.6 の△である。規格化 Volatility の自己相関がほとんど無相関になっていることが読み取れる。この結果は Volatility の時間発展が自己変調プロセス [9] になっていることを示唆している。

### 3.4. 高次の価格変動の相関

価格差の相関は相関関数ではほとんど観測することはできないが、条件付確率を用いることにより高次の相関があることが知られている。その方法は、1tickでレートが変動しない場合を取り除いてから、1tickの価格変動を円安方向に変動すれば+と円高方向に変動すれば-と2つの信号に変換し、その信号の出方を条件付で観測すると言うものである。Table.1のDATA\_AとDATA\_Bは大平らの結果である[10]。また、Fig.7は同符号がn回続いた条件下で次に同じ符号が出る確率を示している[4,7]。どちらの結果も+と-とで統計性は変わらないと報告している。これらの統計性は過去の同符号の発生回数が多いほど次に同符号が出やすいことを意味している。このような統計性を示すメカニズムは次のように強い負の相関を持つ揺らぎとゆっくりと一定方向に動くトレンドの存在を仮定すると理解しやすい。

$$P(1) - P(0) = f_n(0) \quad (4)$$

$$P(t+1) - P(t) = b \cdot \frac{P(t) - P(t-dt)}{dt} + f_n(t) \quad (5)$$

ここで、 $f_n(t)$ は強い負の相関を持つノイズであり、 $b$ は1より大きい値である。このような価格の時間発展を考えると初期値に近い時間では+の次には-、-の次には+が発生しやすい。しかし、時間が経過するにつれて指数関数的なトレンドが発生し徐々に $f_n(t)$ により価格が変動する効果が相対的に小さくなり同符号が発生しやすくなっていく。

### 3.5. 価格の拡散

価格の拡散に関しても多くの経験則が観測されている[11]。非常に短い時間の価格の拡散については分散を用いたハースト指数の解析が報告されている[12]。Fig.8は円ドル為替における解析結果である。約10tick以下の時間スケールでは価格差分布の標準偏差はスケールに依存せずほぼ一定であり、拡散はブラウン運動に比べ非常にゆっくりであることが分かる。また、約100tick以上の時間スケールではスケールに対し標準偏差が0.5乗で上昇することから、比較的大きなスケールでは価格の拡散はブラウン運動になることが分かる。この異常拡散と通常拡散の境目の時間スケールは数分であり、ディーラーが過去を参照する時間であると考えられている。

## 4. ミクロスケールにおける価格変動モデル

### 4.1. 価格変動の方程式とダイナミクス

この章では前章の統計性を踏まえて非常に短い時間スケールでの価格変動のモデルを構築する。Fig.9

Table.1 価格変動の条件付確率

	DATA_A	DATA_B	モデル (Eq. 6)
データ数	344791	145542	10000000
P(+)	0.50	0.50	0.50
P(+ +)	0.32	0.31	0.35
P(+ +,+)	0.27	0.23	0.29
P(+ -,+)	0.66	0.66	0.62
P(+ +,+,+)	0.28	0.23	0.27
P(+ -+,+)	0.63	0.63	0.61
P(+ +,+,-)	0.33	0.33	0.38
P(+ +,+,-)	0.26	0.26	0.30
P(+ +,+,+,+)	0.36	0.31	0.27
P(+ -+,+,+)	0.63	0.62	0.61
P(+ +,+,-,+)	0.32	0.32	0.38
P(+ +,+,-,+)	0.26	0.23	0.30
P(+ +,+,-,+)	0.25	0.21	0.27
P(+ -+,-,+)	0.72	0.75	0.70
P(+ -+,-,+)	0.67	0.67	0.62
P(+ -+,+,-,+)	0.63	0.63	0.61

DATA\_A及びDATA\_Bは大平らが実際の円ドルデータから解析した結果である[10]。モデルは第4章の(6)式を用いてシミュレーションした結果である。データ数はDATA\_A及びDATA\_Bはtick数であり、モデルはシミュレーションのstep数である。

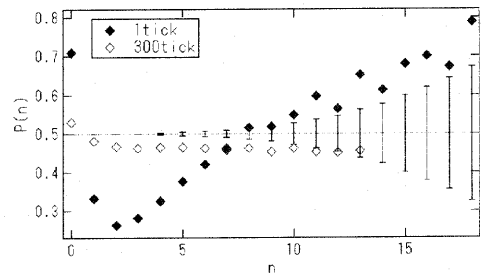


Fig.7 同符号がn回続いた条件下で次に同じ符号が出る確率

◆は1tickの時間スケールで、◇は300tickの時間スケールで観測をおこなっている。

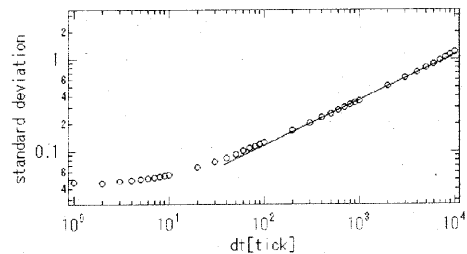


Fig.8 価格差分布の標準偏差と時間スケールの関係

のように価格が時刻  $t$  まで上昇トレンドを持ち変動していたとする。この時、次の時刻  $t+1$  tick の価格を決定するディーラーは確率的に時刻  $t-dt+1$  ~ 時刻  $t$  までの  $dt$  個の過去の時系列から最小二乗フィットのような方法でトレンドを抽出し、次に実際の価格の時系列とトレンド線とのズレからこの時刻における価格変動の揺らぎを見積もり、時刻  $t+1$  tick の価格をトレンドと揺らぎを考慮して、多くの場合、図の○の中に価格を決定すると仮定する。この価格決定行動を方程式で書くと次のようになる。

$$P(t+1) = P_{fit}(t) + b_1(t) \cdot \Delta P_{fit}(t) + b_2(t) \cdot (P(t) - P_{fit}(t)) + f(t) \quad (6)$$

ここで、 $P_{fit}(t)$  は時刻  $t-dt+1$  ~ 時刻  $t$  までの価格  $P$  より以下の最小二乗法、

$$P_{fit}(t) = \frac{1}{2} (dt-1) \cdot \Delta P_{fit}(t) + \frac{\sum_{i=1}^{dt} P(t-dt+i)}{dt} \quad (7)$$

$$\Delta P_{fit}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{dt} \{P(t-dt+i) \cdot (i - \frac{1+dt}{2})\}}{\sum_{i=1}^{dt} (i - \frac{1+dt}{2})^2} \quad (8)$$

により決まり、係数  $b_1(t)$  はトレンドに反応する強さを表し時間に対してゆっくりと変化するとし、 $b_2(t)$  は揺らぎに反応する強さを表す平均値 0 のノイズとし、 $f(t)$  は価格を決定するこれらの要素以外のノイズ（平均値 0）としている。この方程式は右辺の第 2 項の順バリの効果と第 3 項の市場における揺らぎの記述により成り立っている。

$P_{fit}$  の時系列は  $P_{fit}(t)$  が最小二乗法より求められていることから、揺らぎを除いたゆっくりとした市場の変化を表している。よって、 $P_{fit}$  の時間発展は(6)式から揺らぎに関する項を除いた次の式で近似することができる。

$$P_{fit}(t+1) \approx P_{fit}(t) + b_1(t) \cdot \Delta P_{fit}(t) \quad (9)$$

ここで、(9)式を(6)式に代入すると、

$$P(t+1) - P_{fit}(t+1) \approx b_2(t) \cdot (P(t) - P_{fit}(t)) + f(t) \quad (10)$$

となり、この乗算ノイズを持つ離散型ランジュバン方程式のプロセス[13]から価格変動の揺らぎがべき分布になることが分かる。

1step の時間スケールでは  $P_{fit}$  の変動が  $P$  の変動に比べて非常にゆっくりであることから(6)式は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} P(t+1) &\approx C_p + F(t) \\ F(t) &= b_2(t) \cdot (P(t) - C_p) + f(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $C_p$  は定数である。この式は(2)式と対応しており、このことから価格差の相関が 1tick 目で  $-0.5$  に

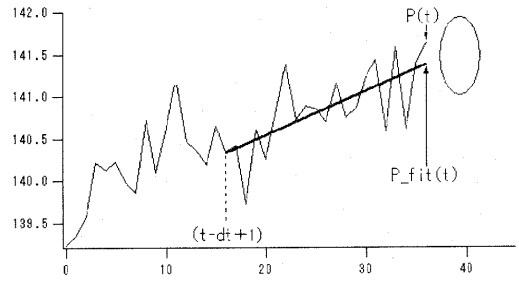


Fig.9 価格決定の行動

なることが示せる。

多体の相関に関しては、 $b_1$  が 1 より大きい状態が持続すると徐々に価格変動におけるトレンド成分の寄与が大きくなり相対的に揺らぎが小さくなり負の相関が発生しにくくなる。価格の拡散については時間スケールを大きくしていくと相対的に価格変動に与える  $P_{fit}$  の変動の影響が強くなるため拡散がブラウン運動に近づく。

## 4.2. モデルを用いて再現される統計性

(6)式で記述される価格の時系列の統計性を示す。Fig.10 は標準偏差で規格化した 1step の価格差の分布である。確かに価格差の分布は正規分布ではなく裾野の広いべき分布になっている。Fig.11 は相関関数を用いて 2 体の相関を調べた結果であり、1step 目で  $-0.5$  の負の相関を示しその後は無相関になっている様子が読み取れる。Fig.12 は局所的な Volatility の相関に対応している。Table.1 のモデルの項と Fig.13 はシミュレーションでの変動の高次の相関を観測したものであり、実際の価格変動と統計性が似ていることが読み取れる。拡散に関しても Fig.14 のように実際の統計性と同等な解析結果が得られる。

## 5. まとめと課題

短い時間スケールで観測される価格変動の統計性はゆっくりとしたトレンドとそのトレンドの周りで価格が激しく揺らぐという(6)式で記述されるようなダイナミクスにより作られている。この(6)式は価格変動を記述することが出来るが、時間スケールに限界があることに注意しなければならない。需要と供給の均衡点が大きく変化するような時間スケールでは、クラッシュと呼ばれるトレンドとは異なる急激な価格の変化がおきる可能性があり、この方程式でのみ価格変動を記述することは不可能である。そのような時間スケールでは幾つか効果的な価格変動を記述する方程式がある[2,14]。この方程式とそれらの方程式との関係を明らかにすることが今後の課題である。

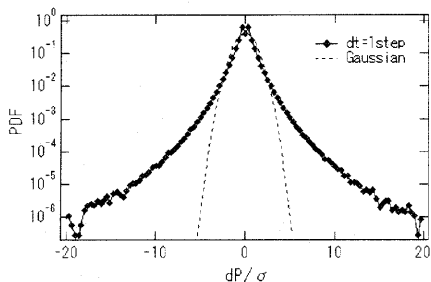


Fig.10 シミュレーションでの価格差分布

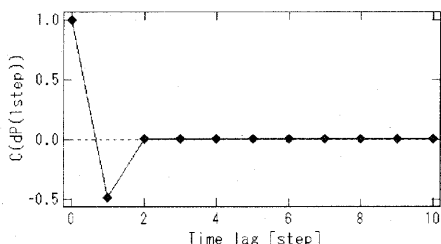


Fig.11 シミュレーションでの価格差の相関

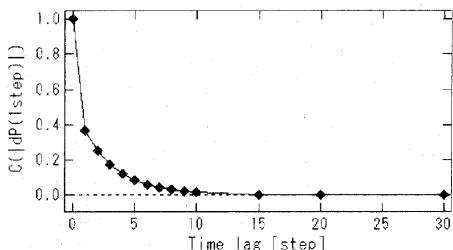


Fig.12 シミュレーションでの Volatility の相関

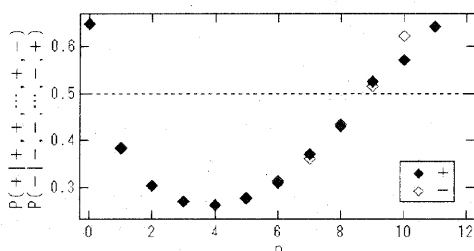


Fig.13 シミュレーションでの多体の相関

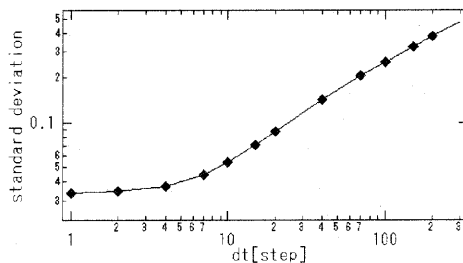


Fig.14 シミュレーションにおける価格の拡散

## 6. 謝辞

我々が解析に用いた CQG 社のデータはオックスフォード・ファイナンシャル・エデュケーションの森谷博之氏に提供して頂きました。中央大学の中野教授にはディスカッションをして頂きました。感謝を申し上げます。

## 文 献

- [1] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, An Introduction to Econophysics-Correlation and Complexity in Finance-, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [2] 高安秀樹, 高安美佐子, エコノフィジクスー市場に潜む物理法則, 日本経済新聞社, 2001.
- [3] CQG 社の 1989.6.27~2002.3.29 までの 13 年間の円ドル為替データ. データ数は 18439741 個.
- [4] 水野貴之, “為替変動の確率構造”, 数理科学, No.472, pp.13-19, October 2002.
- [5] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, Scaling behaviour in the dynamics of an economic index, Nature, vol.376, pp.46-49, 1995.
- [6] K. Matia et al., Non-Levy distribution of commodity price fluctuations, cond-mat/0202028.
- [7] T. Mizuno, S. Kurihara, M. Takayasu, H. Takayasu, Analysis of high-resolution foreign exchange data of USD-JPY for 13 years, Physica A, 印刷待ち.
- [8] Yanhui Liu et al., The statistical properties of the volatility of price fluctuations, Phys. Rev. E, vol.60, pp.1390, 1999.
- [9] 高安美佐子, “取引数のゆらぎと心理時間”, 数理科学, No.472, pp.33-37, October 2002.
- [10] Toru Ohira et al., Predictability of currency market exchange, Physica A, vol.308(1-4), pp. 368-374, 2002.
- [11] S. Ghashghaie et al., Turbulent cascades in foreign exchange markets, Nature, vol.381, pp.767-770, 1996.
- [12] A. A. Tsonis et al., A characteristic time scale in dollar-yen exchange rates, Physica A, vol.291(1-4), pp. 574-582, 2001.
- [13] H. Takayasu, A-H. Sato and M. Takayasu, Stable infinite variance fluctuations in randomly amplified Langevin systems, Phys. Rev. Lett., vol.79, pp.966-969, 1997.
- [14] T. Mizuno, M. Takayasu and H. Takayasu, The mechanism of double-exponential growth in hyper-inflation, Physica A, vol.308(1-4), pp. 411-419, 2002.