

経済における複雑系ネットワーク

相馬 亘¹、藤原 義久²、青山 秀明³

概要

経済におけるネットワークとして、会社が株所有関係によってつながる株所有ネットワークについて研究する。実証的な研究を通じて、株所有ネットワークの次数分布の裾野部分が、冪分布 $p(k) \sim k^{-\gamma}$ にしたがっていることを明らかにする。株所有ネットワークはまた、実対称な隣接行列として表現される。そして、その隣接行列の固有値分布の裾野部分が、冪分布 $\rho(\lambda) \sim |\lambda|^{-\delta}$ にしたがっていることを明らかにする。これらの分布の指数の間にスケーリング則 $\delta = 2\gamma - 1$ が成り立っていることを示し、この関係式が存在する根拠がネットワークの局所樹状性にあることを明らかにする。

Complex networks in the economy

Wataru Souma¹, Yoshi Fujiwara², Hideaki Aoyama³

Abstract

As complex networks in the economy, the shareholding network, which is constructed by companies and shareholding relationships, is studied. Through empirical studies, it is shown that the degree distribution of shareholding networks follows the power law distribution, $P(k) \sim k^{-\gamma}$, in the large degree range. Shareholding networks are also represented by the real symmetric adjacency matrix, and it is shown that the eigenvalue distribution of this adjacency matrix follows the power law distribution, $\rho(\lambda) \sim |\lambda|^{-\delta}$, in the tail part. A scaling relation, $\delta = 2\gamma - 1$, is found and explained by the local tree-like structure of networks.

¹ATR ネットワーク情報学研究所・ATR Network Informatics Laboratories

²ATR ネットワーク情報学研究所・ATR Network Informatics Laboratories

³京都大学大学院理学研究科・Department of Physics, Graduate School of Science, Kyoto University

1 はじめに

物理学の分野で 19 世紀末から 20 世紀の初頭に成立した量子力学は、それまでの古典物理学の常識を覆すと共に、20 世紀の物理学の大きな流れを作った。世紀末に誕生した学問が、次の世紀で大きな発展を遂げるとは言い切れないが、20 世紀から 21 世紀へ変化する中で物理学の分野に現れた新たな流れは、経済物理学と複雑系ネットワークの研究であろう。

自然科学者が経済現象を科学的に研究する流れは、Pareto の時代まで遡ると約 100 年以上の歴史があることになる⁴。また、アダムスミスの「神の見えざる手」などもバネの振動にアナロジーを持つと言われるように、物理学と経済学の接触は常にとは言えないけれども、ある程度の頻度で行われてきた。だが、それらの研究と最近の経済物理学の決定的な違いは、電算化された膨大なデータの蓄積に依る部分が多い。物理学者は膨大な経済データを、相転移や臨界現象といった統計物理学の視点から解析し始めたのである。

グラフ理論の研究は長い歴史を持ち、数学的厳密性のために解けるモデル、即ち、木やランダムグラフについて詳しく研究されてきてきた。その理論体系には驚嘆せざるおえないが、現実のネットワークはどのようになっているのか？、という疑問はどこかに忘れ去られていたようである。また、ネットワークに関する研究は社会学者によってもなされてきたが、その問題意識は自然科学者の持つものとは違っていた。そのような状況は、経済物理学の場合と同様に、ネットワークに関する電算化された膨大なデータが蓄積されるようになり、物理学者が、相転移や臨界現象といった統計物理学の視点から解析し始めることによって変わりつつある。

複雑系ネットワークの研究で主に題材として採り上げられるものは、WWW や生物的ネットワークであり、経済現象を扱った研究は我々のグループの他にほとんど見当たらない状況にある。一方、経済物理学では、株価の相関行列をクラスター分析して得られるデンドログラムや、最小全域木などをもってネットワーク構造を議論するものはあったが、企業をノードとし企業間の関係性にに基づき形

⁴Pareto は個人所得の高所得側の分布が冪分布に従うことを発見したことで有名である。Pareto が発見したことを現代風の言葉で言えば「高額のお金にはフラクタル性がある」ということになる。

成されるネットワークに関する議論は全くなされていらない。経済は経済主体が複雑なネットワークを構成し、そのようなネットワーク上で繰り返られているダイナミクスと考えるのは、あまりにも物理学者的な発想かもしれないが、経済学の分野では、そのような視点からの研究はなされてこなかったようである。したがって本稿は、最近の複雑系ネットワーク研究の発展を踏まえて、実経済ネットワークについて探求した初めての試みといえる。

本稿では、第二節で、企業間の株所有によるつながりについて説明し、対象にするネットワークの範囲を明らかにする。そして、そのネットワークを表現する隣接行列を定義するとともに次数分布を調べ、株所有ネットワークがスケールフリーネットワークであることを明らかにする。現在までに、ネットワークを特徴づける様々な指標が考えられていて、それらを現実のネットワークに対して求めることによって、ネットワークに対する理解が深まりつつあるが、本稿では、ネットワークを表現する隣接行列の固有値分布と固有ベクトルの性質についてのみ議論することにする。したがって、第三節では、第二節で決定されたネットワークを表現する隣接行列の固有値分布について議論する。そして、固有値分布とネットワークのトポロジーの関係について議論する。また、第四節では、固有ベクトルと企業グループの関係性について議論する。そして、最後にまとめをおこなう。

2 ネットワークの範囲

ネットワークについて議論する場合、ノードとして何を採用するか？、またノード間のどのような関係性に着目するか？、ということについて明らかにする必要がある。つまり、ネットワークの範囲を決定することである。

経済におけるネットワークを議論する場合、ノードになりうる候補は、個人、企業、産業、など様々であり、それらのノード間の関係性についても様々なものが考えられる。だが、本稿では、ノードとして上場・店頭企業と非上場の銀行・保険会社を採用し、ノード間の関係性として株の所有によるつながりを採用する。

用いるデータは、2002 年 9 月末での、上場・店頭企業の大株主データである。このデータは、そ

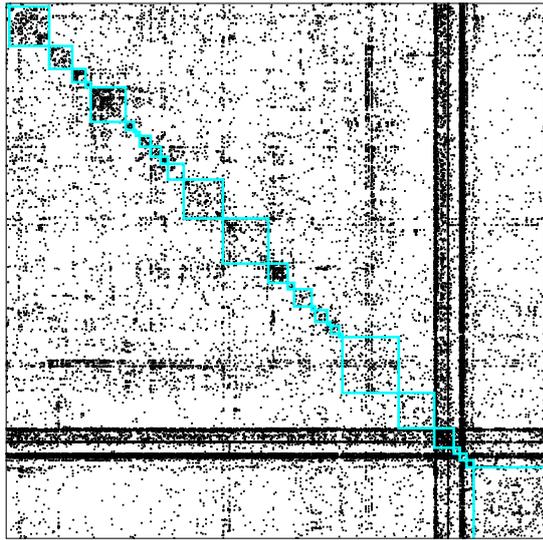


図 1: 2002 年 9 月末の株所有ネットワークに対応する隣接行列。

それぞれの企業の大株主に関するデータであり、収録されている大株主の数は企業によって異なるが、平均しておよそトップ 16 位までのリストが得られる。その結果、本稿が対象にするネットワークは 3152 社によって構成されるものである。

このデータを基にしてネットワークを定義する場合、株主から企業に向かって線を引くというルールを採用すると、ネットワークを有向グラフとして表現できるが、本稿では、無効グラフ化された場合を考えることにする。したがって、隣接行列 M_{ij} は、もしも i 社が j 社の株主であれば、 $M_{ij} = 1$ とし、それと同時に $M_{ji} = 1$ とする。そして、 i 社と j 社が株所有の関係によってつながっていなければ $M_{ij} = M_{ji} = 0$ とする。また、自己ループは考慮しないため $M_{ii} = 0$ である。

このように定義された隣接行列は図 1 で与えられる。この図の黒い点は行列の成分が 1 に等しい部分を表し、白い部分が成分 0 を表している。この行列の成分の並びは、企業コード番号を反映した形になっている。そのため、業種の変わり目には、図中の実線のように境界線を引くことができる。

図 1 から解ることの一つは、黒い点が対角線付近で濃く分布していることである。このことは、同業種内でのつながる頻度の方が、異業種間でつながる頻度よりも大きいことを意味している。また、その他には、ある業種では、全ての業種とつながっていることである。これらの業種は金融業と保険

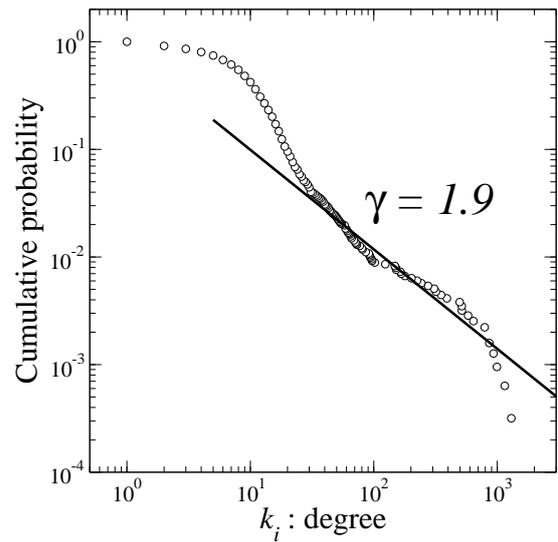


図 2: 2002 年 9 月末の株所有ネットワークの度数分布。

業に対応している。

度数とは、ノードが持っているエッジの数であり、隣接行列を用いて定義すると

$$k_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \quad (1)$$

で与えられる。そして、このようにして計算された度数分布は図 2 に示される。この図は、横軸に度数を採り、縦軸に累積確率を採り、両対数グラフで表示したものである。今の場合、累積確率は度数 k 以上のノードを見いだす確率を意味し、連続表記では、確率密度関数 $p(k)$ を用いて、

$$P(k \leq) \equiv \int_k^{\infty} dx p(x) \quad (2)$$

で定義される。また、図中の実線は、分布の裾野部分を冪分布でフィットしたものであり、得られた結果は

$$p(k) \approx k^{-\gamma}, \quad \gamma = 1.9 \quad (3)$$

である。つまり、株所有ネットワークはスケールフリーネットワークになっているのである。

3 固有値分布

前節で定義された隣接行列を固有値解析して得られる固有値分布の原点付近の様子は図 3 に示される。この図では横軸が固有値の値、縦軸が固有

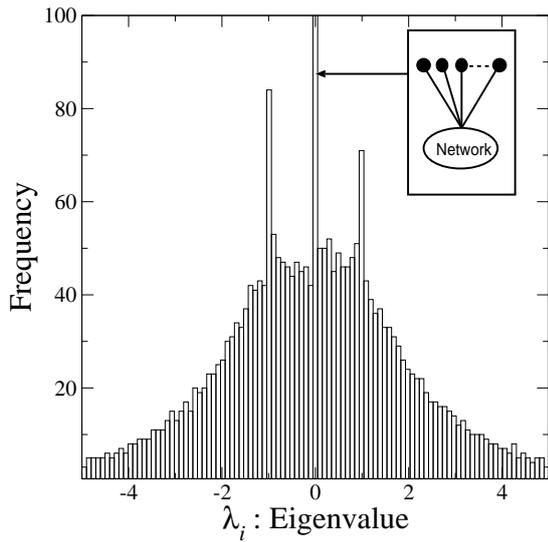


図 3: 2002 年 9 月末の株所有ネットワークに対応する隣接行列の固有値分布で、原点付近をクローズアップして描画したもの。

値の出現頻度である。この図から、(1) 分布は正負でほぼ対称である。(2) $\lambda = 0$ のところに一番目のピークがある。(3) $\lambda = \pm 1$ のところに二番目のピークがある。ということが理解できる。この内、(2) の $\lambda = 0$ の所のピークは、図内部に描いたような配位、つまり、ネットワークの縁にあるノードによって形成されていることが知られている。また、 $|\lambda| < 1$ の範囲の分布が、低配位数の Beth 格子の場合の分布に近いことが報告されており、 $\lambda = \pm 1$ のピークと関係していると考えられているが、詳しいことは解っていない。

また、固有値分布の裾野部分は図 4 に示される。この図は、横軸に固有値の絶対値を採り、縦軸に累積確率を採り、両対数グラフで描画したものである。図中の○と+は各々正の領域での分布と負の領域での分布に対応している。これらがほぼ同じ分布に従うことから、正負でほぼ対称な分布になっていることがわかる。また、図中の実線は、裾野部分を冪分布

$$\rho(\lambda) \approx |\lambda|^{-\delta}, \quad \delta = 2.8 \quad (4)$$

でフィットした結果である。これより、固有値分布は太い裾野を持つことがわかる。また、次数分布の指数 $\gamma = 1.9$ と固有値分布の指数 $\delta = 2.8$ を比較すると

$$\delta = 2\gamma - 1 \quad (5)$$

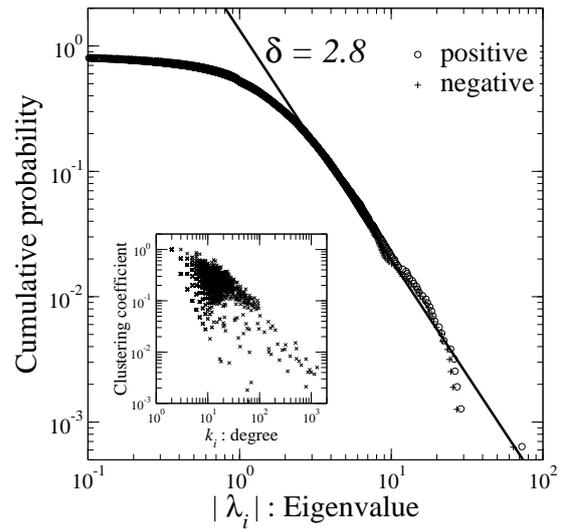


図 4: 2002 年 9 月末の株所有ネットワークに対応する隣接行列の固有値分布で、分布の裾野部分をクローズアップして描画したもの。

の関係があることが解る。

最近、文献 [1] は、もしもネットワークが樹状ネットワークならば、次数分布と固有値分布の間には、

$$\rho(\lambda) \simeq 2|\lambda|p(\lambda^2) \quad (6)$$

の関係式が成り立つことを明らかにした。したがって、もしもネットワークが樹状ネットワークで、次数分布が冪分布に従っているならば、固有値分布は自動的に冪分布に従うことになり、その指数の間に $\delta = 2\gamma - 1$ の関係が存在することになる。では、本稿で議論しているネットワークは、果たして樹状ネットワークなのだろうか？

この疑問に答えるため、我々は、ネットワークの各ノードごとにクラスター係数を計算した。その結果は図 4 内部の小さな図にまとめられる。この図は、横軸に次数を採り、縦軸にクラスター係数を採って、両対数グラフで表示したものである。図より、次数が大きいノードほどクラスター係数が小さくなっていることが解る。このことは、次数が大きい領域は樹状ネットワークになっていることを意味する。したがって、文献 [1] の主張が当てはまることになる。また、クラスター係数の分布の形状はほぼ冪分布

$$C_i(k) \approx k^{-\alpha}, \quad \alpha = 1.1 \quad (7)$$

でフィットできる。クラスター係数の分布が冪分布になっていることは、WWW や生物学的ネットワー

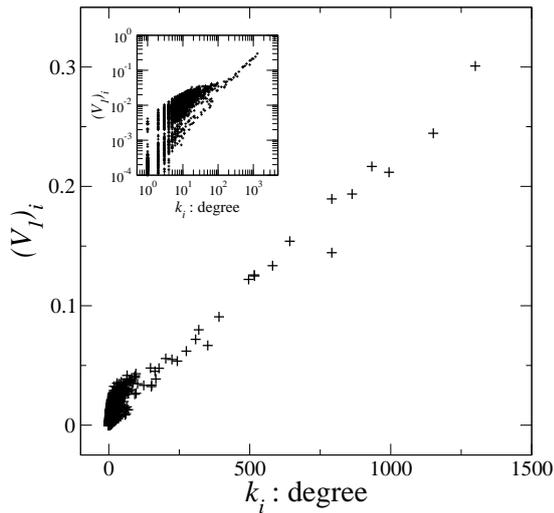


図 5: 2002 年 9 月末の株所有ネットワークにおける次数と、そのネットワークに対応する隣接行列の最大固有値に対応する固有ベクトルの成分との相関。

クでも起こっていることが報告されていて、ネットワークの階層性やモジュール性、ネットワークモチーフと関連があると考えられているが、詳しいことは解っていない。

4 固有ベクトル

本稿で取り扱っている株所有ネットワークの隣接行列を固有値解析し、最大固有値に対する固有ベクトルを求めると、そのベクトルの成分の値と各々のノードを関連づけることができる。また、各々のノードが持つ次数は 2 節で求めているので、それらの相関を調べることができる。その結果は図 5 にまとめられる。図では、横軸に次数を採り、縦軸にベクトルの成分の大きさを採っている。また、図中の小さな図は、両対数グラフで表示したものである。この図より、次数と最大固有値の固有ベクトルの成分の値の間に線形の相関があることが解る。

本稿では、株所有に関するデータを用いているが、他のデータを用いることによって、株所有ネットワークを構成している企業のメインバンクを知ることができる。したがって、各固有ベクトルの成分分布をメインバンクごとに調べることができる。

二番目の固有値に対応する固有ベクトルの成分

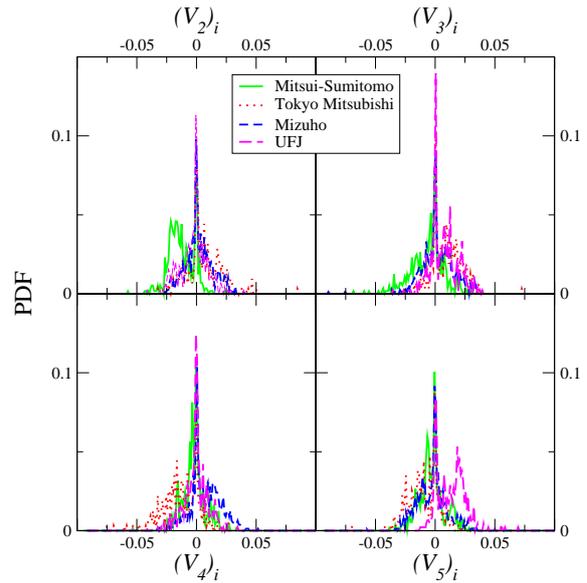


図 6: 2002 年 9 月末の株所有ネットワークに対応する隣接行列の、二番目から四番目の固有値に対応する固有ベクトル中の成分の分布を、会社のメインバンクごとに描画した結果。

分布を調べると、図 6 の $(V_2)_i$ に対する分布が得られる。図では、四つのメインバンク（三井住友、東京三菱、みずほ、UFJ）ごとに分布を採っている。この図では、固有ベクトルの成分のうち、三井住友銀行をメインバンクとしているものの分布は、負の領域に主に分布している。一方、それ以外の銀行をメインバンクとしているものの分布はほとんど同じになっている。したがって、この固有ベクトルは、三井住友銀行を主要メンバーとする企業グループを抽出していると考えられる。

三番目の固有値に対する固有ベクトルに対しても同様な解析を行うと、図 6 の $(V_3)_i$ に対する分布が得られる。この場合は、 $(V_2)_i$ の場合と違い、それぞれの分布で明確な差を観察することができない。

四番目の固有値に対する固有ベクトルの場合は、図 6 の $(V_4)_i$ である。この場合は、東京三菱銀行をメインバンクとする会社に対応する成分は、主に負の領域に分布している。また、みずほ銀行をメインバンクとする会社に対応する成分は、主に正の領域に分布している。したがって、この固有ベクトルは、東京三菱銀行を主要メンバーとする企業グループと、みずほ銀行を主要メンバーとする企業グループの双方を抽出していると考えられる。

五番目の固有値に対する固有ベクトルの成分の

分布は、図6の $(V_5)_i$ である。この図では、UFJ銀行をメインバンクとする企業に対応する成分は、主に正の領域に分布している。一方、それ以外の銀行をメインバンクとしているものに対応する分布はほとんど同じになっている。したがって、この固有ベクトルは、UFJ銀行を主要メンバーとする企業グループを抽出していると考えられる。

また、その他の固有値に対応する固有ベクトルに対しても同様な解析をおこなったが、企業グループなどを表す分布は現れなかった。

5 まとめ

本稿では、会社が他会社の株を所有することによって形成されるネットワークに対して固有値解析をおこない、固有値の分布と固有ベクトルについて解析した。現在までに、ネットワークの性質を特徴づける様々な量が考えられていて、本稿で採り上げた株所有ネットワークに対しても、それらの量を解析することによって、面白い性質が明らかになってきているので、別の機会に詳しく報告したいと思う。

また、経済におけるネットワークの場合は、WWWや生物的ネットワークなどの場合と違い、ノードの性質を定量的に把握できるという利点がある。例えば、本稿で扱ったようにノードを企業とした場合は、企業の性質を財務データを通して詳しく把握できるので、ダイナミカルネットワークのモデルとしてより精密な議論ができると期待される。

謝辞

本研究は独立行政法人情報通信研究機構の研究委託「人間情報コミュニケーションの研究開発」により実施したものである。また、本研究は部分的に文部科学省科学研究費 基盤研究 (A)(1) 15201038 の補助を受けた。

参考文献

- [1] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes and A.N. Samukhin, Phys. Rev. E 68, 046109 (2003).