

エージェントネットワークから見た情報化市場における価格形成

橋本康弘*, 小倉政則, 陳 昱, 大橋弘忠

東京大学 大学院 工学系研究科 システム量子工学専攻

市場の情報化によって価格変動の振る舞いはどのように変化するのか？市場の構成員をエージェント、市場をエージェントネットワークと定義し、ネットワークのトポロジーと価格変動の統計的性質の関係を調査した。ネットワークトポロジーを格子状からランダムグラフへと変化させることで、系はスモールワールド、つまり情報が速く伝わる系へと移行する。その結果、価格変動率の標準偏差は大きくなり、より大きな価格変動の生じる確率が高くなること、さらにボラティリティの時間相関が速く減衰することを確認した。

Price formation in informatized markets: From the point of view of the agents network

Yasuhiro Hashimoto, Masanori Ogura, Yu Chen, Hirotada Ohashi

Department of Quantum Engineering & Systems Science,
School of Engineering, The University of Tokyo

How the behavior of price formation in informatized markets is? We defined individuals who constitute the market as 'agent's and the network of agents as 'marketplace', and investigated the relation between network topology and statistical properties of price fluctuations. We found that when the network transformed into 'small-world', where information spread quickly, the deviation of price fluctuations increased and the auto-correlation function of volatility decayed rapidly.

1 はじめに

為替相場や株価指数の価格変動の履歴を分析してみると、そこにはいくつかの特徴的な傾向が存在することが明らかになっている。一つは価格変動率の確率密度関数が裾野の広く中心部の尖ったいわゆる“Leptokurtic”な形状になる点^[1]、もう一つは価格変動率そのものは時間相関を持たないが、その絶対値、すなわちボラティリティは長時間相関を持つという点である。^[2]

時刻 t における価格変動率 r_t は、価格を x_t としたとき

$$r_t = \log(x_t/x_{t-1}) \quad (1)$$

と定義される。これはいわゆるリターン（収益率）に対応する。例えば1971年1月から2004年6月までの円/ドル為替相場の日次データから求めたリターンの推移、リターンの確率密度分布、およびリターンとボラティリティの時間相関を図1に示す。価格変動に典型的な統計的特徴を確認できる。

本研究が注目するのは『市場の情報化によって価格変動の統計的性質がどのように変化するのか？』という点である。[†] そこで、市場の構成員をエージェント、市場をエージェントからなるネットワークと定義し、情報の伝わる速度が速い/遅いネットワークにおいて、価格変動の統計的性質にどのような違いが現れるかを調査する。次節ではまずエージェントベースの価格形成モデルを定義し、第3節ではネットワーク上でのダイナミクスに一般化する。第4節で数値シミュレーションの結果を示し、最終節を結論とする。

*E-mail: hy@q.t.u-tokyo.ac.jp

[†]ここでは“情報化”を単純に“社会集団内を情報が伝わる速さの増大”という意味で使用している。流通する情報量の爆発や計算処理能力の向上などは念頭にない。

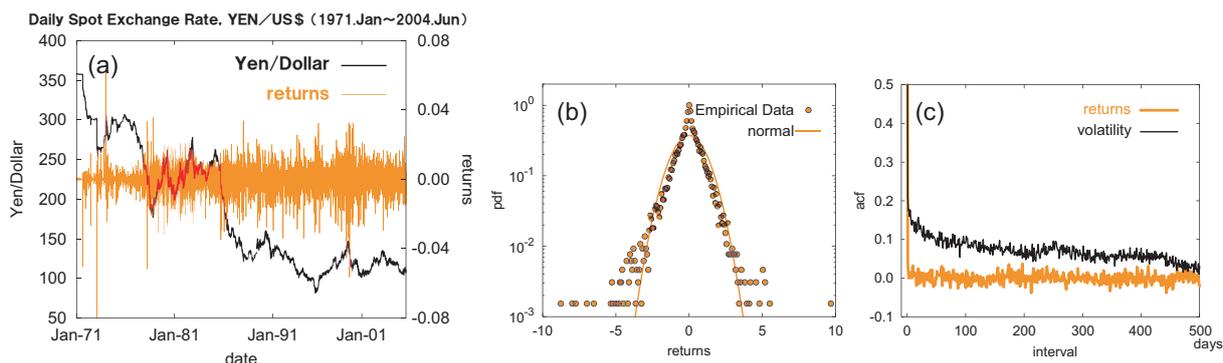


図 1: 1971 年 1 月から 2004 年 6 月までの円/ドル為替相場の日次データに基づく。(a) 価格とリターンの推移、(b) リターンの確率密度分布、(c) リターンおよびボラティリティの時間相関。図 (b) 中、両軸はデータの標準偏差が 1 になるように規格化してある。曲線は標準正規分布。これらは価格変動に典型的な 3 つの特徴、つまり、(1) リターンの確率密度分布は“Leptokurtic”な形状になる、(2) リターンは時間相関を持たない、(3) ボラティリティは長時間相関を持つことを示している。^[3]

2 価格形成モデル

2.1 Sznajd モデル

市場の振る舞いのメカニズムを明らかにしようとする試みの中で、エージェント集団の相互作用からボトムアップ的に市場が持つ統計的特徴を再現しようとするアプローチがある。ここで紹介する Sznajd モデル^[4]もその一つである。Sznajd モデルはイジングスピンライクな 2 状態をとるエージェントによって構成される。2 状態とはすなわち“売り”と“買い”である。エージェントは各時間（離散時間）において一定のルールに従い自己の状態を決定し、エージェント集団の状態和が市場の価格に反映される。いま時刻 t における i 番目のエージェントの状態を

$$s_i(t) = \begin{cases} +1 & (\text{買い}) \\ -1 & (\text{売り}) \end{cases} \quad (2)$$

と定義すると、エージェント数 N からなる市場の状態 S_t は

$$S_t = \{s_i(t) \mid i \in [1, N]\} \quad (3)$$

で与えられ、市場価格 x_t は

$$x_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) \quad (4)$$

と定義される。後述するエージェントの状態遷移ルールにより、エージェント全員が“売り”、あるいは“買い”という同一状態をとることはないので、 $x_t \in (-1, 1)$ という値域が保証される。リターンの定義は式 (1) にならい

$$r_t = \log \left(\frac{x_t + 1}{x_{t-1} + 1} \right) \quad (5)$$

とする。式 (4) のままでは価格が負の値をとるため、単純に下駄を履かせている。

Sznajd モデルでは 2 種類のエージェントを仮定する。一つが Trend-follower と呼ばれる多数派エージェントである。これはローカルな情報しか持たず、周囲の意見に左右される大衆を表現する。もう一つは Fundamentalist と呼ばれる少数のエージェントである。これは市場全体をグローバルに眺めた上で独断的に行動する腕利きの投資家を表現する。Trend-follower の働きによって、市場は“売り”または“買い”いずれか一方の状態に硬直しようとするが、独自の行動をとる Fundamentalist の存在によって微小なゆらぎが与えられ、市場が凍りつくことはない。各エージェントの行動ルールは以下の通りである。

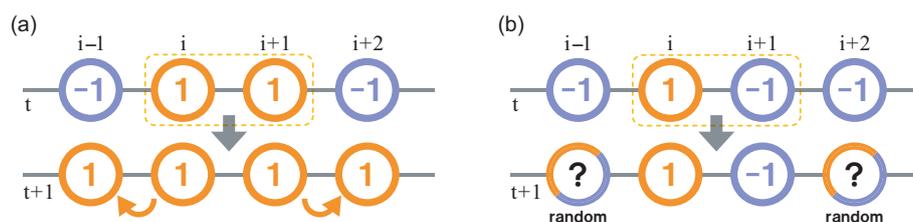


図 2: Trend-follower の概念図。(a) 状態を同じくするエージェントが隣り合わせの場合、その状態が隣接エージェントに伝播する。(b) 状態が異なる場合、隣接エージェントの状態はランダムに決定される。

Trend-follower エージェントは一次元的に一列に配置されており、各エージェントは直近の 2 つのエージェントと連結されている。(図 2 参照) 隣り合うエージェントの組 $(i, i+1)$ の外側に隣接するエージェントを $i-1, i+2$ とすると、Trend-follower エージェントは $s_i s_{i+1} = 1$ のとき $s_{i-1} = s_{i+2} = s_i$ 、一方 $s_i s_{i+1} = -1$ のとき s_{i-1} と s_{i+2} は各々 1 か -1 をランダムに選択する。つまり、状態を同じくするエージェント集団の周辺にいるエージェントは集団と同じ状態を取ろうとするが、状態の不一致な集団の周辺にいるエージェントは“迷い”のために確率的な振る舞いをすることを表している。

Fundamentalist Fundamentalist は近傍エージェントの状態ではなく全体の価格 x_t を見る。 $x_t > 0$ 、つまり買い注文が多いときには確率 $|x_t|$ で -1 (売り)、一方 $x_t < 0$ 、つまり売り注文が多いときには確率 $|x_t|$ で 1 (買い) を選択する。それ以外の場合は状態は変化しない。Fundamentalist はグローバルな情報に従い常に“合理的に”行動しようとする。

このモデルの特徴は、エージェントの状態がそれを取り囲む近傍エージェントの状態によって決定されるという従来の方法とは異なり、状態を同じくするエージェントの塊があるとき、その影響が周囲に広がっていく点にあると Sznajd らは主張する。この単純なイジングスピンライクなモデルが前述した価格変動の 3 つの特徴を再現することは [4] において示されている。

2.2 よりオーソドックスな方法で

しかし、Sznajd らが主張する“外向きに広がる”ルールを用いずとも、従来のオーソドックスな方法、つまり“近傍によって決定される”ルールを用いた場合でも、同様の結果が得られることを我々は確認した。また、ネットワークモデルへと一般化する際は従来のルールの方が実装上は任意性の入り込む余地が少ない。したがって、以降では改変版 Sznajd モデルをベースとして話を進める。

改変版 Sznajd モデルの変更点は大きく 2 点ある。一つは Trend-follower ルール。改変版ルールでは、Trend-follower エージェント i の近傍エージェント群を Γ としたとき、 $\sum_j^{\Gamma} s_j > 0$ のときには 1 、一方 $\sum_j^{\Gamma} s_j < 0$ のときには -1 を、それぞれ確率 $|\sum_j^{\Gamma} s_j| / \sum_j^{\Gamma} 1$ で選択するものとする。それ以外の場合は状態は変化しない。つまり確率的なマジョリティルールである。もう一つの変更点は時間発展のルール。Sznajd モデルではモンテカルロ的にエージェントを選択し、ルールを適用したエージェントの状態は即時更新するが、改変版では各エージェントの新しい状態はバッファに保存し、すべてのエージェントにルールを適用後、一斉に更新するという方法をとる。つまり、以下のような計算手順となる。

1. “現在のエージェントの状態” からすべての Trend-follower の状態を決定し“バッファ”に保存する。
2. “現在のエージェントの状態” から価格を求め、価格を基にすべての Fundamentalist の状態を決定し“バッファ”に保存する。
3. “バッファ”の状態を“現在のエージェントの状態”に反映させる。
4. 1. に戻る。

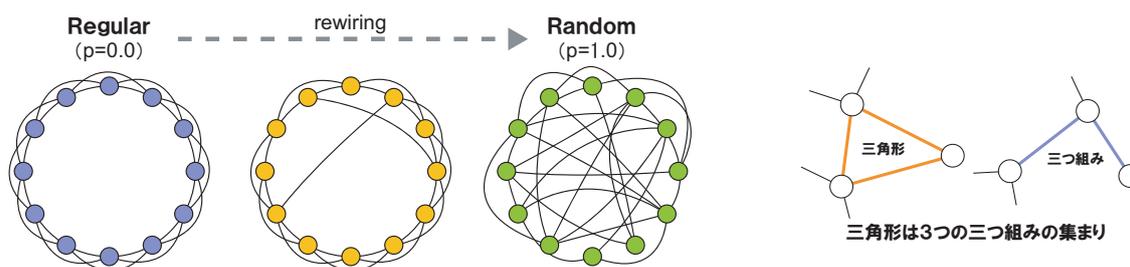


図 3: Watts-Strogatz モデルの模式図。エッジを繋ぎ換える確率 p が 0 のときに格子、1 のときにランダムグラフになる。

図 4: 三角形と三つ組み

3 ネットワークへの拡張

改変版 Sznajd モデルのネットワークへの一般化は容易であり、特に注意を要すべき点はない。

3.1 平均最短経路長

市場ネットワークにおいて、エージェント i と j を連結する最小のエッジの数（最短経路長）を ℓ_{ij} とおいたとき、ネットワークのグローバルな構造を特徴付ける平均最短経路長 L は一般に

$$L = \sum_{i,j} \ell_{ij} / \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \quad (6)$$

と定義される。ここでは“高度情報化 = 情報伝達が速い = 市場の L が小さい”と仮定し、 L を市場ネットワークの一つの尺度として価格変動の性質を調査する。

3.2 Watts-Strogatz モデル

任意の L を持ったネットワークを生成する便利なモデルに Watts-Strogatz モデル^[5]がある。これはエッジを繋ぎ換える確率 p というパラメータを介して、格子からランダムグラフに到る中間状態を生成するネットワークモデルである。（図 3 参照）また、ローカルな構造化の程度はクラスタリング係数 C という指標を用いて表すことができる。 C の定義は主に 2 つあり、Watts らによる定義

$$C_W = (1/N) \sum_i^N \frac{(i \text{ の隣接エージェント間に存在するエッジ数})}{(i \text{ の隣接エージェント同士のペアの数})} \quad (7)$$

および Newman らによる定義^[6]

$$C_N = \frac{(\text{三角形の数})}{(\text{三つ組みの数})} \quad (8)$$

がある。“三角形”および“三つ組み”とは図 4 のような接続を指す。 p を大きくしていくと、 L が急激に減少する一方で C は緩やかに減少すること、また C_N と C_W 両者はほぼ同じ値を示すことが知られている。

ここでは Watts-Strogatz ネットワーク上で改変版 Sznajd モデルを時間発展させ、ネットワークの各トポロジー量と価格変動の統計量の間関係を見る。

4 数値シミュレーション

エージェント数 N を 1000（うち Trend-follower が 999、Fundamentalist が 1）、一つのエージェントが持つ平均の接続数（いわゆる次数）を 8 に固定し、図 3 のようにエージェントを円環状に配置する。Fundamentalist や Trend-follower といった各エージェントの個性は計算を通じて変化しない。初期状態では各エージェントの状態をランダムに 1 か -1 とし、十分に大きな時間ステップ（ここでは 10^7 ステップ）の時間発展を繰り返す。

表 1: エージェントネットワークの繋ぎ換え確率 (p)、平均最短経路長 (L)、クラスタリング係数 (C_N)、クラスタリング係数 (C_W)、リターンの標準偏差 (dev)。

p	L	C_N	C_W	dev
0.0	62.9 ± 0.0	0.643 ± 0.0	0.643 ± 0.0	0.0459 ± 0.00175
0.001	37.5 ± 8.85	0.641 ± 0.00106	0.641 ± 0.000995	0.0582 ± 0.00699
0.01	11.2 ± 0.457	0.622 ± 0.00289	0.624 ± 0.00275	0.101 ± 0.00489
0.1	5.07 ± 0.0751	0.465 ± 0.0092	0.475 ± 0.0087	0.127 ± 0.00774
1.0	3.57 ± 0.00275	0.00689 ± 0.000721	0.00684 ± 0.000745	0.143 ± 0.0156

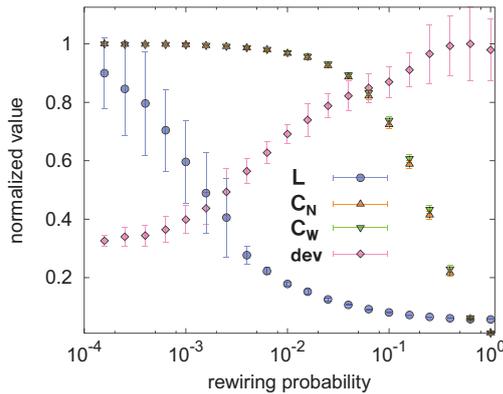


図 5: (横軸) 繋ぎ換え確率、(縦軸) 各トポロジー量とリターンの標準偏差。縦軸は規格化してある。

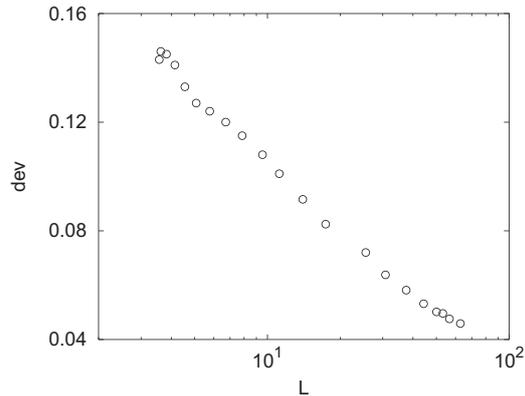


図 6: (横軸) 平均最短経路長、(縦軸) リターンの標準偏差。平均最短経路長の対数的な増加に対して標準偏差はほぼ線形に減少する。

返す。確率密度や時間相関といった各統計量の計算には、初期条件の影響を考慮し、計算後半のデータ (つまり 5×10^6 時間ステップ以降のデータ) を用いる。そして、 p を 0 から 1 まで変化させながら、各条件について 10 回ずつ、乱数の種を変えて計算する。

結果 1: 平均最短経路長とリターンの標準偏差の関係

表 1 に各 p に対応するトポロジー量とリターンの標準偏差を示す。より詳細な結果をプロットしたものが図 5 である。図から明らかとなっており、リターンの標準偏差 (dev) は L の減少と呼応して増大することがわかる。これは、市場ネットワークがスモールワールドになるにしたがい、より大きな価格変動の生じる確率が高くなることを示している。図 6 では L に対して標準偏差をプロットしている。 L の対数的な増加に対して、標準偏差はほぼ線形に減少する。一方、クラスタリング係数と標準偏差の間には明確な対応は見出せない。

結果 2: 平均最短経路長とリターンの確率密度分布の関数形の関係

$p = 0.0$ (格子)、 $p = 0.01$ (スモールワールドグラフ)、 $p = 1.0$ (ランダムグラフ) の 3 ケースについて、リターンの確率密度分布を図 7 に示す。標準偏差が 1 になるように規格化してみると、確率密度分布の関数形は市場ネットワークがスモールワールドになることによって変化しないことが見て取れる。 $p = 1.0$ における裾野のばらつきは分散の大きさや解像度の問題による。

結果 3: 平均最短経路長とボラティリティの時間相関の関係

同じく $p = 0.0, 0.01, 1.0$ の 3 ケースについて、リターンとボラティリティの時間相関を図 8 に示す。リターンに時間相関が現れないことは既知の市場の振る舞いに適合している。また、ボラティリティの時間相関は p が増加するにしたがい速く減衰する。これは市場ネットワークがスモールワールドになることで価格変動の相関が速く失われることを示唆している。

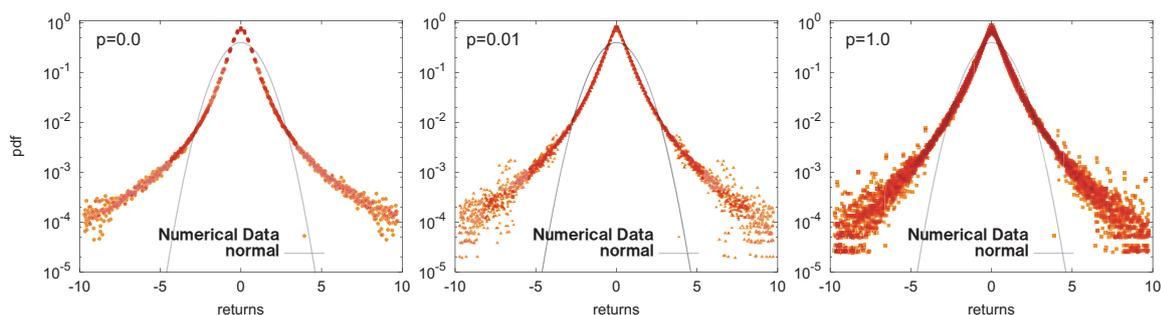


図 7: リターンの確率密度分布。左から $p = 0.0$ 、 $p = 0.01$ 、 $p = 1.0$ のケース。標準偏差が 1 になるように規格化してある。曲線は標準正規分布。乱数の種を変えた 10 回の試行すべてについて重ねてプロットしている。

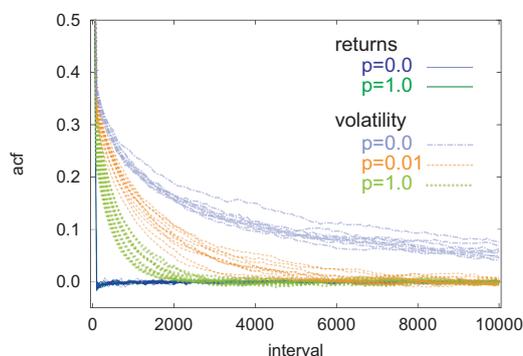


図 8: リターンとボラティリティの時間相関。横軸はサンプリング間隔、縦軸は相関係数。乱数の種を変えた 10 回の試行すべてについて重ねてプロットしている。

5 結論

以上の結果から、情報化市場においては

- 大きな価格変動の生じる確率が高くなる。
- 市場の時間相関は速く失われる。

ことが予見される。

参考文献

- [1] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, “Scaling behavior in the dynamics of an economic index”, *Nature*, **376**, 46-49, 1995.
- [2] M. Pasquini, M. Serva, “Clustering of volatility as a multiscale phenomenon”, arXiv:cond-mat, 9903334 v2, 1999.
- [3] Federal Reserve Statistical Release H. 10. URL is “<http://www.federalreserve.gov/releases/H10/hist/>”.
- [4] K. Sznajd-Weron, R. Weron, “A simple model of price formation”, arXiv:cond-mat, 0101001 v2, 2001.
- [5] D. J. Watts, S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, *Nature*, **393**, 440-442, 1998.
- [6] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts, “Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications”, *Physical Review E*, **64**, 026118, 2001.