

解 説

一般座標系での差分法による流れの
シミュレーション†

桑 原 邦 郎††

1. はじめに

ナヴィエ・ストークス方程式を解析的に解くということは、ごく特別な場合をのぞいてほとんど不可能に近い。現在その解を求めるもっとも現実的な方法は数値計算であろう。スーパーコンピュータの出現と数値計算法の発展によって、今ではかなり実用的な問題まで数値的に解を求めることが可能になってきた。

歴史的には1930年代から始まったナヴィエ・ストークス方程式の数値計算は、1953年川口による円柱を過ぎるレイノルズ数40の流れの計算によって初めて認知されたといつてよいだろう。しかし、このころはまだ電子計算機が実用化されておらず、川口のは手回し計算機を1年半回しつづけたという努力の結果であった。その後、電子計算機の実用化とともに、いろいろな問題の数値解が蓄積され、それらを解く多くの手法の開発とあいまって、計算流体力学とよばれる新しい分野を形づくるにいたっている。

圧縮性まで考えに入れた流体運動の基礎方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \delta_{ij} + \rho v_i v_j) \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (e + p) v_i \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \mu v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

$$e - \frac{\rho}{2} v_i^2 = \rho c_v T, \quad (4)$$

$$\delta + \frac{2}{3} \mu = 0 \quad (5)$$

となる。ここで ρ は密度、 p は圧力、 λ は第2粘性率、 μ は粘性率、 κ は熱伝導率、 e は単位体積あたりの全エネルギー、 C_v は定積比熱、 T は温度である。

(1)は質量保存、(2)は運動量保存、(3)はエネルギーの保存をそのまま表現したものである。(4)は内部エネルギーと温度との関係、(5)は二つの粘性率の間のストークスの関係である。

この方程式を差分化して、適当な初期および境界条件の下で数値的にとけば目的を達するわけだが、それにいたる道は、それほど単純ではない。以下、この方程式が実用上意味のある問題に適用され、実験と比較しうる精度で解がいかんして求まるようになったかを順をおって解説してみる。

2. 保存型

前項の方程式(1)、(2)、(3)がいわゆる保存型で書かれていることに注意しよう。一般に保存型とは、方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

と書くことをいう。このように表現するということは、ガウスの定理によって

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dv + \int_S \vec{J}_i dS = 0 \quad (7)$$

と書けることを意味し、このことは(6)式がただちに解析的に一回積分可能であることをいっている。実は、方程式(6)が導かれるとき、逆にまず保存則から(7)が得られ、それを微分することによって(6)式が得られたのである。解析的な取扱いのときは、方程式が保存型で書かれているかどうかは本質的ではないが、もとの方程式を差分化するときにはかならず誤差をとまなうわけで、そのときの誤差の入り方が物理的に不自然にならないために保存型に書かれるということが非常に大きな意味をもってくる。またそれだけでなく、あとで触れるように保存型に書くと、座標変換が非常に簡単になり、どんな座標系でも同じように解

† Flow Simulation by Finite Difference Method Using Generalized Coordinates System by Kunio KUWAHARA (The Institute of Space and Astronautical Science).

†† 宇宙科学研究所

を求めることができる。簡単な例としてバーガース方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

を考えてみよう。ここで、 ν は拡散係数である。これを保存型に書きなおすと

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (9)$$

これを区間 $(-\Delta x, \Delta x)$ で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} u dx + \frac{1}{2} u^2 \Big|_{\Delta x} - \frac{1}{2} u^2 \Big|_{-\Delta x} - \nu \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{-\Delta x} \right\} = 0 \quad (10)$$

となる。この式は何も近似がされておらず(8)式と同値であることに注意しよう。このことから、非線形項 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ は

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \frac{u^2|_{\Delta x} - u^2|_{-\Delta x}}{2\Delta x} \quad (11)$$

という形で差分化したほうが、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u \Big|_0 \cdot \frac{u|_{\Delta x} - u|_{-\Delta x}}{2\Delta x} \quad (12)$$

と差分化するより精度がよいだろうと予測される。実際方程式(8)をこの二種類の差分化で解を求めた結果を図-1に示す。(12)の型の差分化をもちいると、不自然なピークが現れてしまう。すなわち、保存型に書いて差分化するということは、2回積分すべきうち、1回は解析的に積分ができ、あとの1回を数値的に積分するということはほぼ等価になり、2回とも数値的に積分するより精度がよくなるのが当然である。したがって、非保存型で書くことが特別な利点をもつような場合以外は、もとの方程式を保存型に書きなおしてから差分化すべきである。

3. 自然な座標系

角柱や円柱をすぎる流れを求めるときには、デカルトあるいは極座標を用いるのがいいだろうということはすぐ分かる。しかし翼型のような場合、ひとつの座標線が物体表面に沿うような座標系(これを自然な座標系とよぶ)はすぐには見つからない。ひとつの逃げ道は、自然な座標系を用いず、デカルト座標を用いて、物体表面の物理量は内そう法で求めるという方向である。レイノルズ数の低い流れではこの方法もうまくいくことが多いが、レイノルズ数が大きくなると境界層を正しく取り扱うことがきわめて大切になってくるので、この方法はよほど格子数が多くないとだめである。したがって、どうしても自然な座標系を求めることが必要になってくる。このような試みは1960年代の後半からいくつか現れたが、まず始めに、一般的でかつ有効なことがたしかめられたのが、Thompson-Thames-Mastin によるものである(図-2)。これは

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (13)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (14)$$

という二つのポアソン方程式を解いて、 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ という変換を定めようというものである。(13)、(14)式はいわば熱源が P, Q という強さで分布しているときの平衡状態の温度分布を表しているわけで、等 η 線は物体表面 Γ_1 の温度を T_1 、外部環境 Γ_2 の温度を T_2 としたときの等温線になり、等 ξ 線は Γ_3, Γ_4 でカットを入れ、 Γ_3 で T_3, Γ_4 で T_4 という温度を与えたときの等温線になっている。いちばん簡単に $P, Q=0$ とすると、ラプラス方程式を解くことになり、これは熱源が内部にないときの温度分布になり、滑らかな自然な座標系が得られることは容易に理解されよう。また Q を適当に選ぶことにより境界層

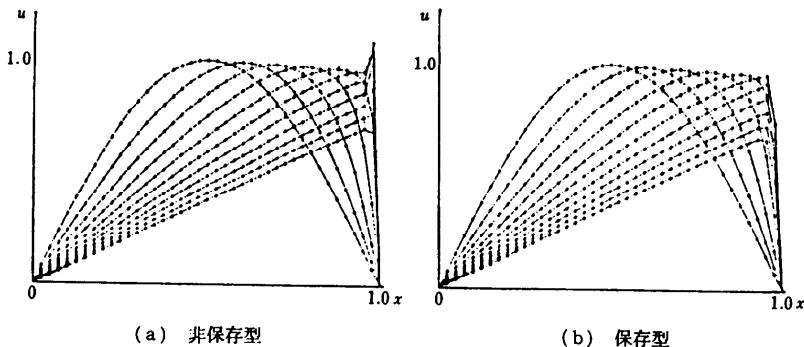


図-1

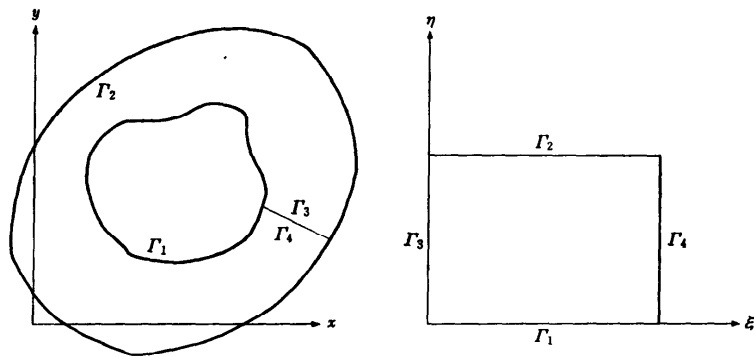


図-2 物理空間から計算空間への変換

の中の座標間隔を密にすることが自由にでき、また P と物体表面上の温度分布を調整することによって翼後縁附近の座標間隔を密にすることというたぐいのことができるわけである。実際に (13), (14) 式を解くには、分かっている計算表面上の点 (ξ, η) に対応する物理平面での座標点 (x, y) を求めるわけであるから、独立変数と従属変数とを入れかえて、

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2[x\xi P(\xi, \eta) + x\eta Q(\xi, \eta)] \quad (15)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2[y\xi P(\xi, \eta) + y\eta Q(\xi, \eta)] \quad (16)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (17)$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (18)$$

という方程式を解くことになる。このようにして得

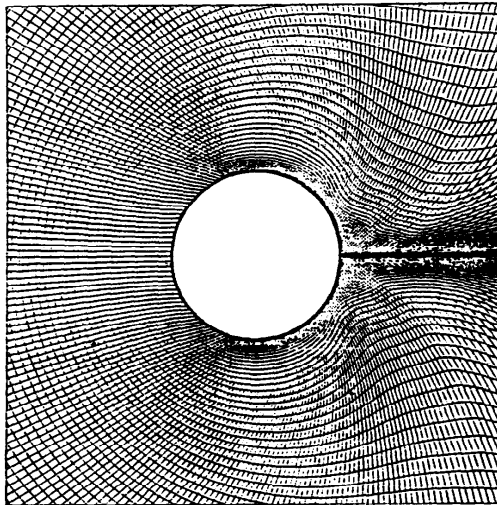


図-3 一般座標の例

られた座標系の例を図-3 に示す。これは偏微分方程式を解いて座標の格子点を求める方法であるが、必ずしもこれが唯一の方法ではない。どんな方法でもよいから、整った構造をもった格子点の集まりをつくりだせばよい。それは別の偏微分方程式を解いてよいし、代数的に求めてもよい。最近では計算時間のかからない代数的方法が主流になりつつある。とくに、複雑な形状のまわりの座標系はいろいろな手法をあわせなければよいものがない。

4. 一般座標系でのナビエ・ストークス方程式

せっかく自然な座標系が得られたとしても、その座標系で表現されたナビエ・ストークス方程式があまり複雑になってしまえば計算不可能であるが、幸い比較的きれいな、デカルト系で書かれたものと同じ形に保存型を保ったまま変換されることが分かった。

デカルト系では (1), (2), (3) をまとめると 2 次元のとき、

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{q} + \partial_x \vec{E} + \partial_y \vec{F} &= Re^{-1} (\partial_x \vec{R} + \partial_y \vec{S}) \\ \vec{q} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}, \\ \vec{R} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ R_4 \end{bmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ S_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y, \\ \tau_{xy} &= \mu(u_y + v_x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= (+2\mu)v_y + \lambda u_x, \\
R_1 &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + kP_r^{-1} \cdot (\gamma-1)^{-1} \partial_x a^2, \\
S_1 &= u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + kP_r^{-1} \cdot (\gamma-1)^{-1} \partial_x a^2, \\
\rho &= (\gamma-1) \left[e - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right] \\
a^2 &= \gamma(\gamma-1) \left[\frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right], \\
\gamma &= C_p/C_v.
\end{aligned} \quad (20)$$

である。ここで R_r はレイノルズ数, C_p は低圧比熱, k は熱拡散係数, P_r はプラントル数である。一般座標では,

$$\begin{aligned}
\partial_i \hat{q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} &= Re^{-1} (\partial_\xi \hat{R} + \partial_\eta \hat{S}) \\
\hat{q} &= \vec{q}/J, \\
\hat{E} &= (\varepsilon_i \vec{q} + \xi_x \vec{E} + \xi_y \vec{F})/J, \\
\hat{F} &= (\eta_i \vec{q} + \eta_x \vec{E} + \eta_y \vec{F})/J, \\
\hat{R} &= (\varepsilon_x \vec{R} + \xi_x \vec{S})/J, \\
\hat{S} &= (\eta_x \vec{R} + \eta_y \vec{S})/J
\end{aligned} \quad (21)$$

となる。(21)式は、デカルト系での(18)式とまったく同じ形式で書かれ、かつ一般座標系での E, F, R, S もデカルト座標系の対応する量から、簡単な変換で得ることができることに注意しよう。

一般的に時間 t を含んだ、2次元デカルト座標系 (t, x, y) で

$$\frac{\partial A_t}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$$

と表現される方程式は一般座標系 (τ, ξ, η) で

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} = 0$$

と変換されることが分かっているからである。

ここで (A_τ, A_ξ, A_η) は

$$\begin{pmatrix} A_\tau \\ A_\xi \\ A_\eta \end{pmatrix} \frac{1}{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial t} & \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

である。

5. レイノルズ数が高いときの計算法

実際の流れを考えると、無次元パラメータ・レイノルズ数 Re が非常に大切である。レイノルズ数は流れの中での粘性による拡散の影響の強さの目安を与えている。レイノルズ数 100 程度以下の流れは、拡散の影響が強く、流れは層流と呼ばれる滑らかなものであるが、レイノルズ数が大きくなるにしたがって、流れ

の非定常性が強くなり、小さな渦が多く発生するようになる。それが 10000 以上になると、流れはその拡散の影響が小さくなり、乱流と呼ばれる複雑なものになるのが普通である。日常経験する多くの流れは、レイノルズ数 10 万程度以上のものが当たり前であって、このような大きなレイノルズ数の流れをいかに取り扱うかが、大変重要である。

流れを差分法で解くということは、まず適当な座標系を求めて、その格子点上の値を、その格子間の関係を偏微分方程式の関係式に基づいて近似して、求めていくわけである。そのとき、格子点の数が問題になる。この格子点数は、大きければ大きいほど流れをよく近似できるのだが、計算機の能力とかメモリとか計算スピードなどから制約を受ける。そこでその限度を見積もってみると、レイノルズ数が 1000 ぐらいまでは、今の計算機をギリギリいっぱい使えばそのレイノルズ数で現れる細かな変動まで、すべて何とか捉えられる。しかし、本当に重要であるレイノルズ数 10 万とか 100 万というレベルのものは、もう絶望的であることが分かっている。では諦めざるをえないかというと、諦めていたら何も解析できないわけである。いままで多くのモデルが提案され、多くの人々が苦勞してきた。それらの多くは、そのモデル化としてもっともスケールの大きい拡散がある、または強い拡散があると見なし、普通の拡散現象と拡散係数が違うだけだと仮定して近似したものが、ほとんどであった。ところが、大きな拡散係数をいれたモデルは、結果的にレイノルズ数が非常に低い流れの状況に近づいてしまい、レイノルズ数が高いときの複雑な変化はうまく捉えることができない。

ところが、きわめて細かい変動もいっぱいあるには違いないが、それよりはもっと大きな渦の構造がどうなっているのかが、われわれが本当に知りたいことなのである。細かい点が重要になることもあるが、可能なメッシュの範囲内で、そのレベルでは絶対解像できない細かな変動はあえて解像しないで、大きな構造を捉えられるか否かが一番肝心な点であった。

しかし、単純にあらひ格子で計算すると、エイリアジング・エラーという重要な意味をもつ誤差が生まれてしまう。それはどういうことかというと、非常にあらひメッシュでゆっくりした流れ現象を捉えるときは構わないが、そのメッシュで解像できないような細かい変動を表現しようとする、もっとゆっくりした現象と見間違ってしまう現象である。

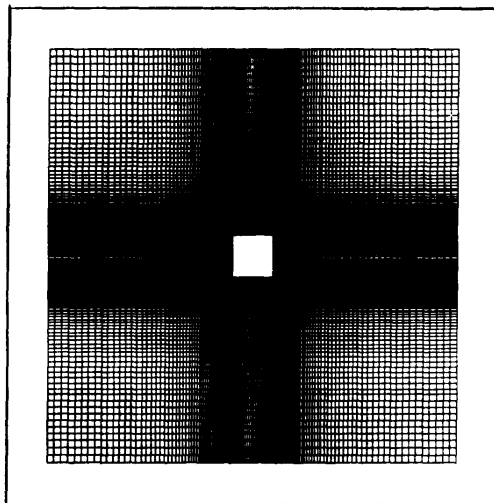
そういう非常に速い現象を、ゆっくりした現象と見誤ってしまうような、速くて大きい、または速くて細かな変動をなんらかの意味で抑えてやらないかぎり、計算は全部駄目になってしまう。そこで、このエラーを数値的に局所的な拡散で取り除く工夫を行い、比較的あらいメッシュでも高いレイノルズ数流れの大きな構造をきっちり捉えることができるようになってきた。

これにはいくつかの方法があるが、今まで成功したほとんどすべての方法は4階微分で表される拡散項が付加されていることである。この拡散項は格子間隔以

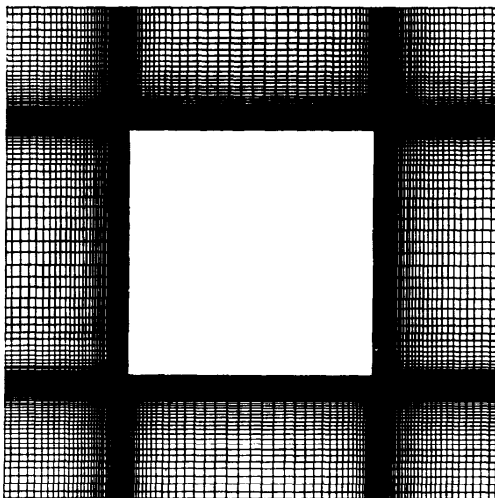
下の変化をならし、かつ2階微分の粘性拡散項より遠くへの影響がないので、レイノルズ数の高い場合をシミュレートしても、解が拡散的になりすぎることはない。

6. 計算例

角柱をすぎる流れ、角柱であるから、デカルト座標系を用いてもできるはずであるが、これを使うと、高いレイノルズ数の流れで一番重要な、境界層に格子点を集中することが大変難しくなってしまう。無理をして、図-4のように境界に格子を集中すると、格子の細かい部分が流れの中にも出てしまい、計算の安定



(a) 角柱まわりを直交座標をもちいた例



(b) 拡大図

図-4

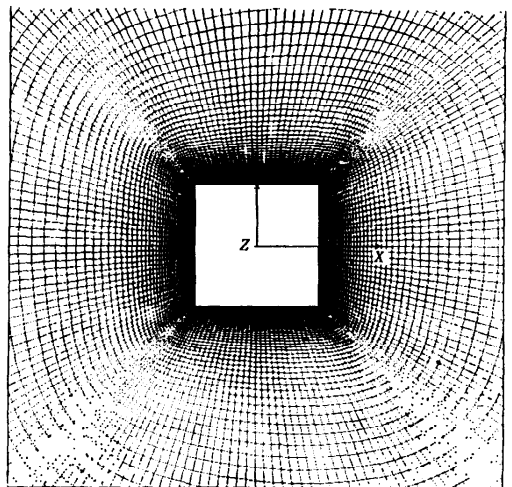


図-5 一般座標系による例

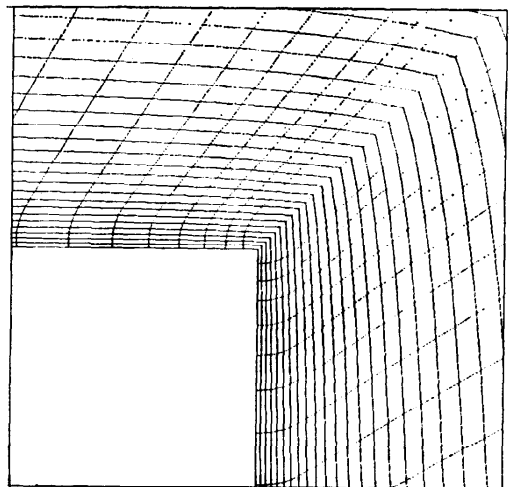


図-6 角のまわりの拡大図

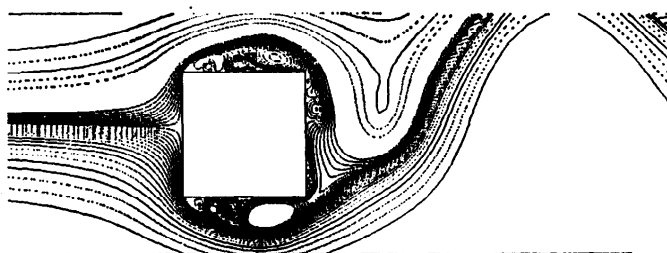


図-7 角柱まわりの計算例 (流線)

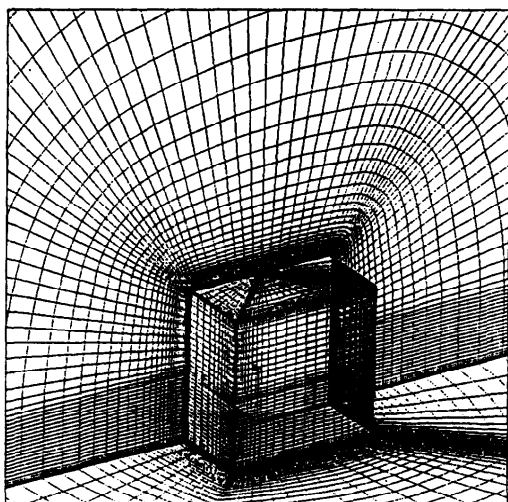


図-8 地面におかれた立方体のまわりの座標

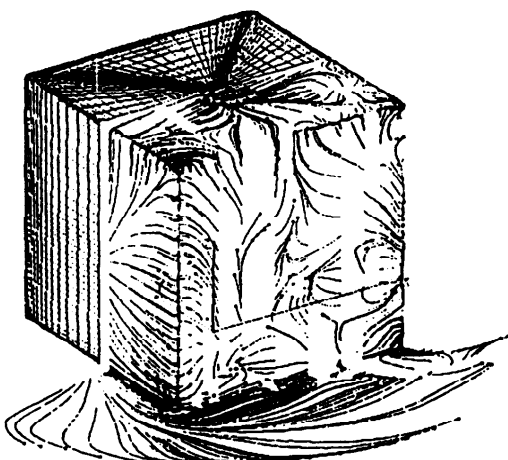


図-9 表面流線

条件を満たしにくくなって、精度のいい計算ができなくなる。それに対して、図-5 のように角柱を取り巻くO型の座標をつくと、境界層だけにうまく格子を

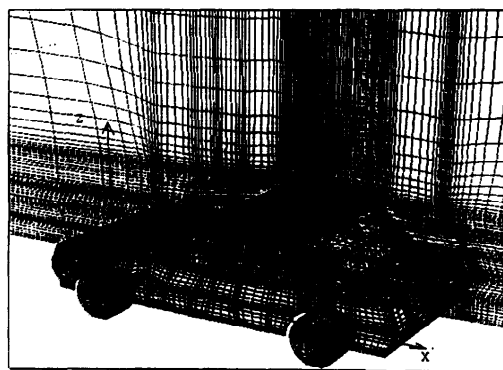


図-10 自動車まわりの座標

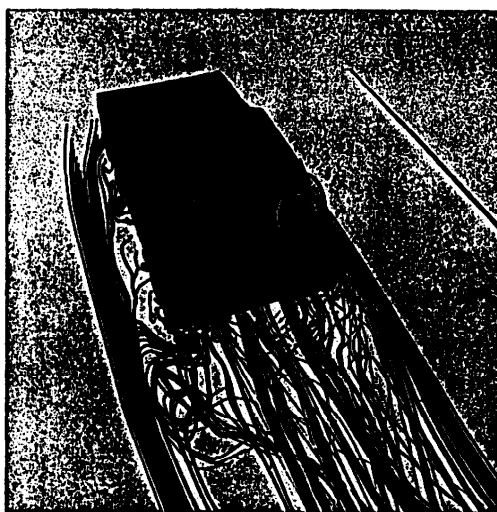


図-11 自動車まわりの瞬間流線

集中させることができ、精度のよい計算が行いやすくなる。ただし、この例では、鋭い角があるので、注意が必要である。角のまわりの拡大図-6 を示す。このような座標を用いて計算した結果を図-7 に示す。

3次元の例として、四角柱の回りの計算例を示そ

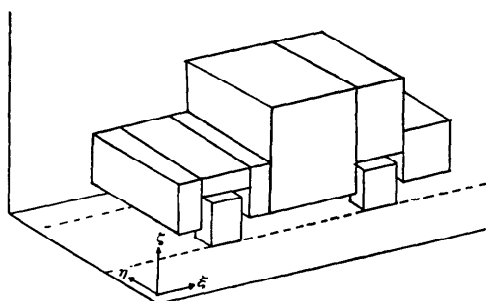


図-12 自動車まわりの座標のブロック化

う。3次元ではとり得る格子点に厳しい限度があるので、無駄のないように、重要なところに格子点を集中させることが、2次元以上に重要になる。この例では、境界層と、角の回りが本質的であるので、その回りに格子点が集中されていることがよくみられる(図-8)。この例では、トポロジの関係からあまり重要でない中心軸上にも、格子点が集中してしまっているが、このようにどうしても避けられない無駄な集中が出てしまうこともある。計算結果を図-9に示す。

最後に、複雑な例として、自動車回りの3次元の例を示す(図-10)。計算結果を図-11に示す。この例では、複雑すぎて、物体に合わせたひとつの座標系で作ることができないので、いくつかのブロックにわけ、最後にそれをまとめあげるということをしている(図-12)。

7. 最後 に

このように、一般座標系を用いて流れをシミュレートするということは、ほとんどいかにいい座標を生成するかにかかっている。またこの座標系は物体の型に固有のものであるので、問題ごとに作りなおす必要が

ある。これはほとんど手作業で行っているのが普通であり、これをいかに自動化していくかが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) Kawaguchi, M.: Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 8, No. 6, pp. 747-757 (1953).
- 2) Ishii, K., Kuwahara, K., Ogawa, S., Chyu, W. J. and Kawamura, T.: AIAA paper 85-1660 (1985).
- 3) Kawamura, T., Takami, H. and Kuwahara, K.: Fluid Dynamics Research, Vol. 1, pp. 145-162 (1986).
- 4) Beam, R. M. and Warming, R. F.: An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation form, J. Comp. Phys., 22, pp. 87-110 (1976).
- 5) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W.: Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations-A Review, J. Comp. Phys., Vol. 47, pp. 1-108 (1982).
- 6) Thompson, J. F. ed.: Numerical Grid Generation, North Holland (1987).
- 7) Tamura, T., Kuwahara, K. and Shirayama, S.: Numerical Study of Unsteady Flow Patterns and Pressure Distributions on a Rectangular Cylinder, 7th International Conference on Wind Engineering, Aachen, F. R. Germany (1987).
- 8) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H.: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation (1984).
- 9) Roache, P. J.: Computational Fluid Dynamics, Academic Press (1972).

(平成元年4月18日受付)