

解説

計算流体力学における格子生成†



中橋 和博††

1. はじめに

流体の運動は非線形な方程式 (Navier-Stokes 方程式) で記述されるが、これを解析的に直接解くことは非常に困難である。それゆえ、差分法、有限体積法、そして有限要素法といった数値計算手法が現在流動解析では盛んに用いられている。その際、計算領域を点あるいはセルをもって離散化する必要があるが、この離散化作業を格子生成と呼び、最近では、任意形状物体まわりの流れ場を離散化するのにいろいろな手法が考案されている。

格子は計算法と切り離しては議論できない。現在一般的に用いられている流体計算法は、規則正しく並んだ構造格子 (Structured grid; 図-1(a)) で流れ場を細分して計算する差分法 (あるいは有限体積法) と、格子ならびに規則性を要求しない非構造格子 (Unstructured grid; 図-1(b)) を用いる有限要素法 (または有限体積法) とに分けられよう。図-1(a) の構造格子は、計算領域の境界と格子線が一致しており、境界適合座標格子 (Boundary fitted coordinate grid) とも呼ばれる。

構造格子と非構造格子では、格子の生成法も本質的に異なってくる。構造格子の生成法に関しては、す

で 10 年以上前から研究されて手法としてはすでに言い尽くされた感があり、解説の類も数多く出されている。特に文献 1) は 1984 年以前に提案された格子生成法について教科書的に詳しく解説している。一方、非構造格子の生成法に関する研究は、すでに構造解析の分野ではかなり進んでいようが、流体計算ではごく最近になって盛んになってきた段階といえる。

本稿では、流体計算に用いる格子について、前半では構造格子の格子生成法に関する基本的な事柄を解説する。そして後半では、複雑な形状まわりの流れ場に対するアプローチとして、複合格子法や非構造格子法などの格子に関する最近の話題を紹介したい。

2. 構造格子生成の基礎

2.1 境界適合曲線座標

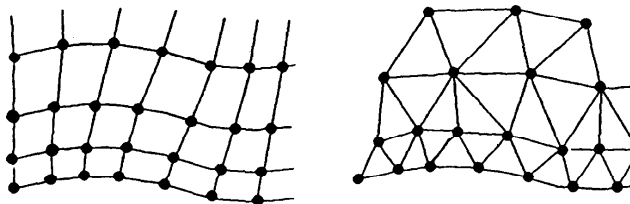
現在流体の計算で一般的に用いられている境界適合曲線座標は、物理空間 ($x-y$ 空間) 内で定義される任意形状の計算領域を、長方形 (三次元では直方体) の計算空間 ($\xi-\eta$ 空間) に写像し、その計算空間内の等間隔直交格子上で偏微分方程式の数値計算を行うものである (図-2)。したがって、通常この曲線座標では、物理空間の境界が写像空間のある座標線 (三次元では座標面) と一致する。

2.2 数値格子生成

構造格子に対する数値格子生成 (Numerical grid generation) は、任意形状の計算領域内を単に離散化するのではなく、境界適合座標への写像を可能にするように格子線を決める手順といえ、格子点は、格子線の交点として定義される。

格子生成は、さらに計算の精度、安定性などからの制約を受ける (図-3)。一

般に差分法では、滑らかな格子線を要求し、かつ急激な格子幅の変化も好ましくない。それぞれの格子線の交わりも直交に近いほうがよく、物体表面近くでは特にこのことを強く要求する。また、流れの変化の激



(a) Structured grid

(b) Unstructured grid

図-1 構造格子と非構造格子

† Grid Generations for Computational Fluid Dynamics by Kazuhiro NAKAHASHI (Department of Aeronautical Engineering, University of Osaka Prefecture).

†† 大阪府立大学工学部航空工学科

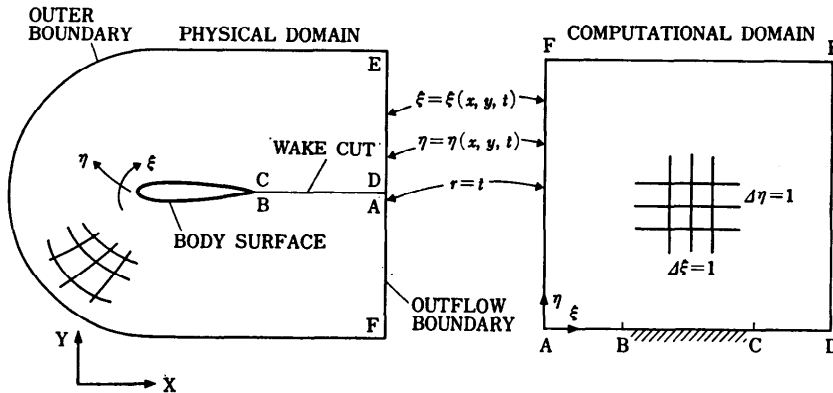


図-2 物体適合曲線座標

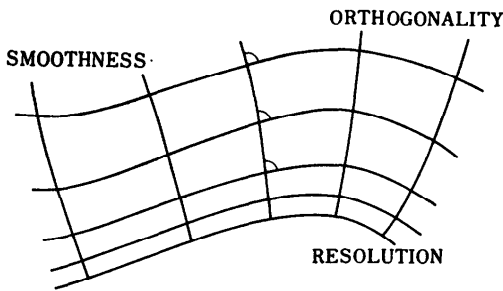
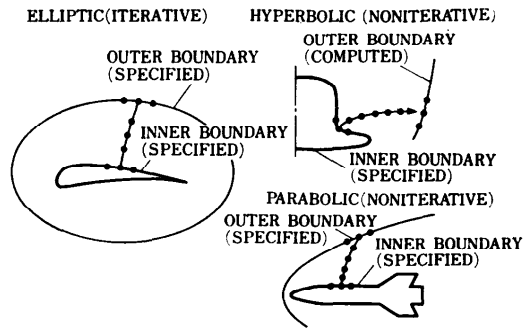


図-3 構造格子の制約

図-4 偏微分方程式を用いた格子生成法¹⁾

しい物体近くでは細かく、それ以外では粗いといった、効率よい格子点分布も計算時間の関係から重要である。

格子生成法の研究はかなり広範に行われ、すでに数多く提案されている。通常、これらの手法は二つに分類して議論される。すなわち、(1)偏微分方程式による格子生成法と(2)代数的格子生成法である。

2.3 偏微分方程式法

偏微分方程式法は、用いる方程式の型によってさらに楕円型、放物型、そして双曲型に分類される(図-4²⁾)。楕円型方程式を用いる方法は、計算領域のすべての境界上で格子点分布を指定して内部の格子を作成するもので、外部流および内部流に対するもっとも一般的な格子生成法である。一方、放物型や双曲型方程式を用いる方法は、ある境界上だけ指定して他の境界は格子生成の結果として与えられる。したがって外部流問題では効率よい格子生成法であるが、内部流にはあまり向かない。

ここでは、楕円型方程式を用いる方法について簡単に説明する。楕円型方程式としては、通常次の形のポ

アソン方程式を用いる。

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta)$$

この式の独立変数と従属変数を入れ換えると、

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta})$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta})$$

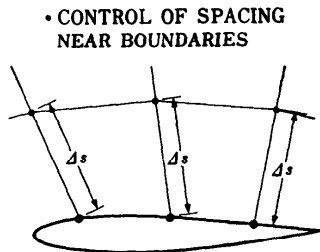
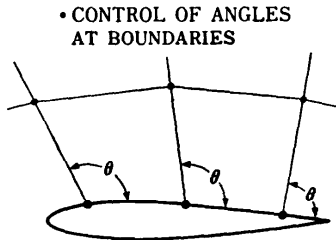
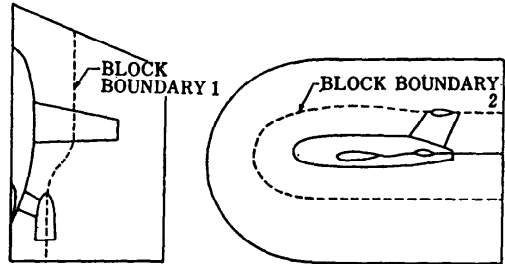
ここに、

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$$

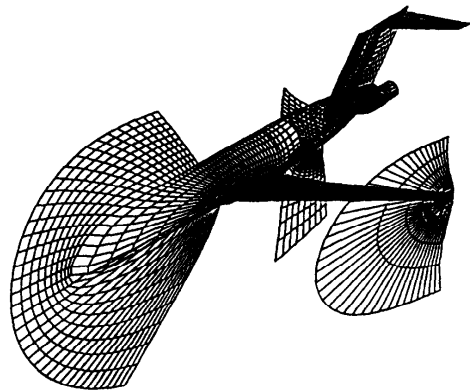
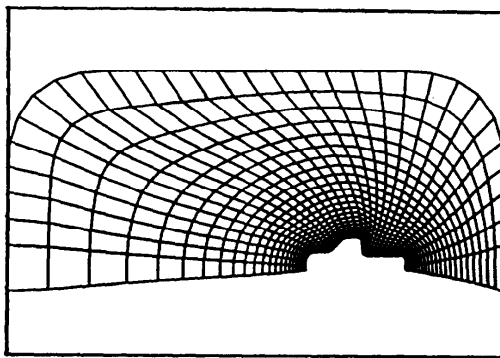
$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \quad J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$$

が導かれる。したがって格子生成は、上記の変換されたポアソン方程式を緩和法などを用いて解いて、変換式; $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ を求めることになる。ポアソン方程式の右辺は格子の特性を決めるもので、たとえば、Sorenson³⁾はこの項を繰り返し手法で決めることにより、境界近くでの格子の傾き θ と、格子幅 Δs (図-5) を直接制御するようなアルゴリズムを考案している。図-6 はこの手法を用いた格子の例である。

楕円型方程式を解くことの利点は、閉領域での境界上で境界条件を指定すると、物理面と写像面の1対1

図-5 境界での格子の制御¹⁾

Grid Generation Blocking Strategy for a Complete Airplane

図-7 楕円型方程式による三次元格子生成¹⁾図-6 楕円型方程式による二次元格子生成¹⁾

の対応が保証されることである。また、次に示す代数法よりも一般的により滑らかな格子を作ることができ、さらに、入力データの変更だけでいろいろな場の格子を生成できるような汎用格子生成プログラムの作成も可能である。

しかしながら、複雑な三次元場での格子生成はこの方程式法を用いても簡単ではない。そのため代数法との組合せや、計算領域をさらにいくつかのブロックに分け、それぞれのブロックで方程式法を適用して格子を作るという手法が用いられる。図-7¹⁾では飛行機まわりの流れ場を二つのブロックに分け、それぞれのブロックで楕円型方程式法を適用し、それらをブロック境界でつなぎ合わせて全体の格子を作成した例である。

2.4 代数法

代数法は、内挿関数およびいくつかの写像・変換関数などを用いて空間を離散化していくもので、先の方程式法ほど普遍性がないものの格子の制御という点では楽であり、複雑な形状に対しても、いくつかの代数法を組み合わせることにより、比較的簡単に格子を作ることができる。ただし、楕円型方程式を解く方法と違って、物理面と写像面の1対1の対応が保証されないために、格子の重なりなどに注意しなければならない。

代数的格子生成法に用いる基礎的な式は一般的に単純なものであり、以下に示すのは、一次元内挿関数、および二次元空間での内挿関数を用いた例である。

(1) 一次元内挿関数：線上あるいは曲線上で格子点の分布を決める方法は数多く提案されているが、ここでは Vinokur⁵⁾の手法について説明する。これは、 $\tan$ および $\tanh$ の曲線でもって線上に格子点を滑らかに分布させるもので、両端の格子幅を陽に指定でき、かつ格子点の重なりもなく非常に便利な方法である。

長さ1の線分 $x(0 \leq x \leq 1)$ 上に $i_{\max}$ 個の格子点を分布させる場合を考える。両端の格子幅 ($\Delta x_1 = \Delta x_2 =$

$x_1, \Delta x_{i \max-1} = x_{i \max} - x_{i \max-1}$) を指定すると、以下の式で格子点分布 x_i が決まる。

$$S_0 = 1/[(i \max - 1)\Delta x_1],$$

$$S_1 = 1/[(i \max - 1)\Delta x_{i \max-1}],$$

$$B = \sqrt{S_0 S_1}, \quad A = \sqrt{S_0/S_1}, \quad \xi_i = (i-1)/(i \max - 1)$$

とすると

$B > 1$ のとき

$$B = \sinh(\Delta z)/\Delta z$$

$$x_i = \frac{\tanh(\xi_i \Delta z)}{A \sinh(\Delta z) + [1 - A \cosh(\Delta z)] \tanh(\xi_i \Delta z)}$$

$B < 1$ のとき

$$B = \sin(\Delta z)/\Delta z$$

$$x_i = \frac{\tan(\xi_i \Delta z)}{A \sin(\Delta z) + [1 - A \cos(\Delta z)] \tan(\xi_i \Delta z)}$$

$B \approx 1$ のとき

$$x_i = U_i/[A + (1-A)U_i],$$

$$U_i = \xi_i[1 + 2(B-1)(\xi_i - 0.5)(1-\xi_i)]$$

この手法をスプラインなどと組み合わせると、任意曲線上での格子分布が可能になる。

(2) 二次元内挿法：二次元、三次元空間での内挿法も数多く提案されているが、ここでは、Transfinite Interpolation 法⁶⁾について紹介する。物理空間 (x, y) から計算空間 (ξ, η) への写像関数： $f = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$, $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ を考える。この関数が境界上で既知とすると、以下の2ステップの形で全空間での f が求められる。

$$f_1(\xi, \eta) = \alpha_1(\xi)f(\xi_1, \eta) + \alpha_2(\xi)f(\xi_2, \eta)$$

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) + \beta_1(\eta)[f(\xi, \eta_1) - f_1(\xi, \eta_1)] \\ + \beta_2(\eta)[f(\xi, \eta_2) - f_1(\xi, \eta_2)]$$

α, β は0から1に変化する混合関数である。実際には、上式にさらに境界上での格子線の傾きを制御する項⁶⁾を追加する必要がある。また、三次元ではさらにもう1ステップを追加すればよい。

図-8⁷⁾は戦闘機まわりの流れ場を20のブロックに分け、それぞれのブロック内では Transfinite Interpolation を用いて格子を生成した例である。この方法の利点は、格子線の制御の容易さとともに、非常に短時間で格子を作成できることから、特にグラフィック端末上での会話処理による格子生成には有効な手段であろう⁸⁾。

代数法の別のアプローチとしては、等角写像を用いる方法がある。図-9⁹⁾は、等角写像および種々の代数的手法を組み合わせる複雑な空間を単一の格子で記述した例である。

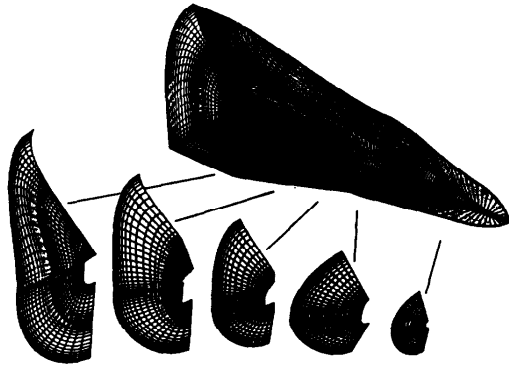


図-8 代数法による三次元格子生成⁷⁾

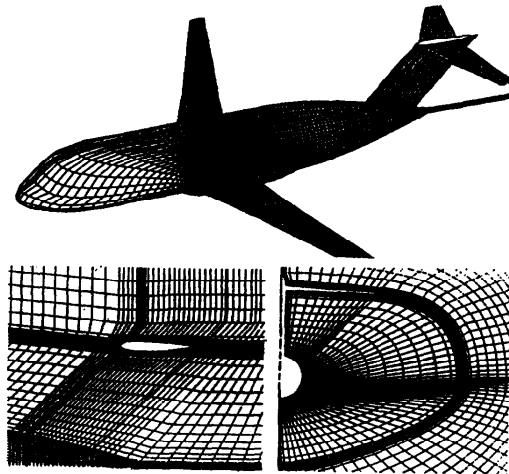


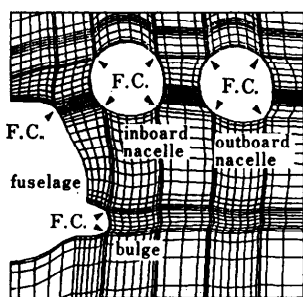
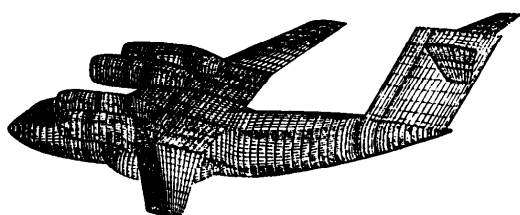
図-9 代数法による三次元格子生成⁹⁾

3. 複雑な形状に対する格子生成

上記の構造格子を用いる計算法（有限差分法、有限体積法）は近年著しく計算効率が改善され、流れの計算に広く用いられている。しかしながら、複雑な物体形状まわりの流れや、流れ場の中にいくつも物体があるような問題では格子生成が困難になり使いづらいものとなる。特に三次元場では、構造格子を用いるかぎり単一の格子で全体を記述することがきわめて困難な場合が多い。そこでこのような複雑な空間に格子を作成するために、近年いろいろな手法が研究されている。図-10～図-18 はその代表的なアプローチを示したものである。

3.1 マルチブロック法

マルチブロック法¹⁰⁾は、計算領域をいくつものプロ

図-10 Multi-block 法による格子生成¹¹⁾

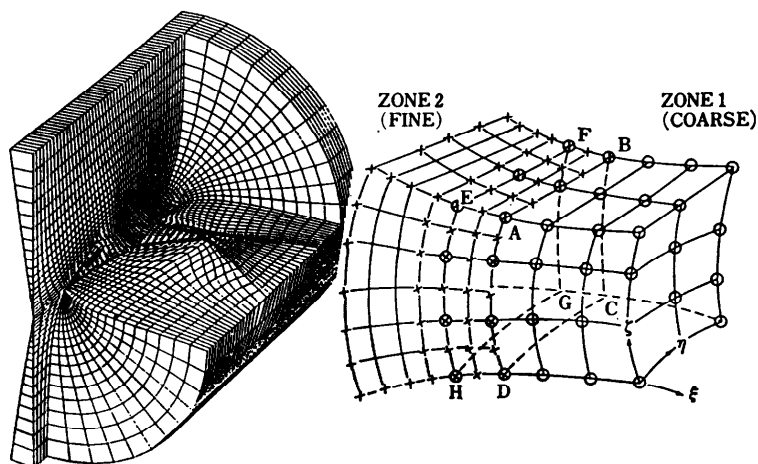
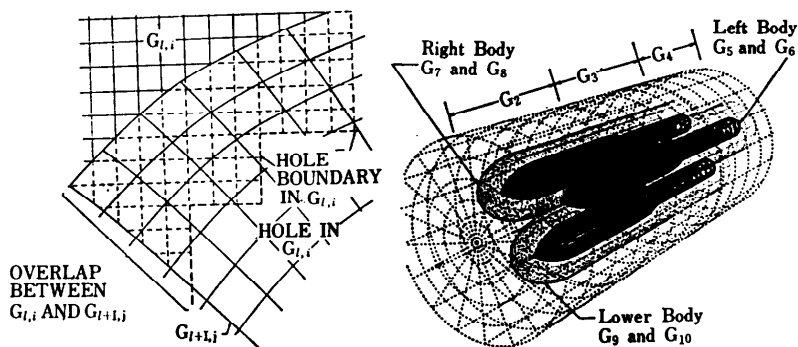
ックに分け、それぞれのブロック内はHタイプの格子で分割していく手法で、複雑な形状まわりの流れ場でも比較的簡単に格子生成が可能となる。ただし、このブロック分けは格子生成時のみで、計算時には全体を単一の格子として扱い、この点で次節に示す複合法とは大きく異なる。このとき、計算領域外（たとえば物体内部）にも格子点が存在することになるが、これらは計算時にはダミー点として扱われる。図-10は航技研 STOL 機にこの手法を適用して生成した格子である¹¹⁾。

この方法の欠点としては、H型格子を用いるために丸い断面形でも計算空間では角をもつことになり、この角 (Fictitious corner) を計算の際に適切に処理しなければならないこと、および格子点の無駄が多いこ

とであろうが、近年の計算機ハードの進歩を考えると、格子生成の容易さというこの手法の利点は非常に大きい。最近では、自動車まわりや車室内などの複雑な流れ場にもこのマルチブロック法が適用され、素晴らしい結果を出している¹²⁾。

3.2 複合格子法

複雑な形状まわりの計算法として複合格子法 (図-11~13) が最近盛んに研究されている。これは、流れ場をいくつかの領域に分割して解くというもので、おのおの領域で独立に格子を生成するため、従来の単一領域での計算における格子生成の困難をかなり軽減しており、特に三次元問題では重要な技術である。またこの手法は、格子生成を容易にするほかに、領域別に違った方程式や計算法を用いて計算効率を上げるといった利点もある。たとえば、図-13¹⁵⁾は構造格子 (差分法) と非構造格子 (有限要素法) とを組み合わせることにより、それぞれの計算法の利点を生かしたハイ

図-11 飛行機まわりの Zonal 格子と領域接合法¹³⁾
(領域境界で数メッシュ重ね合せ、内挿で情報授受)

Overlap region between grids.

Arrangement of component grids.

図-12 重ね合せ格子による複数物体まわりの計算¹⁴⁾

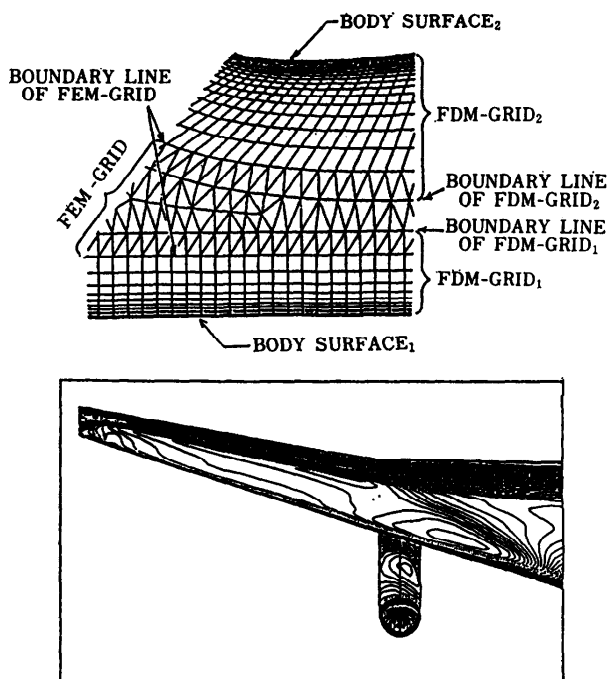


図-13 構造-非構造複合格子法による翼とナセル干渉の計算¹⁾

ブリッド法を構成している。

しかしながら複数の領域に分割することは、領域間の情報授受の方法およびそのための領域境界面での格子の制御など、特に構造格子同士の領域接続にはかえって煩雑な手続きを必要とする面もあり、さらに研究の余地があろう。

3.3 非構造格子法

非構造格子は、格子の並びに制約がないために当然形状適応性に富んでいる。それゆえ、複雑な三次元形状まわりの流れ場にも構造格子を用いるよりは対応しやすい。さらには、形状データなどの入力だけで種々の問題が解けるような汎用ソフトも将来可能であろう。一方、非構造格子上での流体計算法は、これまでは計算時間や精度の面で問題があったためあまり実用化されていなかったが、最近種々の改良が加えられて急速に改善されつつあり、計算機ハードウェアの進歩もこれを助けている。

非構造格子は自由度が大きいために、格子生成法もいろいろなアプローチが可能である

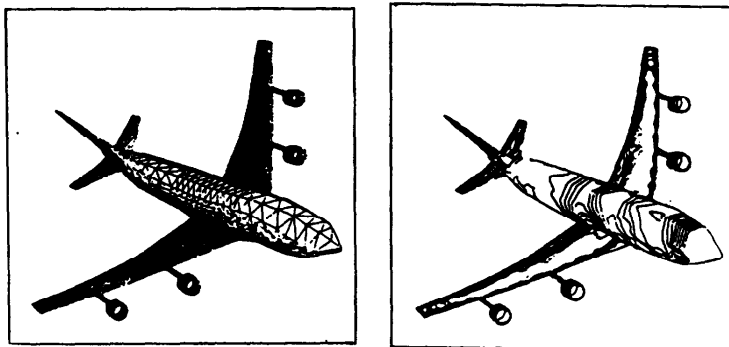


図-14 四面体非構造格子による Boeing-747 の計算¹⁾

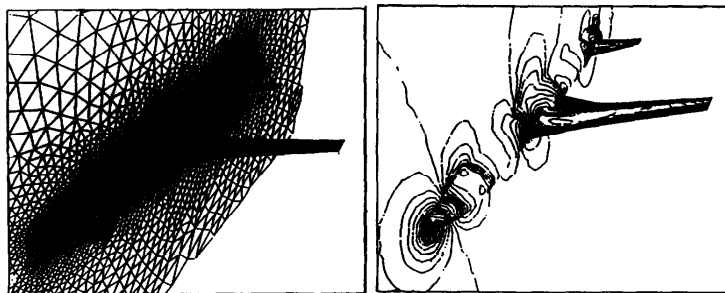
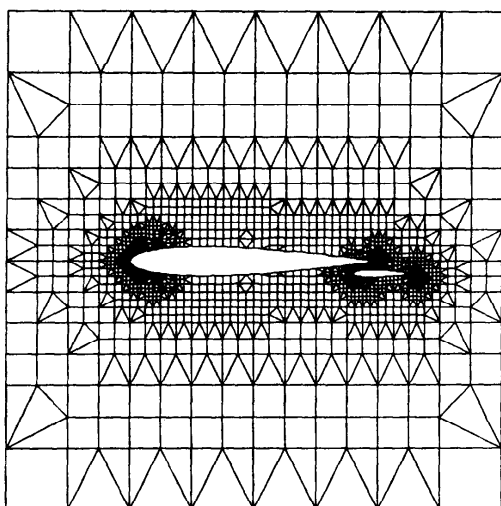
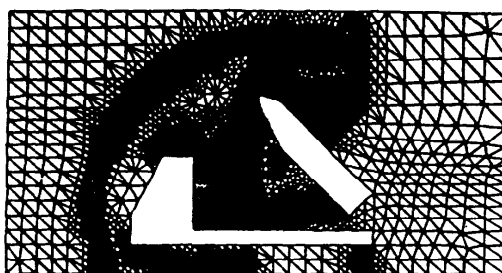


図-15 四面体非構造格子による飛行機まわりの計算¹⁾

図-16 連続分割法による自動格子生成¹⁶⁾

が、その自由度の大きさがかえって格子生成を難しくしている面もある。また、三次元場ではでき上がった非構造格子を詳細にグラフィック画面上でチェックすることは境界面以外では難しく、なんらかの格子チェックルーチンを用意する必要がある。

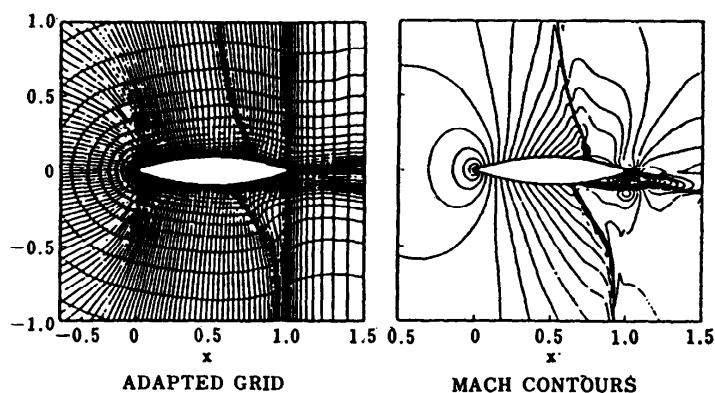
最近提案された非構造格子生成法として、三次元場で四面体要素を構成するのに Delaunay 分割法を用いた手法は興味深い。図-14¹⁶⁾はこの手法を用いて作成した Boeing-747 全機まわりの格子であり、翼の下エンジンをも含めた複雑な形状に対し、非構造格子の利点がフルに発揮されている計算例といえよう。また、図-15は Advancing-front technique¹⁷⁾による例である。さらに、連続分割法による自動格子生成の例を図-16¹⁸⁾に示す。

図-18 非構造格子の解適合格子法¹⁹⁾

3.4 解適合格子法の利用

解適合格子法は、流れ場の計算の途中で格子を流れの状況に合わせて動かし、衝撃波などの変化の激しいところに格子点を自動的に集中させて計算精度を改善する技術で、近年盛んに研究されている。この方法はまた、格子生成をも簡単にする。すなわち、最初の格子はごく荒っぽいものでもよく、とにかく計算ができれば、計算の途中でそれを解適合格子法により改良していくことができる。図-17¹⁹⁾は構造格子の解適合格子法の例で、衝撃波やせん断層などをとらえた複雑な流れ場の計算には非常に有効な手段である。

解適合格子法は、最近では非構造格子法で特にその

図-17 構造格子の解適合格子法¹⁹⁾

威力を発揮している。格子が非構造であるため、必要などころに格子点を自由に追加あるいは削除できるため、非構造格子法の精度向上には不可欠な技術である。図-18²⁰⁾は時間的に動く衝撃波を解適合格子法できれいに捕えた例である。

4. おわりに

格子生成法の概要と最近の話題を中心として紹介した。今後、計算空気力学は工学全般にわたる解析・設計の道具として用いられるようになるであろうが、そのためにも使いやすい格子生成法というものがある。しかしながら、構造格子に関しては、どのような流れ場にも適用できるような万能の格子生成法というものはいまだ考案されていない。実際、格子そのものは無限に切りようがあるため、そのような万能格子生成法が将来にはできるというのも疑問である。むしろ、流れ場の形状、流れの状況に応じて最適な格子生成法を選ぶように、いろいろな格子生成法を整備することが、現場レベルでは重要であろう。グラフィック端末上での会話処理形式の採用も、複雑な形状まわりの格子生成には不可欠なものになると思われる。また、格子生成を自動化する意味では、非構造格子は魅力的であり、その方面の研究も今後ますます盛んとなろう。

参 考 文 献

- 1) Thompson, J.F., Warsi, Z.A. U. and Mastin, C.W.: Numerical Grid Generation: Foundations and Applications, North-Holland (1985).
- 2) Kutler, P.: A Perspective of Theoretical and Applied Computational Fluid Dynamics, AIAA J., Vol. 23, No. 3, pp. 328-341 (1985).
- 3) Sorenson, R.L.: A Computer Program to Generate Two-Dimensional Grids about Airfoils and Other Shapes by the Use of Poisson's Equation, NASA TM 81198 (1980).
- 4) Kusunose, K., Marcum, D.L., Chen, H.C. and Yu, N.J.: Transonic Analysis for Complex Airplane Configurations, AIAA Paper 87-1196 (1987).
- 5) Vinokur, M.: On One-Dimensional Stretching Functions for Finite-Difference Calculations, J. Comp. Phys., Vol. 50, No. 2, pp. 215-234 (1983).
- 6) Eriksson, L.E.: Generation of Boundary-Conforming Grids around Wing-Body Configurations Using Transfinite Interpolation, AIAA J., Vol. 20, No. 10, pp. 1313-1320 (1982).
- 7) Eriksson, L.E., Smith, R.E., Wiese, M.R. and Farr, N.: Grid Generation and Inviscid Flow Computation about Cranked-Winged Airplane Geometries, AIAA Paper, 87-1125 (1987).
- 8) 沢田恵介, 高梨 進: 会話的座標生成法について, 第1回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 347-350 (1987).
- 9) Takanashi, S., Obayashi, S., Matsushima, K. and Fujii, K.: Numerical Simulation of Compressible Viscous Flows around Practical Aircraft Configurations, AIAA Paper 87-2410 (1987).
- 10) Rubbert, P.E. and Lee, K.D.: Patched Coordinate Systems, Numerical Grid Generation, Ed. Thompson, J.F., North-Holland (1982).
- 11) Sawada, K. and Takanashi, S.: A Numerical Investigation on Wing/Nacelle Interferences of USB Configuration, AIAA Paper 87-0455 (1987).
- 12) 姫野龍太郎, 藤谷克郎, 高木通俊: マルチ・ブロック格子による自動車まわりの流れの数値解析, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 511-514 (1988).
- 13) Flores, J., Chaderjian, N.M. and Sorenson, R.L.: Simulation of Transonic Viscous Flow over a Fighter-Like Configuration Including Inlet, AIAA Paper 87-1199 (1987).
- 14) Benek, J.A., Donegan, T.L. and Suhs, N.E.: Extended Chimera Grid Embedding Scheme with Application to Viscous Flows, AIAA Paper 87-1126-CP (1987).
- 15) Nakahashi, K. and Obayashi, S.: Viscous Flow Computations Using a Composit Grid, AIAA Paper 87-1128-CP (1987).
- 16) Jameson, A. and Baker, T.J.: Improvements to the Aircraft Euler Method, AIAA Paper 87-0425 (1987).
- 17) Parikh, P., Löhner, R., Gumbert, D. and Pirzadeh, S.: Numerical Solution on a PATH-FINDER and Other Configurations Using Unstructured Grids and a Finite Element Solver, AIAA Paper 89-0362 (1989).
- 18) 中橋和博: 非構造風上法と自動格子生成, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 271-274 (1988).
- 19) Nakahashi, K. and Deiwert, G.S.: Self-Adaptive-Grid Method with Application to Airfoil Flow, AIAA J., Vol. 25, No. 4, pp. 513-520 (1987).
- 20) Löhner, R.: The Efficient Simulation of Strongly Unsteady Flows by the Finite Element Method, AIAA Paper 87-0555 (1987).

(平成元年2月3日受付)