解　説

部分構造法とその応用†

野　寺　　隆††

1. はじめに

部分構造法ということばをご存知ない人も多いと思うのだが，これは偏微分方程式の境界値問題を解く方法の一つで，与えられた構造物を小さないくつかの部分構造物に分解し，この部分構造物における問題を個個に解いて，全体の解を構成することである．ただ，この意味においては，このアイディアは決して新しいものではない．従来，この方法はシュワルツ (Schwarz) の代替法として知られており，部分構造物の一部を重ね合わせることによって，おのおのの部分構造物に含まれる解を反復解法で求め，全体の構造物の解を決定することが行われていたのである．また，このアイディアはさまざまな大型の科学技術計算の分野で用いられてきたのである．特に，構造解析の分野では，これはサブストラクチャ法とかフロンタル法という名で知られており，完全な問題が大規模で主記憶に入りきらなかったりするときに，きわめて有効な計算方法である．

近年の計算流体力学の進歩は目覚ましく，物理的な構造物の領域を異なる構造物に分割したり，おのおのの構造物を支配する方程式を，多少違えて解く必要も生まれてきたので，部分構造法の利用価値も高まってきた．また，大規模な構造物に対するグリッド・ジェネレーション（格子生成）の技術の急速な進歩などもあり，部分構造法も一躍脚光を浴びてきたのである．

近年，部分構造法の研究は，以前にも増して急ピッチで行われてきている．その理由の一つは，並列計算機の研究が進み，これらの算法の実行を並列に行える可能性が多分に生まれてきたこともあげられる．

部分構造法の研究の進歩のもう一つの理由は，その算法の改良が進んだ点にある．部分構造法によるアプローチには，部分構造物の一部を重ね合わせて解くシュワルツの方法が一般によく知られているのだが，この方法の収束性はあまりよいとは言えず，以前からさまざまな問題点が指摘されてきた．そこで，この算法の改善が多くの研究者によって行われてきたのである．

部分構造法のアプローチには，前述のシュワルツの方法以外に，部分構造物を全然重ね合さずに解く方法もある．この方法の基本的なアイディアは，構造物全体から構成される離散化方程式を，おのおのの部分構造物の間のインタフェース上の方程式に集約することである．すなわち，インタフェースに集約した方程式を反復法で，特に，前処理を適用した共役勾配法を利用して解くのである．これは連立1次方程式の解を求めることになるので，十分よい前処理行列を選んでそれを適用し，方程式の係数行列の条件数を改善し，共役勾配法の反復回数を減少する必要がある．このような前処理行列は，近年多くの研究者によって提案されている.[4),6),8),12),14)etc]

当然，部分構造法で利用する前処理行列は従来の不完全行列分解に基づくようなものではなく，より直接的な行列のスペクトラル解析から得られたものが利用されるのである．

本稿では，**2.** において部分構造法の基本概念について述べる．次に，**3.** において部分構造法によって構成された方程式を解くための共役勾配法について簡単な解説をする．**4.** では，共役勾配法の収束を加速する部分構造法特有の前処理行列の構成方法について述べる．最後に，**5.** において前処理行列の性能評価について述べることにする．

2. 部分構造法とは

部分構造法の基本概念を簡単に説明するために，**図-1** に示すような構造物 Ω，すなわち一つのインタフェース Γ をもつ二つの部分構造 Ω_1 と Ω_2 に分解できる構造物を考えることにする．

いま，この構造の領域内で次の偏微分方程式が満たされるものとする．

† Domain Decomposition Method and its Applications by Takashi NODERA (Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University).

†† 慶應義塾大学理工学部数理科学科

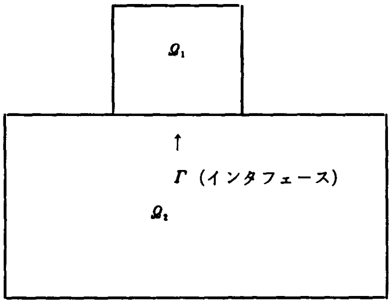

図-1　T型構造物 Ω とその分割

$$Lu=f \text{ in } \Omega \tag{2.1}$$
$$u=g \text{ on } \partial\Omega \tag{2.2}$$

ただし，(2.1)式のLは楕円型の演算子で，(2.2)式はその境界条件である．

当然，このような偏微分方程式を離散化することになるのであるが，そのためには構造物を格子分割し，それに番号付けして離散化方程式を構成すればよい．格子点の番号付けに関しては，いろいろな方法があるが，部分構造法では，次のような規則で番号付けを行うのが一般的な方法である．すなわち，最初に，構造 Ω_1 と Ω_2 の内部にある格子点（これは未知数となるのだが）についておのおのの番号付けをし，最後に，そのインタフェースである Γ 上の点に対して番号付けを行うのである．このような手法で番号付けした離散化方程式の解は，次の大型で疎な線形方程式を解くことによって求めることができる．

$$Au=b \tag{2.3}$$

ただし，この方程式はブロック小行列を用いて次のように書き表すことができる．

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

この方程式の要素として表される小行列の A_{11} は Ω_1 の構造物に対応し，A_{22} は Ω_2 の構造物に対応することになる．また，A_{33} はこれらの構造物のインタフェース Γ に対応している．ただし，u_1 は構造物 Ω_1 の解であり，u_2 は Ω_2 の構造物の解であり，u_3 は Γ の解となるのである．

通常，この方程式はブロック・ガウスの消去法を用いて，二つの構造物の間のインタフェース上の方程式に集約するのであるが，その過程は次のようにすればよい．

［ブロック・ガウスの算法］

（1）$C=A_{33}-A_{13}^TA_{11}^{-1}A_{13}-A_{23}^TA_{22}^{-1}A_{23},$ (2.5)

$$w_1=A_{11}^{-1}b_1, \tag{2.6}$$
$$w_2=A_{22}^{-1}b_2 \tag{2.7}$$

を計算し，

$$Cu_3=b_3-A_{13}^Tw_1-A_{23}^Tw_2 \tag{2.8}$$

を解く，一度 u_3 に対しこの方程式を解いてしまえば，後は次のステップのような代入計算によって u_1 と u_2 を計算すればよい．

（2）$u_1=w_1-A_{11}^{-1}A_{13}u_3,$ (2.9 a)

$$u_2=w_2-A_{22}^{-1}A_{23}u_3 \tag{2.9 b}$$

を計算する．

この算法の中では，(2.8)式を除いて，小行列 A_{11} と A_{22} を係数とするおのおのの部分構造物に対する方程式の解が独立に計算できるのである．また，(2.5)式で表される行列 C のことを，係数行列 A に含まれる小行列 A_{33} のシュール・コンプリメント（Schur complement）と呼んだり，キャパシタンス（capacitance）行列ということもある．しかし，このような行列 C を生成し，計算を行うことは簡単なことではない．一般に，行列Cを直接計算するには，計算量の点でかなり割高なものになってしまう．さらに行列Cは，一般に密行列となるので，(2.8)式を直接法で解くことは驚くほど多くの計算量を必要とするし，記憶領域も増加するので，あまり賢明とはいえない．

そこで，もし可能ならば，Cv（行列とベクトルの積）のような演算で計算できる方法を考える必要がある．このような計算は，反復解法においては基本的な演算操作であり，通常，最近話題を集めている前処理付共役勾配法（PCG 法ともいう）を用いて解を求めることができる．たとえば，(2.8)式の右辺に現れる $A_{13}^TA_{11}^{-1}A_{13}w$ の計算は，(2.1)式の離散化方程式を Ω_1 と Γ 上の境界条件 $u=w$ で解くことによって行うことができるのである．

3. 前処理付共役勾配法

大規模な線形方程式

$$Ax=b \tag{3.1}$$

の反復解法として，1952年に Hestenes と Stiefel によって開発された共役勾配法（CG 法ともいう）は，近年再び注目を集めている解法の一つである．共役勾配法は，大型で疎な対称行列を係数とする連立1次方程式に対して有効な解法である．特に，近年の行列の前処理による収束性の改善を行う技術の研究が進み，

現在では対称正定値行列を係数とする連立1次方程式のもっとも有力な反復解法として認められてきている．この解法の原理は，2次関数

$$F(x)=1/2(x, Ax)-(x, b) \qquad (3.2)$$

を最小にすることに基づいている．

共役勾配法の算法には，数種類のバリエーションがあるが，下記のものを使用するものとする．

［前処理付共役勾配法（PCG 法）］

（1） 任意の初期値 x_0 を選び，残差ベクトル $r_0=b-Ax_0$ を計算し，方向ベクトル $p_0=\beta_0 M^{-1}r_0$ を計算する．（ただし，M は対称な前処理行列であり，$\beta_0=1/(r_0, M^{-1}r_0)$ とする．）

（2） 次の手順を繰り返す．($k=0, 1, 2, \cdots$)

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k p_k,$$
$$r_{k+1}=r_k-\alpha_k A p_k,$$
$$p_{k+1}=p_k+\beta_k M^{-1} r_{k+1},$$
$$\alpha_k=1/(p_k, Ap_k),$$
$$\beta_k=1/(r_{k+1}, M^{-1}r_{k+1}).$$

この算法の収束性は，前処理行列 M の選択のしかたに左右される．当然，行列 M は行列 A の近似行列となるように選ぶ必要がある．

PCG 法の k 回目の反復における誤差の上限は，次の数式で与えられる[16),20)]．

$$\frac{\|x_0-x\|_A}{\|x_k-x\|_A}\leqq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1}\right)^k \qquad (3.3)$$

ただし，κ は行列 $M^{-1}A$ の条件数であり，x は厳密解とする．この(3.3)式からもわかるように，PCG 法が収束するために必要な反復回数は，行列 $M^{-1}A$ の互いに異なる固有値の個数と密接な関係があるのである．

現在，前処理行列の構成にはさまざまなものが提案されているのだが，大別すると行列分離に基づくものと，行列分解に基づくものの二つがあげられる．これらの詳細については，参考文献 19)，20)を参照してほしい．

部分構造法では，全体的な行列 A に共役勾配法を適用して解くのでなく，前の章で述べた(2.5)式で表されるキャパシタンス行列を係数とする方程式を解くのに共役勾配法を利用するのである．このとき問題となるのは，前処理行列の選択法である．すなわち，PCG 法の収束性がこの前処理行列の選択に左右されるからである．ただし，残念ながら部分構造法では，従来有効とされてきた前処理の方法（たとえば，不完全行列分解，修正不完全行列分解など）が使えないことは，もうおわかりのことと思うのである．

4. 前処理行列の作り方

(2.8)式を前処理付の共役勾配法を用いて解くためには，共役勾配法の収束特性を十分に引き出すような前処理を行う必要がある．ただし，前にも述べたが部分構造法を利用する場合には，一般に知られている前処理のアプローチは使えないのである．このような方程式の前処理行列を作る基本的な方法の一つに，演算子のスペクトラル解析によって得られる固有値と固有ベクトルに基づく方法がある．スペクトラル解析の基本的なアイディアは，適当な固有ベクトルを選択することによって，(2.5)式で表される行列 C を対角化してしまうのである．特に，ディリクレ (Dirichlet) 境界条件をもつラプラス演算子のような定数係数のものに対しては，その固有ベクトルはインタフェース Γ において定義された離散的なフーリエ (Fourier) 関数で簡単に表すことが可能である．さらに，より複雑な問題に対しては，これらの固有関数は多少複雑なものとなる．また，係数が変数となるような演算子に対しては，この固有関数は数値的に計算しなければならないので，多少やっかいである．一般に，このテクニックは，fast elliptic solver と同様に，長方形の構造をもつ分離可能な演算子に対してのみ利用することができるのである．

4.1 ラプラス演算子

実際に，(2.1)式としてポアソン方程式（係数 L としてラプラス演算子をもつ）を考え，中心差分を用いて離散化するものとする．また，構造物 Ω として図-2 に示したように二つ以上の長方形に分割される長方形の構造物を考えるものとする．ここで，スペクトラ

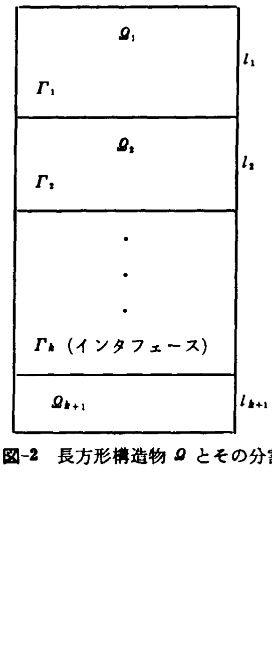

図-2 長方形構造物 Ω とその分割

ル解析をディレクレ境界条件をもつラプラス演算子に適用することによって，キャパシタンス行列Cの固有値と固有ベクトルを，簡単に計算することができるのである[2),8)]．すなわち，その固有ベクトルは離散的な sin 関数で表すことができる．さらに，行列 C の固有値は次のように行列分解できるのである．ただし，構造物の分割の個数によって，二つの場合に分けられる．

（1） 構造物 Ω が二つの長方形の構造物にのみ分割される場合．

$$C=W\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}W^T \tag{4.1}$$

ただし，行列 W の各列ベクトルの成分は，

$$w_j=\sqrt{\frac{2}{n+1}}(\sin j\pi h, \sin 2j\pi h, \cdots, \sin nj\pi h)^T$$

$$(j=1,2,3,\cdots,n) \tag{4.2}$$

と表される．また，その固有値は次のように書き表すことができる．

$$\lambda_j=-\left(\frac{1-\gamma_j^{m_1+1}}{1+\gamma_j^{m_1+1}}+\frac{1+\gamma_j^{m_2+1}}{1-\gamma_j^{m_2+1}}\right)\sqrt{\sigma_j+\frac{\sigma_j^2}{4}} \tag{4.3a}$$

$$\sigma_j=4\sin^2(j\pi h/2) \tag{4.3b}$$

$$\gamma_j=\left(1+\frac{\sigma_j}{2}+\sqrt{\sigma_j=\frac{\sigma_j^2}{4}}\right)^2 \tag{4.3c}$$

$$(j=1,2,3,\cdots,n)$$

ただし，$h(=1/(n+1))$ は Ω 上の格子間隔で，n は x 軸方向の格子点の数を示し，m_1 と m_2 は Ω_1 と Ω_2 の y 軸方向の格子点の数を表している．ここで，(4.1)式で表される行列分解を利用することにより，(2.8)式は高速フーリエ変換で解くことができるのである．二度この方程式を解いて u_3 を求めてしまえば，後は(2.9)式に代入して u_1 と u_2 を計算すればよいのである．これは，インタフェース Γ において，境界条件を u_3 とする二つのまったく独立した部分構造の問題を解くことに帰着されることになる．

（2） 構造 Ω が二つ以上の長方形領域の部分構造に分割される場合．

この場合には，行列Cは次のようなブロック3重対角で表されるのである．

$$C=\begin{bmatrix}C_1 & B_2 & & 0\\ B_2 & C_2 & B_2 & \\ & \ddots & \ddots & B_k\\ 0 & & B_k & C_k\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

ここで，行列 C に関して，その要素である小行列 C_i はおのおののインタフェース Γ_i に上に縮小させられた方程式の係数行列に対応し，小行列 B_i はインタフェースの間を結び付ける方程式の係数行列に対応していることになる．さらに，C_i と B_i のすべての小行列は，同じ固有ベクトルから構成される行列 W によって，次のように対角化されるのである．

$$W^TC_iW=\Lambda_i=\mathrm{diag}(\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{in}) \tag{4.5a}$$

$$(i=1,2,\cdots,k)$$

$$W^TB_iW=D_i=\mathrm{diag}(\delta_{i1},\cdots,\delta_{in}) \tag{4.5b}$$

$$(i=2,\cdots,k)$$

ただし，

$$\lambda_{ij}=-\left(\frac{1+\gamma_j^{m_i+1}}{1-\gamma_j^{m_i+1}}+\frac{1+\gamma_j^{m_{i+1}+1}}{1-\gamma_j^{m_{i+1}+1}}\right)\sqrt{\sigma_j+\frac{\sigma_j^2}{4}} \tag{4.5c}$$

$$\delta_{ij}=\sqrt{\gamma_j^{m_i}}\left(\frac{1-\gamma_j}{1-\gamma_j^{m_i+1}}\right) \tag{4.5d}$$

この場合には，最初に，固有ベクトルから構成される行列 W を用いて行列Cをブロック対角行列にし，その後で方程式を並べ換える．こうすることによって行列Cは n 個の k 次元の3重対角行列を係数とする方程式に集約することができる．ただし，$k+1$ は元の構造物を分割した部分構造物の数である．

当然，このような問題を取り扱う算法は，おのおのの部分構造において二つの問題の解を求めなければならない．その一つは各部分構造より構成された方程式の右辺の計算であり，もう一つはそれによって得られた方程式の解を求めることである．もし最初の計算でその中間結果を保持できるならば，次の計算でその値を使うことが可能なので余分な計算をしなくてもよい．このような計算の算法に興味のある人は 9), 10) を参照するとよい．さらに，この算法の並列計算への応用についてもこの中で述べられている．

ここでは，ラプラス演算子を例に取り上げたけれども，熱伝導問題のように $u_{xx}+\beta_{uyy}$ のような演算子に対しても，スペクトル解析を利用して，キャパシタンス行列Cの固有値と固有ベクトルを計算することも可能である．このような一般的な演算子に対するキャパシタンス行列の固有値，固有ベクトルの構成方法に関しては，Chan et al.[9)] を参照してほしい．

4.2 行列の前処理

簡単なモデル問題を考えてきたのだが，実際には構造がもっと複雑で，(2.5)式で表される固有値と固有ベクトルは，スペクトラル解析によって解析的に計算

することは不可能になる．当然，キャパシタンス行列Cを直接計算することは，多くの計算量を必要とするし，また，y軸方向の格子点の数であるmの値が大きなときには行列Cは密行列となり，このときにも相当大きな計算量と記憶領域が必要である．そこで，(2.8)式を直接解くのでなく，前処理共役勾配法を使ってこの方程式を解くことを考えるのである．

共役勾配法の主な計算は，行列とベクトルの積の演算であるので，もしこの解法によって速い収束を得ることができるならば，共役勾配法は非常に効果的な反復解法と言えるからだ．実際に，これを用いるには，収束を加速するための前処理行列を構成し，適用する必要がある．以下，順をおって，現在もっとも有効とされている前処理行列について，列挙することにする．

（1） Dryja の前処理行列[12]

(2.5) 式で与えられる行列 C に対して，Dryja は次のような前処理行列を提案した．

$$M_D = W\,\mathrm{diag}(\lambda_1^D, \lambda_2^D, \cdots, \lambda_n^D)W^T, \qquad (4.6)$$

ただし，W の各列の要素は(4.2)式で与えられる．さらに，その固有値は，(4.3b)式の σ_j を用いて

$$\lambda_j^D = -2\sqrt{\sigma_j} \qquad (4.7)$$

のように与えられる．この前処理は，ソボロフ (Sobolov) のトレース定理[17]から得られるもので，Dryja[12] は条件数 $\kappa(M_D^{-1}C)$ が格子の大きさ h に依存せず，有界となることを示した．

（2） Golub, Mayers の前処理行列[14]

Golub-Mayers は，キャパシタンス行列 C の要素が対角要素に沿ってよく近似されるという観点に立ち，次の前処理行列を提案した．

$$M_G = W\mathrm{diag}\,(\lambda_1^G, \lambda_2^G, \cdots, \lambda_n^G)W^T, \qquad (4.8)$$

ただし，この固有値は，

$$\lambda_j^G \equiv -2\sqrt{\sigma_j + \frac{\sigma_j^2}{4}}$$

で与えられる．Golub-Mayers[14] に与えられたモデル問題では，この前処理が Dryja の前処理よりも有効に働くことが示されている．

（3） Bjorstad, Widlund の前処理行列[4]

$$M_B = A_{33} - 2A_{13}^T A_{11}^{-1} A_{13}$$

この前処理は，Dryja の提案に基づいているものであるが，M_B は固有値の分解によって

$$M_B = W\,\mathrm{diag}(\lambda_1^B, \lambda_2^B, \cdots, \lambda_n^B)W^T, \qquad (4.9)$$

となる．ただし，この固有値は，

$$\lambda_j^B = -2\left(\frac{1-\gamma_j^{m_1+1}}{1+\gamma_j^{m_1+1}}\right)\sqrt{\sigma_j + \frac{\sigma_j^2}{4}}$$

で与えられる．

（4） Chan の前処理行列[8]

$$M_c = W\mathrm{diag}(\lambda_1^c, \lambda_2^c, \cdots, \lambda_n^c)W^T, \qquad (4.10)$$

ただし，この固有値は

$$\lambda_j^c = -\left(\frac{1-\gamma_j^{m_1+1}}{1+\gamma_j^{m_1+1}} + \frac{1+\gamma_j^{m_2+1}}{1-\gamma_j^{m_2+1}}\right)\sqrt{\sigma_j + \frac{\sigma_j^2}{4}}$$

で与えられる．

この前処理は，Dryja の前処理行列や Golub-Mayers の前処理を改善したものである．

ここで述べた4つの前処理行列は，おのおの独立に開発されたものであるが，みな同じ行列分解に基づいている．これらの前処理行列の固有ベクトルはすべて同じなので，実際にはその固有値が問題となるのである．特に長方形の構造物においては，M_c が正確な前処理行列であるものとすると，M_D, M_c, M_B の順に M_c をよりよく近似する前処理行列となっている．

次に，Chan の提案した前処理の固有値の極限を考えてみると，

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty \\ m_2\to\infty}} \lambda_j^c = -2\sqrt{\sigma_j + \frac{\sigma_j^2}{4}} = \lambda_j^G$$

のようになり；Golub-Mayers の固有値に一致することが分かるのである．

4.3 行列 A が分離できない問題

行列 A が分離できないときには，A_{11} や A_{22} に対して fast solver を使用できない．そこで反復法によって，キャパシタンス行列を係数とする方程式を解くためには，おのおのの反復で，インタフェース上の方程式を効果的に解くような方法を作らない限り，安あがりに計算できない．そこで，インタフェースにおけるキャパシタンス行列だけでなく，すべての構造物において(2.4)式を解くことを考えると，(2.4)式に対する前処理行列は，キャパシタンス行列に対する前処理行列から次のように導くことができる．今，小行列 B_{11} と B_{22} を A_{11} と A_{22} の近似行列とし，(2.4)式で表される行列Aを次のように分解する．

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ A_{31} & A_{32} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & A_{11}^{-1}A_{13} \\ & I & A_{22}^{-1}A_{23} \\ & & I \end{bmatrix}$$

ただし，行列 C は(2.5)式で表されるキャパシタンス行列である．このような分解を用いることにより，行列 A に対する次の前処理行列 M を構成することができる．

$$M = \begin{bmatrix} B_{11} & & \\ & B_{22} & \\ A_{31} & A_{32} & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & B_{11}^{-1}A_{13} \\ & I & B_{22}^{-1}A_{23} \\ & & I \end{bmatrix}$$

ただし，M_1 はキャパシタンス行列 C に対する前処理行列となっている．また，行列 M は，B_{11} と B_{22} を係数とする方程式を fast solver を利用して解くことができるので，ブロック・ガウスの消去法を用いることで簡単に逆元を計算することができる．最初，このような前処理行列は，Bramble et al.[6),7)] によって用いられた．彼らは，キャパシタンス行列 C に対する前処理行列 M_1 として，実際に Dryja の M_D と Bjorstad の M_B を利用したのである．このような前処理行列を用いた応用例と詳細な数値実験については，Keyes et al.[16)] を参照してほしい．

キャパシタンス行列に対する前処理の最近の話題に関しては，Axelsson et al.[1)] を参照してほしい．

5. 数 値 例

図-1 に示した T 型の構造物 Ω において，ディレクレ境界条件をもつポアソン方程式が成り立つ場合に，前述のおのおのの前処理がどんなふるまいをするのか比較する．ここで，Ω は一様な格子点をもち，インタフェース上で $n=15$ の格子点をもつものとする．構造物 Ω の部分構造物である Ω_1 において，y 軸方向の内部の格子点の数 m_1 を変化させ，$(m_1+1)/(n+1)$（これを aspect ratio という）と，前処理したキャパシタンス行列の条件数を計算し比較した結果を図-3 に示した．

この図から，ここで提案した前処理の中では，特に，Chan によって提案された前処理 M_c の性能がよいことが分かるだろう．これは，たとえ部分構造物 Ω_1 が非常に細くなっても，前処理された行列の条件数は，ほかのものに比較して，非常に小さく抑えられていることである．また，aspect ratio といわれる $(m_1+1)/(n+1)$ が 1 より大きいときには，Dryja の提案した前処理を除いて，前処理を施したすべての行列の条件数がほぼ同じ値になり区別できないのである．前処理行列と条件数に関する詳細な数値例は，16) を参照されたい．

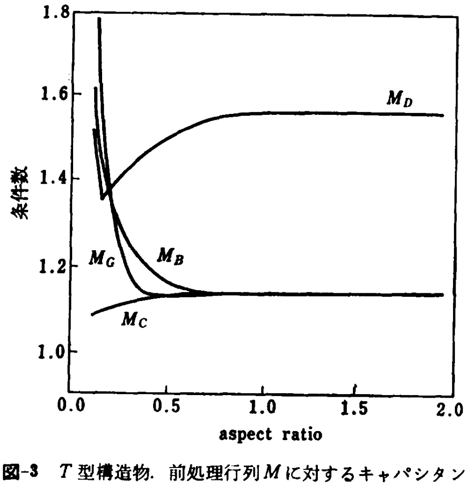

図-3 T 型構造物．前処理行列 M に対するキャパシタンス行列の条件数の変化
M_D: Dryja　M_G: Golub-Mayers
M_B: Bjorstad-Widlund　M_C: Chan

6. お わ り に

本稿では，自然現象のモデル化により得られる偏微分方程式の離散化方程式に対して，部分構造法の基本的な概念と，キャパシタンス行列に対する有効な前処理行列の構成法について，ディレクレ境界条件をもつポアソン方程式を例にあげて述べてきた．

ここで取りあげた問題だけでなく，より一般的な問題に対する部分構造法の適用は，より大型の並列計算機の出現によって今後ますます増えるものと思われる．しかし，並列計算に関しては，いくつかの興味ある疑問も残されている．たとえば，超大型の問題に対して複数のプロセッサを使って並列計算を行った場合，単体のプロセッサを使ったときと比較して，どの程度まで計算速度の向上が望めるのか．さらに，構造物の分解の形態，構造の形態，計算機による変数設定や算法の選択によって影響される並列計算用の算法の性能がどの程度のものなのか，という疑問が次々に起こるのである．

最後に，キャパシタンス行列に対する前処理行列の構成方法は，ここで述べたような特殊な問題に関してはスペクトラル解析を用いて直接構成できる．しかし，この他の構造物に関しては，それほど簡単に前処理行列を構成できないので，今後さらに検討を加える必要があるように思われる．

参 考 文 献

1) Axelsson, O. and Polman, B.: Block Preconditioning and Domain Decomposition Methods, II, J. of Comp. and Appl. Maths., Vol. 24, pp. 55-72 (1988).
2) Bank, R. and Rose, D.: Marching Algorithms for Elliptic Problems. I: The Constant Coefficient Case, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 14, No. 5, pp. 792-828 (1977).
3) Birkhoff, G. and Lynch, R. E.: Numerical Solution of Elliptic Problems, SIAM (1984).

4) Bjorstad, P.E. and Widlund, O.B.: Iterative Methods for the Solution of Elliptic Problems on Regions Partitioned into Substructures, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 23, No. 6, pp. 1097-1120 (1986).
5) Bramble, J.H.: A Second Order Finite Difference Analogue of the First Biharmonic Boundary Value Problem, Numer. Math., Vol. 9, pp. 236-249 (1966).
6) Bramble, J.H., Pasciak, J.E. and Schatz, A. H.: An Iterative Method for Elliptic Problems on Regions Partitioned into Substractures, Math. Comp., Vol. 46, pp. 361-369 (1986).
7) Bramble, J.H., Pasciak, J.E. and Schatz, A. H.: The Constraction of Preconditioners for Elliptic Problems by Substractures, Math. Comp., Vol. 47, pp. 103-134 (1986).
8) Chan, T.F.: Analysis of Preconditioners for Domain Decomposition, SIAM J. of Numer. Anal., Vol. 24, No. 2, pp. 382-390 (1987).
9) Chan, T.F., Resasco, D.C. and Saied, F.: A Domain Decomposed Fast Poisson Solver on a Rectangle, SIAM J. Sc. Stat. Comp., Vol. 8, No. 1, pp. 14-26 (1987).
10) Chan, T.F. and Resasco, D.C.: Hypercube Implementation of Domain Decomposed Fast Poisson Solvers, in Proceeding of Second Conference on Hypercube Multiprocessors (M. Heath ed.), SIAM (1986).
11) Concus, P., Golub, G.H. and Meurant, G.: Block Preconditioning for the Conjugate Gradient Method, SIAM J. on Sci. and Stat. Comp., Vol. 6, pp. 220-252 (1985).
12) Dryja, M.: A Capacitance Matrix Method for Dirichlet Problem on Polygonal Region, Numer. Math., Vol. 39, pp. 51-64 (1982).
13) Curtis, A.R., Powell, M.J.D. and Reid, J.K.: On the Estimation of Sparse Jacobian Matrices J. Inst. Maths, Applics., Vol. 13, pp. 117-119 (1974).
14) Golub, G.H. and Mayers, D.: The Use of Preconditioning Over Irregular Regions, (Glowinski, R. and Lions, J.L. Editors), Elsever Science Publ., pp. 3-14 (1984).
15) Glowinski, R. et al.: Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM (1988).
16) Keyes, D. and Gropp, W.: A Comparison of Domain Decomposion Techniques for Elliptic Partial Differential Equations, SIAM J. Sc. Stat. Comp., Vol. 8, No. 2, pp. 166-202 (1987).
17) Lions, J.L. and Magenes, E.: Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. I and II, Springer (1972).
18) Marchuk, G.I., Kuznetsov, Y.U. and Matsokin, A.M.: Fiction Domain Decomposition Methods, Soviet Numer. Anal. Math. Modeling, Vol. 1, pp. 3-35 (1986).
19) 名取 亮, 野寺 隆：大規模行列計算における反復解法, 情報処理, Vol. 28, No. 11 (1987).
20) 野寺 隆：大型疎行列に対する PCG 法, Seminar on Mathematical Science (Keio University) No. 7, マテマティカ (1983).
21) Nodera, T.: Domain Decomposition Techniques and PCG Method, Advances in Numerical Methods for Large Sparse Sets of Linear Equations, No. 4, pp. 6-10 (1988).

(平成元年3月24日受付)